

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE**  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Metodi Numerici delle Equazioni Differenziali (Codice: SM054 - 6 CFU)

(Marco Budinich, A.A. 2009 - 2010)

**Fondamenti di architettura** - cpu, bus, ram, I/O. Funzionamento delle varie componenti e registri della cpu nell'esecuzione dettagliata di un'istruzione espressa in un linguaggio ad alto livello (per esempio  $x = a + b$ ). Program counter e stack pointer e loro funzionamento nella chiamata di funzioni.

**Linguaggio C** - Struttura fondamentale del linguaggio C comparata al Fortran: espressioni, funzioni, istruzioni di input/output e di loop. Variabili di tipo intero, float e double. Dichiarazioni e inizializzazioni di variabili, cast di variabili, dichiarazione di funzioni, semplice input/output da terminale e su file. Operatori numerici e logici, costanti. Variabili locali e globali; statiche e volatili; dirette e indirette e loro memorizzazione nella ram. Compilatore, assembler, linker-loader e preprocessing. Controllo di flusso: if, for, while e do while, istruzioni break e continue. Definizione di funzioni e relative variabili locali, passaggio di argomenti a una funzione. Funzioni ricorsive e principio di funzionamento. Array uni & multidimensionali, puntatori e puntatori a funzione, allocazione statica e dinamica della memoria (malloc e free). Vettori di puntatori e loro applicazione per la memorizzazione di matrici, inizializzazione della struttura, confronto con la memorizzazione tradizionale.

**Mathematica** - Il programma Mathematica: organizzazione client-server, variabili con valori numerici e simbolici, grafici di funzioni a una e più variabili. Calcoli numerici e simbolici, assegnazione di valori (=) e sostituzioni (/.), liste, tabelle e matrici. Funzioni e loro definizione sia differita (:=) che immediata (=), definizione di funzioni per valori fissi ( $f[0] = 1$ ). Raccolta ed analisi di dati sperimentali, matrici di dati e loro manipolazione, cenni al controllo della precisione numerica nei calcoli, funzioni di approssimazione numerica  $N[]$  e  $Chop[]$ . Soluzione simbolica e numerica di equazioni differenziali, funzioni  $Eigensystem[]$ ,  $Interpolation[]$  e  $CForm[]$ . Funzioni utili per la programmazione (If, For, Module), funzioni Sum e D, differenze fra C e Mathematica. Animazione di grafici applicata al doppio pendolo.

**Equazioni differenziali** - Equazioni differenziali ordinarie lineari: soluzioni fondamentali dell'omogenea associata, integrali particolari con il metodo del Wronskiano. Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Applicazioni all'oscillatore armonico smorzato con forza esterna sinusoidale e impulsiva ( $\delta$  di Dirac). Linearità dell'equazione e soluzione di casi in cui la forza esterna sia sviluppabile in serie di Fourier, caso dell'onda quadra. Piccole oscillazioni e linearizzazione delle equazioni applicate al caso del doppio pendolo, modi e frequenze fondamentali. Cenni ai sistemi dinamici, mappe di Poincarè, sistemi caotici, cenni agli esponenti di Lyapunov ed alla loro determinazione sperimentale.

**Algoritmi e metodi numerici** - Rappresentazione e precisione delle variabili floating point, errori numerici di troncamento e arrotondamento: esempio di calcolo delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Cenni all'implementazione dell'aritmetica a precisione arbitraria. Metodi di Eulero e di Runge-Kutta per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie; errore sul punto finale e condizioni di stabilità del metodo di Eulero. Scrittura di un semplice programma in C per usare questi metodi con l'equazione dell'oscillatore armonico

smorzato e forzato con vari tipi di forze esterne: nulla (oscillatore libero), periodica (oscillatore forzato) ed impulsiva: discussione della relativa trattazione numerica. Metodo di Runge-Kutta di ordine 4, metodi di integrazione numerica a passo variabile ed errore controllato. Cenni ad altri metodi per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie ed al caso di integrazione di equazioni differenziali di significato fisico. Funzione ODEint (tratta dal libro Numerical Recipes) e sua applicazione al caso di equazioni dell'oscillatore armonico forzato. Soluzione numerica del doppio pendolo non dissipativo.

### **Esperienze svolte in laboratorio**

1. Uso del programma Mathematica: esempi di calcoli numerici e simbolici, grafici di funzioni ad una e due variabili, costruzioni di semplici tabelle, calcolo simbolico dei termini dello sviluppo in serie di Taylor.
2. Programmazione in C: tabulazione di una funzione da programma e suo display con Mathematica; confronto dei risultati ottenuti con quelli esatti ottenuti con Mathematica, discussione degli errori numerici commessi dal programma in C.
3. Programmazione in C: variabili locali e globali, funzioni ricorsive, scrittura di un programma per la determinazione della precisione dei numeri floating point (float e/o double). Definizione di funzioni in Mathematica con particolare attenzione alla definizione ( $=$  o  $:=$ ), definizione per valori prefissati dell'argomento, tabulazione di possibili valori 'floating point'.
4. Stesura di un programma in C per la soluzione numerica di un'equazione differenziale ordinaria di primo ordine con i metodi di Eulero e Runge-Kutta. Confronto dei risultati con la soluzione esatta ottenuta con Mathematica; studio degli errori, verifica della stabilità.
5. Scrittura di una funzione in C per la soluzione numerica, con il metodo di Runge-Kutta, di un sistema di equazioni differenziali ordinarie di secondo ordine a coefficienti costanti. Confronto dei risultati con la soluzione esatta calcolata con Mathematica (soluzione generale dell'oscillatore armonico smorzato e forzato).
6. In continuazione dell'esperienza precedente studio dell'oscillatore armonico smorzato con forza impulsiva ( $\delta$  di Dirac) con integrazione numerica con il metodo di Runge-Kutta. Confronto dei risultati con la soluzione analitica calcolata con Mathematica.
7. Continuazione delle esperienze precedenti con scrittura di una funzione di integrazione numerica che implementi il metodo di Runge-Kutta di ordine 4 con allocazione dinamica della memoria temporanea e uso di puntatore a funzione.
8. Uso della funzione di libreria ODEint per la soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie con passo variabile ed errore predeterminato. Applicazione all'oscillatore armonico smorzato soggetto ad una forza "ad onda quadra". Soluzione in Mathematica mediante sviluppo in serie discreta di Fourier e confronto con le soluzioni numeriche di Odeint. Confronto degli errori ottenuti nello sviluppo della forza e della rispettiva soluzione.
9. Derivazione simbolica dell'equazione del moto del doppio pendolo non dissipativo e relativa soluzione numerica. Analisi qualitativa dei diversi tipi di moto del sistema: periodico e caotico. Generazione di un 'animazione' della soluzione numerica con l'ausilio di Mathematica.
10. Soluzione analitica del doppio pendolo per piccole oscillazioni: modi normali. Eccitazione dei modi normali e confronto dei periodi con quelli teorici, scomposizione di una soluzione qualsiasi in una sovrapposizione di modi normali e confronto con i dati numerici.
11. Soluzione numerica del doppio pendolo non dissipativo nel caso caotico: stima degli esponenti di Lyapunov e plot di una mappa di Poincarè nel caso in cui le condizioni iniziali permettano sia una soluzione caotica che non caotica.

### Alcuni esercizi “per casa” di varia difficoltà

- Controllo dell'errore di arrotondamento dell'ultimo bit in una variabile floating point e poi
- grafico di  $\Delta x/x$  al variare di  $x$  nell'errore di arrotondamento dell'ultimo bit
- Programma in C per calcolare l' $\epsilon$  della macchina ( $1. + \text{eps} == 1.$ )
- Programma in C per il calcolo dei coefficienti binomiali con funzioni ricorsive e poi
- calcolo del numero di chiamate per i coefficienti binomiali ricorsivi nei 2 modi proposti
- Verifica, con Mathematica, dell'errore in Runge Kutta di ordine 2 e 4.
- Scrittura, con Mathematica, della soluzione generale dell'oscillatore armonico in funzione delle soluzioni (complesse coniugate)  $\lambda_p = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$  e  $\lambda_m = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$ .
- Calcolo dei coefficienti di Lyapunov nel doppio pendolo caotico diagonalizzando numericamente la matrice delle derivate del sistema.
- Scrittura in C di una funzione per l'allocazione dinamica e l'inizializzazione di una matrice dichiarata nel main come `**mat` eventualmente con indici che partono da 1 (invece che da 0).
- Alcuni possibili sistemi fisici da integrare:
  - pendolo semplice smorzato e forzato e condizioni di caos,
  - pendolo doppio con smorzamento e/o con forza esterna,
  - problema dei 3 corpi in formulazione Hamiltoniana con 4 gradi di libertà,
  - applicare Odeint ai 3 corpi e animazione dei dati interpolati con Mathematica,
  - pendolo fissato su un piccolo disco in moto circolare uniforme,
  - pendolo fissato su un carrello che scorre orizzontalmente con una molla che lo trattiene,
  - due pendoli accoppiati da una molla: caso dei battimenti.

### Testi consigliati

### Collocazione biblioteca Dipartimento di Fisica:

- Kernighan B.W. & Ritchie D.M. I - 288  
The C Programming Language  
Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ USA 1998, second edition, pp. xii 272
- Press William H., Flannery Brian P., Teukolsky Saul A. & Vetterling William T. I - 396  
Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing  
Cambridge University Press, Cambridge 1995, second edition, pp. xxvi 994
- Wolfram Stephen  
The Mathematica Book  
Cambridge, fourth edition
- Arfken George B. & Weber Hans J. I - 378  
Mathematical Methods for Physicists  
Academic Press, CA USA, c1995, 4th edition, pp. xviii 1030
- Landau Rubin H. & Páez Manuel J. I - 433  
Computational Physics Problem Solving with Computers  
John Wiley & Sons Inc., New York USA 1997, pp. xxx 520

### Sessioni ufficiali d'esame di: Metodi Numerici delle Equazioni Differenziali

19 gennaio 2010	9 giugno 2010	8 settembre 2010
16 febbraio 2010	5 luglio 2010	23 settembre 2010
19 gennaio 2011		

Tutti gli esami si svolgono alle ore 9:30 al Dipartimento di Fisica (via Valerio 2)