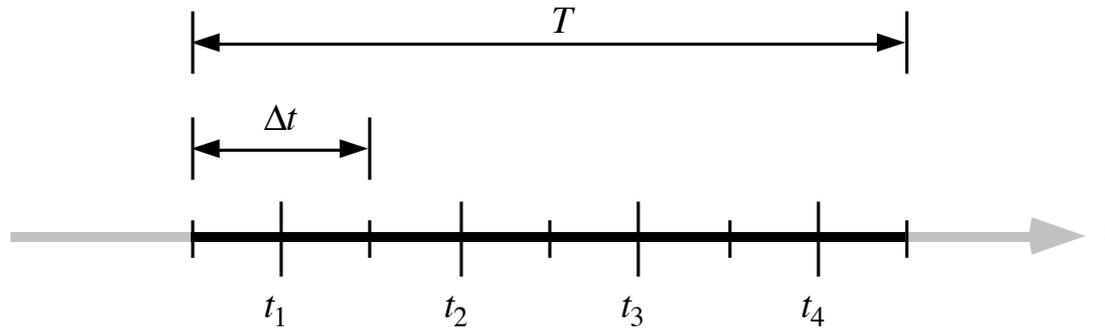


DFT & FFT and all that ...

Corso di Fondamenti Fisici di Tecnologia Moderna



La figura mostra la relazione tra tempo di campionamento e tempo totale T . I campioni vengono raccolti in un intervallo di tempo che dura Δt .

$$\Delta t = T/N \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^T f(t)e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-i\omega t_n} \Delta t$$

$$\omega_m = m\Delta\omega \text{ e } t_n = n\Delta t \quad \Rightarrow \quad F_m = F(\omega_m) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-i\omega_m t_n} \Delta t$$

$$f_n = f(t_n) \quad \Rightarrow \quad F_m \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-imn\Delta\omega\Delta t} \Delta t$$

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi imn}{N}}$$

Trasformata discreta di Fourier (DFT)

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{\frac{2\pi imn}{N}}$$

Trasformata inversa (IDFT)

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi imn}{N}} e^{\frac{2\pi inl}{N}} = N\delta_{m,l}$$

Ortogonalità

Relazioni importanti

$$\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

$$\nu_{\text{Ny}} = \frac{N}{2} \Delta\nu = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \nu_{\text{S}}$$

$$\nu_{\text{S}} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T} = 2\nu_{\text{Ny}}$$

frequenza di
Nyquist

tempo di
campionamento

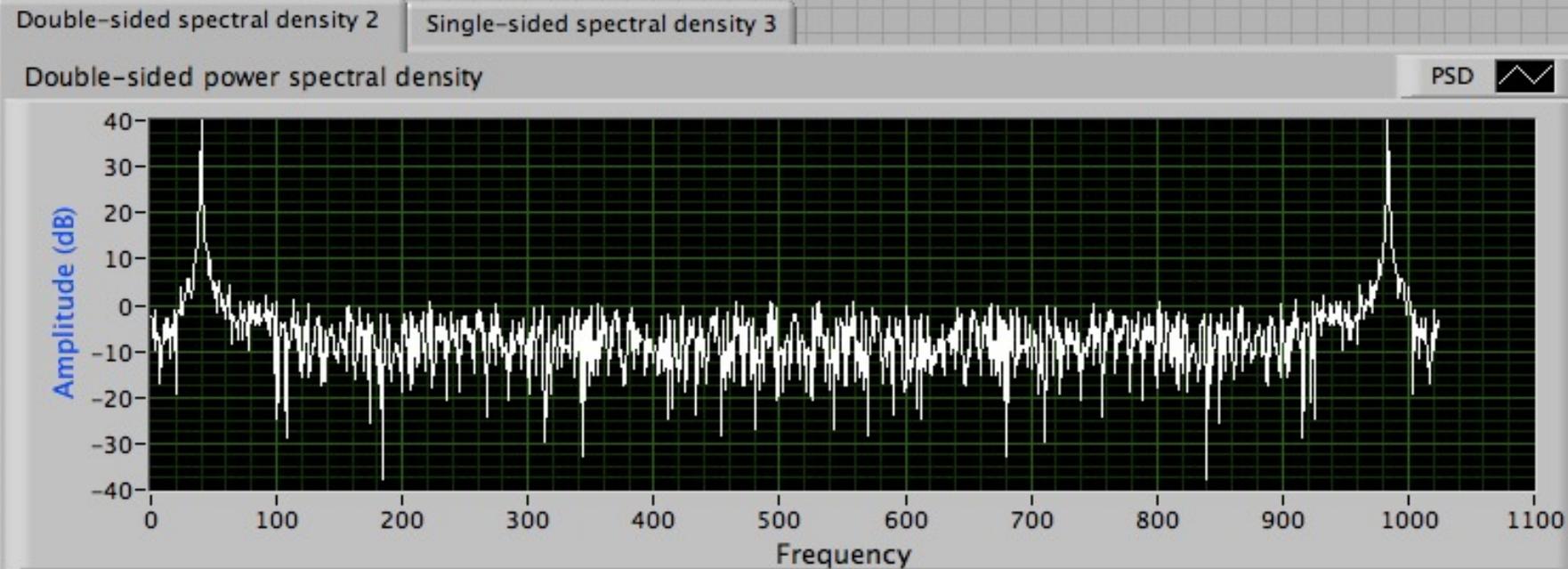
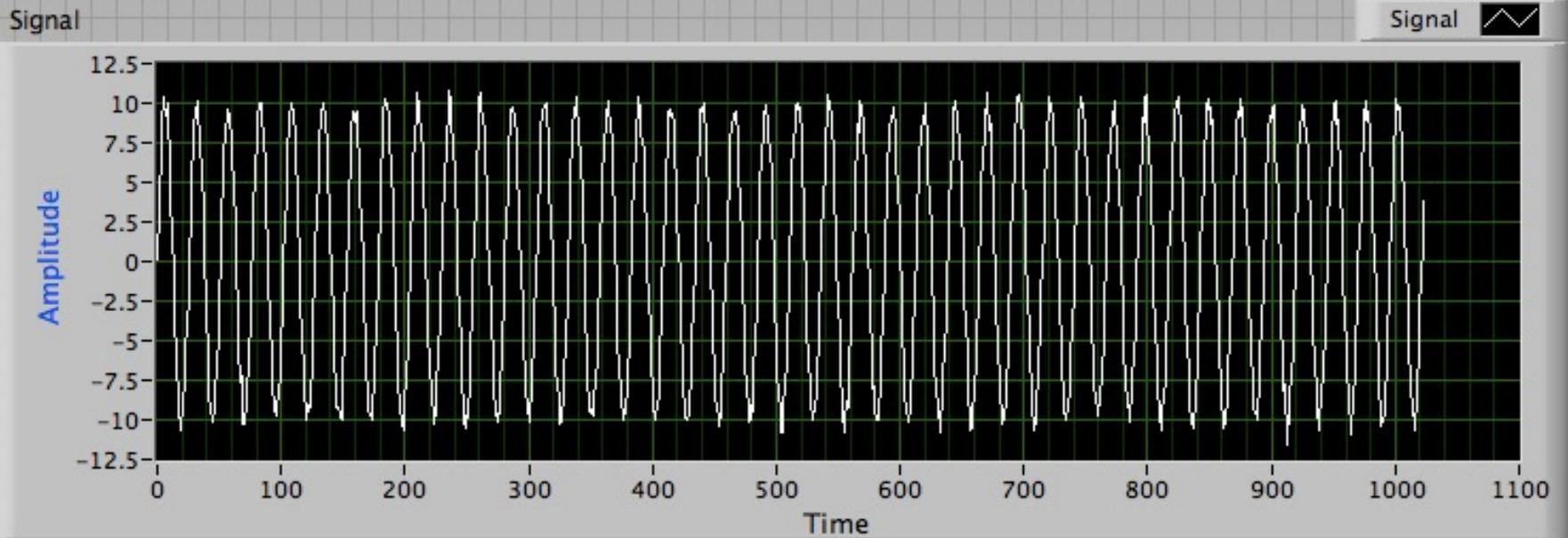
frequenza di
campionamento

Teorema di convoluzione

$$\begin{aligned} H_k &= \sum_{n=0}^{N-1} h_k e^{-2\pi i k n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f_l g_{n-l} \right) e^{-2\pi i k n / N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-2\pi i k l / N} \sum_{n=0}^{N-1} g_{n-l} e^{-2\pi i k (n-l) / N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-2\pi i k l / N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-2\pi i k n / N} \\ &= F_k G_k \end{aligned}$$

DFT di una sinusoide

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(A \cos \frac{2\pi n k_0}{N} \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\ &= \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i n k_0}{N}} + e^{-\frac{2\pi i n k_0}{N}} \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i n (k_0 - k)}{N}} + e^{-\frac{2\pi i n (k_0 + k)}{N}} \right) \\ &= \frac{A}{2} \left(N \delta_{k, k_0} + N \delta_{k, N - k_0} \right) = \frac{A}{2} N \left(\delta_{k, k_0} + \delta_{k, N - k_0} \right) \end{aligned}$$



DFT come modello fisico dei dati

$$f_n^{(th)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}}$$

questa formula può essere considerata un modello fisico dei dati in cui gli F sono i coefficienti del modello



$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|f_n - f_n^{(th)}|^2}{\sigma_n^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(f_n - f_n^{(th)})^* (f_n - f_n^{(th)})}{\sigma_n^2}$$

chi quadrato

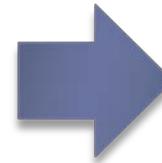
$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial F_m} &= -\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\partial f_n^{(th)}}{\partial F_m} \right)^* (f_n - f_n^{(th)}) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \left(f_n - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi i n l}{N}} \right)\end{aligned}$$



$$0 = \frac{\partial S}{\partial F_m} = -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n - \frac{1}{N} \sum_{n,l=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} F_l e^{\frac{2\pi i n l}{N}} \right\}$$

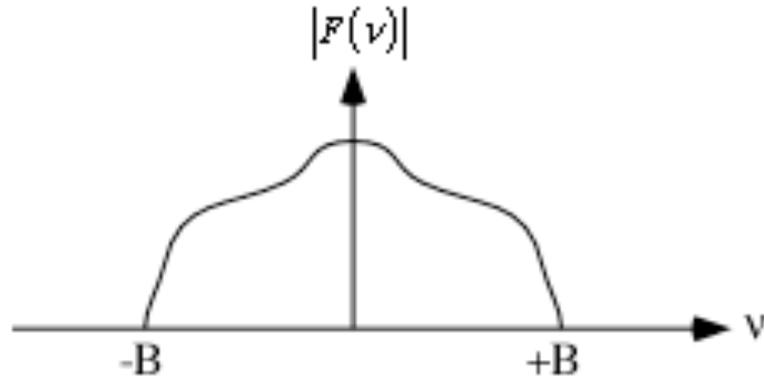
$$= -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l (N \delta_{l,m}) \right\}$$

$$= -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n - F_m \right\}$$

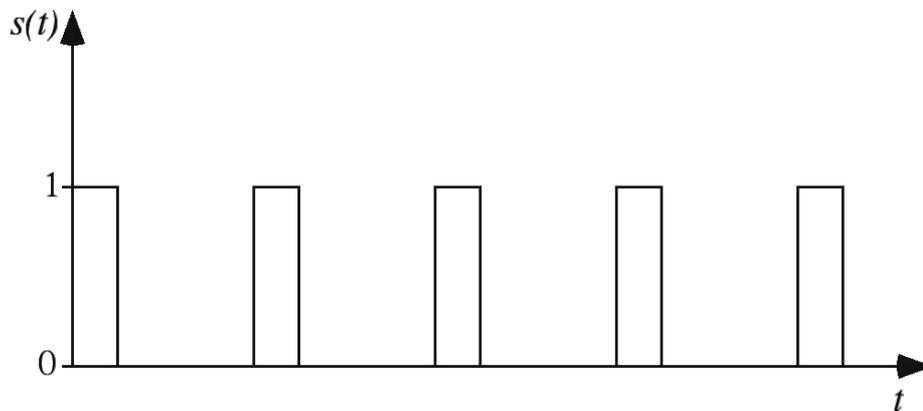
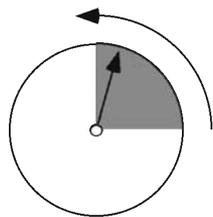


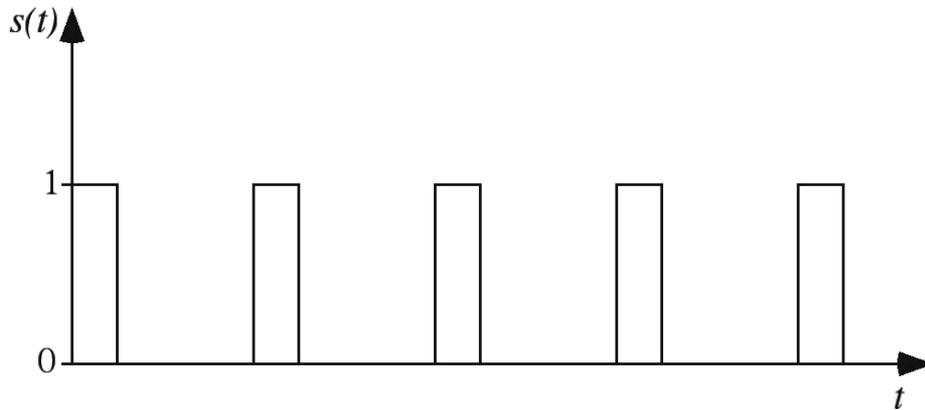
$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n$$

Teorema di Nyquist



processo di campionamento





$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{2\pi i n \nu_S t}$$

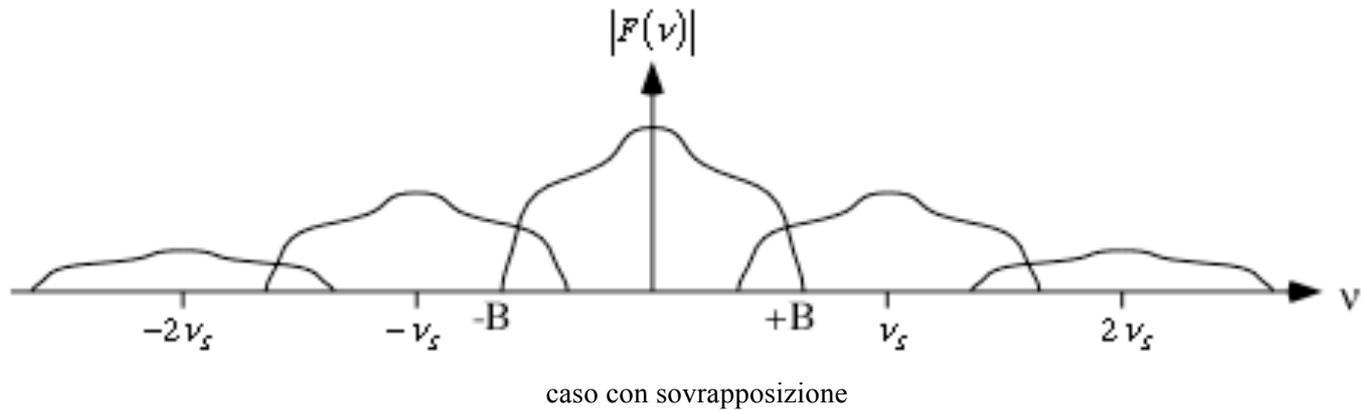
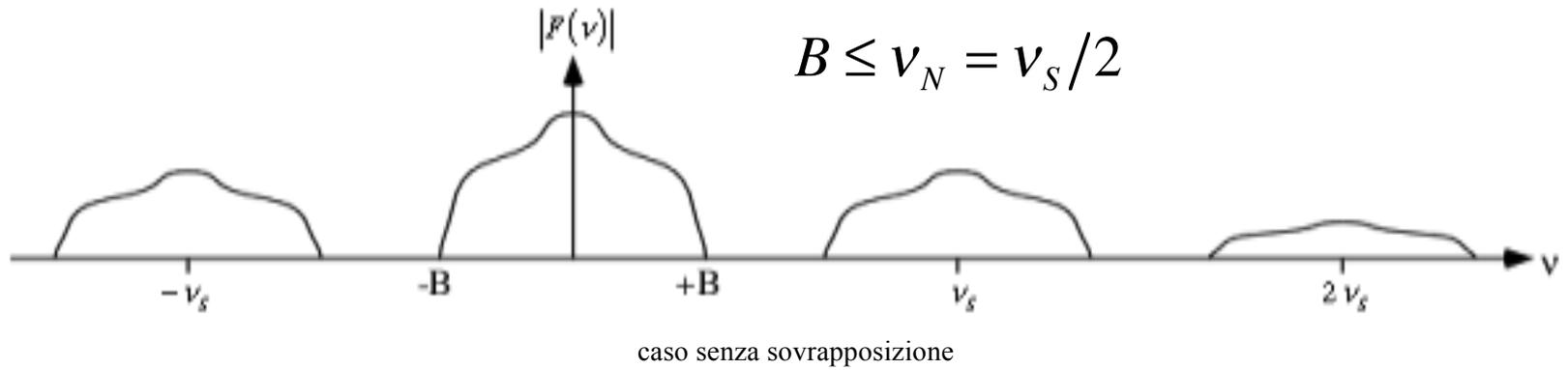
$$g(t) = f(t)s(t)$$



$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{2\pi i n \nu_S t} e^{-2\pi i \nu t} dt = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i (\nu - n \nu_S) t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \cdot F(\nu - n \nu_S)$$

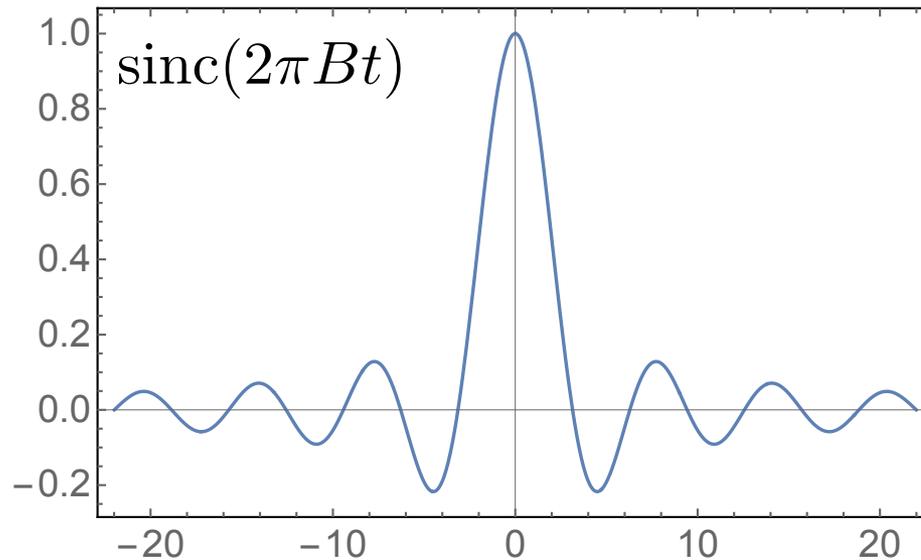
teorema del campionamento
(di Nyquist)



Formula di ricostruzione di Shannon

Consideriamo la trasformata di Fourier inversa di una trasformata perfettamente piatta, limitata in banda, di ampiezza unitaria, nel dominio della frequenza

$$\int_{-B}^{+B} e^{2\pi i\nu t} d\nu = 2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$$



Nel seguito prendiamo

$$B = \nu_{Ny}$$

Questo significa che la funzione

$$f_k(t) = f_k \operatorname{sinc}(2\pi B(t - t_k))$$

è limitata in banda $(-B, B)$ e ha valore f_k in t_k , e 0 per $t_n \neq t_k$

Perciò la funzione

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k \operatorname{sinc}(2\pi B(t - t_k))$$

1. È continua
2. Ha gli stessi campioni della funzione campionata originariamente
3. È limitata in banda come la funzione originale
4. Perciò ha la stessa trasformata di Fourier della funzione originale
5. Perciò coincide con la funzione originale

Dalla DFT alla FFT

Quando si calcola la DFT, ogni somma richiede un numero di operazioni che è $O(N)$, e poiché si devono calcolare N valori della trasformata di Fourier discreta, il numero totale di operazioni è $O(N^2)$.

Questo è un numero eccessivo di operazioni, il calcolo diventa rapidamente ingestibile. Nel 1965, Cooley e Tukey inventarono l'algoritmo FFT (trasformata di Fourier veloce) che rivoluzionò il calcolo della DFT

An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series

By James W. Cooley and John W. Tukey

Se $N = 2M$

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} f_{2n} e^{-\frac{2\pi i k (2n)}{N}} + \sum_{n=0}^{M-1} f_{2n+1} e^{-\frac{2\pi i k (2n+1)}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} f_{2n} e^{-\frac{2\pi i k n}{M}} + \left(e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \right)^k \sum_{n=0}^{M-1} f_{2n+1} e^{-\frac{2\pi i k n}{M}} \end{aligned}$$

trasformata dei campioni
con indice pari

trasformata dei campioni
con indice dispari

$$W = e^{-\frac{2\pi i k}{N}}$$

Lemma di Danielson-Lanczos

$$F_k = F_k^{(e)} + W^k F_k^{(o)}$$

trasformata originale
(periodicità N)

trasformata dei campioni
con indice pari (periodicità N/2)

trasformata dei campioni con indice
dispari (periodicità N/2)

Se N è una potenza di 2 si può applicare ripetutamente il lemma:

dopo $\log_2 N$ applicazioni del lemma si devono calcolare N sottotrasformate, ma ciascuna di queste sottotrasformate si riferisce ad un sottoinsieme che contiene un solo campione, e quindi la trasformata coincide con il campione stesso.

Per calcolare la trasformata dobbiamo allora fare le seguenti operazioni:

1. catalogare i campioni nell'ordine giusto, in modo che i campioni riordinati ci diano direttamente le trasformate dei sottoinsiemi di lunghezza l . Questo passo iniziale lo si può fare una volta per tutte con $O(N)$ operazioni.

2. partire dal livello più basso e costruire le sottotrasformate di ordine più elevato.

Ciascuna ricostruzione richiede $\log_2 N$ passi, e poiché la trasformata ha N componenti, ci vogliono in tutto $O(N \log_2 N)$ operazioni.

Esempio: DFT di un insieme di $8 = 2^3$ campioni

primo livello:

$$F_k = F_k^{(e)} + W^k F_k^{(o)}$$

$$F_k^{(e)} = \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{2\pi i k n}{4}} f_{2n} \quad \leftarrow \text{campioni in posizione pari}$$

$$F_k^{(o)} = \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{2\pi i k n}{4}} f_{2n+1} \quad \leftarrow \text{campioni in posizione dispari}$$

$$W = e^{-\frac{2\pi i}{8}}$$

secondo livello

$$F_k^{(e)} = F_k^{(ee)} + W^k F_k^{(eo)}$$

$$F_k^{(o)} = F_k^{(oe)} + W^k F_k^{(oo)} \quad W = e^{-\frac{2\pi i}{4}}$$

$$F_k^{(ee)} = f_0 e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2} \cdot k} + f_4 e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{2} \cdot k}$$

campioni in posizione pari tra i
campioni in posizione pari

$$F_k^{(eo)} = f_2 e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2} \cdot k} + f_6 e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{2} \cdot k}$$

campioni in posizione dispari
tra i campioni in posizione pari

$$F_k^{(oe)} = f_1 e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2} \cdot k} + f_5 e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{2} \cdot k}$$

campioni in posizione pari tra i
campioni in posizione dispari

$$F_k^{(oo)} = f_3 e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2} \cdot k} + f_7 e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{2} \cdot k}$$

campioni in posizione dispari tra i
campioni in posizione dispari

terzo livello

$$F_k^{(ee)} = F_k^{(eee)} + W^k F_k^{(eeo)}$$

$$F_k^{(eee)} = f_0$$

$$F_k^{(eo)} = F_k^{(eoe)} + W^k F_k^{(eoo)}$$

$$F_k^{(eeo)} = f_4$$

$$F_k^{(eoe)} = f_2$$

$$F_k^{(oe)} = F_k^{(oeo)} + W^k F_k^{(oeo)}$$

$$F_k^{(eoo)} = f_6$$

$$F_k^{(oo)} = F_k^{(ooe)} + W^k F_k^{(ooo)}$$

$$F_k^{(oeo)} = f_1$$

$$F_k^{(oeo)} = f_5$$

$$W = e^{-\frac{2\pi i}{2}} = -1$$

$$F_k^{(ooe)} = f_3$$

$$F_k^{(ooo)} = f_7$$

assegnazione dei campioni alle trasformate del livello più basso

$$\begin{array}{lll} F_k^{(eee)} = f_0 & e \rightarrow 0 & 000 \rightarrow 0; \\ F_k^{(eeo)} = f_4 & o \rightarrow 1 & 001 \rightarrow 4; \\ F_k^{(eoe)} = f_2 & & 010 \rightarrow 2; \\ F_k^{(eoo)} = f_6 & & 011 \rightarrow 6; \\ F_k^{(oee)} = f_1 & & 100 \rightarrow 1; \\ F_k^{(oeo)} = f_5 & & 101 \rightarrow 5; \\ F_k^{(ooe)} = f_3 & & 110 \rightarrow 3; \\ F_k^{(ooo)} = f_7 & & 111 \rightarrow 7; \end{array}$$

```
#include <math.h>
#define SWAP(a,b) tempr=(a);(a)=(b);(b)=tempr
```

```
void four1(float data[], unsigned long nn, int isign)
```

Replaces data[1..2*nn] by its discrete Fourier transform, if isign is input as 1; or replaces data[1..2*nn] by nn times its inverse discrete Fourier transform, if isign is input as -1. data is a complex array of length nn or, equivalently, a real array of length 2*nn. nn MUST be an integer power of 2 (this is not checked for!).

```
{
    unsigned long n,mmax,m,j,istep,i;
    double wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta;
    float tempr,tempi;
```

Double precision for the trigonometric recurrences.

```
    n=nn << 1;
    j=1;
    for (i=1;i<n;i+=2) {
        if (j > i) {
            SWAP(data[j],data[i]);
            SWAP(data[j+1],data[i+1]);
        }
        m=n >> 1;
        while (m >= 2 && j > m) {
            j -= m;
            m >>= 1;
        }
        j += m;
    }
```

This is the bit-reversal section of the routine.
Exchange the two complex numbers.

Here begins the Danielson-Lanczos section of the routine.

```
    mmax=2;
    while (n > mmax) {
        istep=mmax << 1;
        theta=isign*(6.28318530717959/mmax);
        wtemp=sin(0.5*theta);
        wpr = -2.0*wtemp*wtemp;
```

Outer loop executed $\log_2 nn$ times.

Initialize the trigonometric recurrence.

```

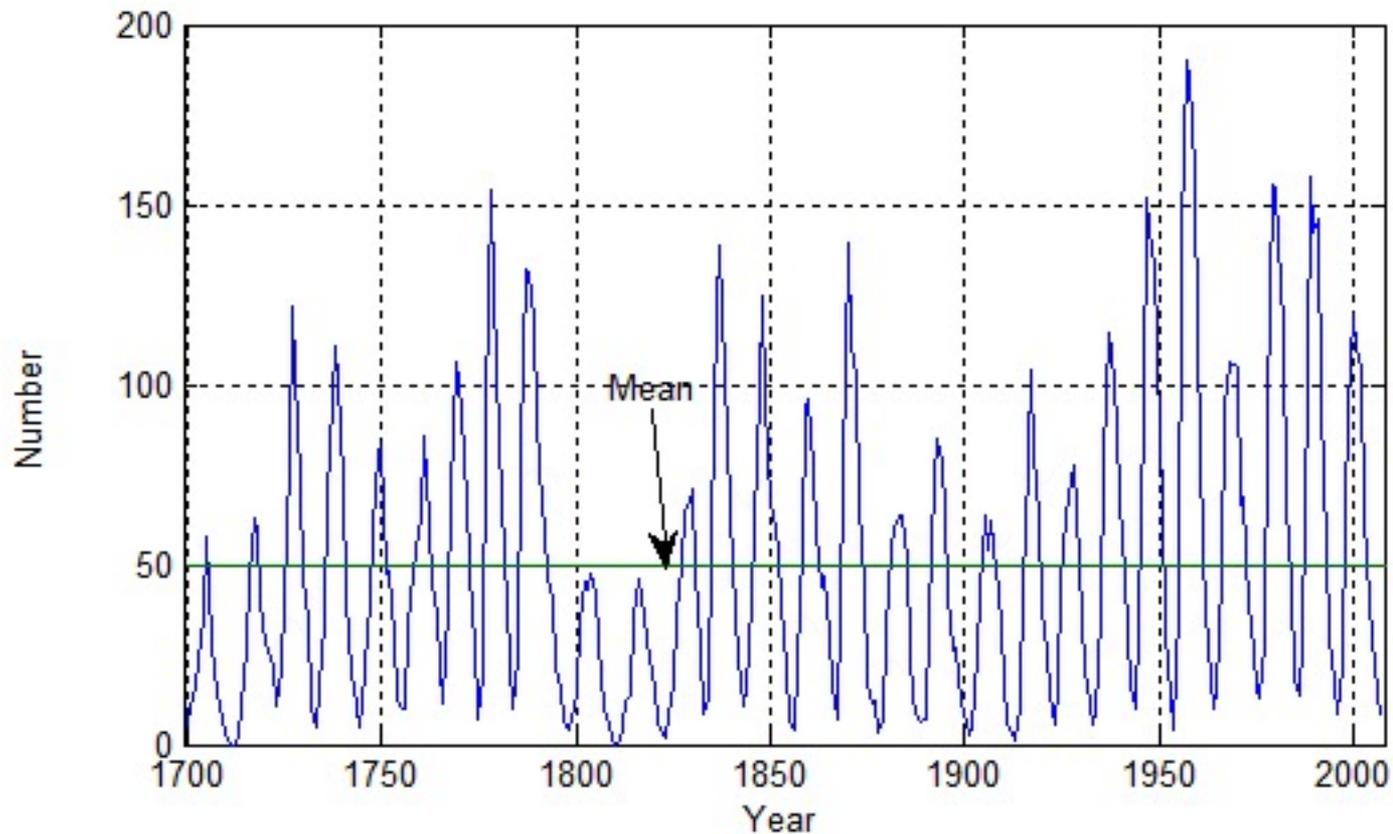
wpi=sin(theta);
wr=1.0;
wi=0.0;
for (m=1;m<mmax;m+=2) {
    for (i=m;i<=n;i+=istep) {
        j=i+mmax;
        tempr=wr*data[j]-wi*data[j+1];
        tempi=wr*data[j+1]+wi*data[j];
        data[j]=data[i]-tempr;
        data[j+1]=data[i+1]-tempi;
        data[i] += tempr;
        data[i+1] += tempi;
    }
    wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;
    wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
}
mmax=istep;
}
}

```

Here are the two nested inner loops.

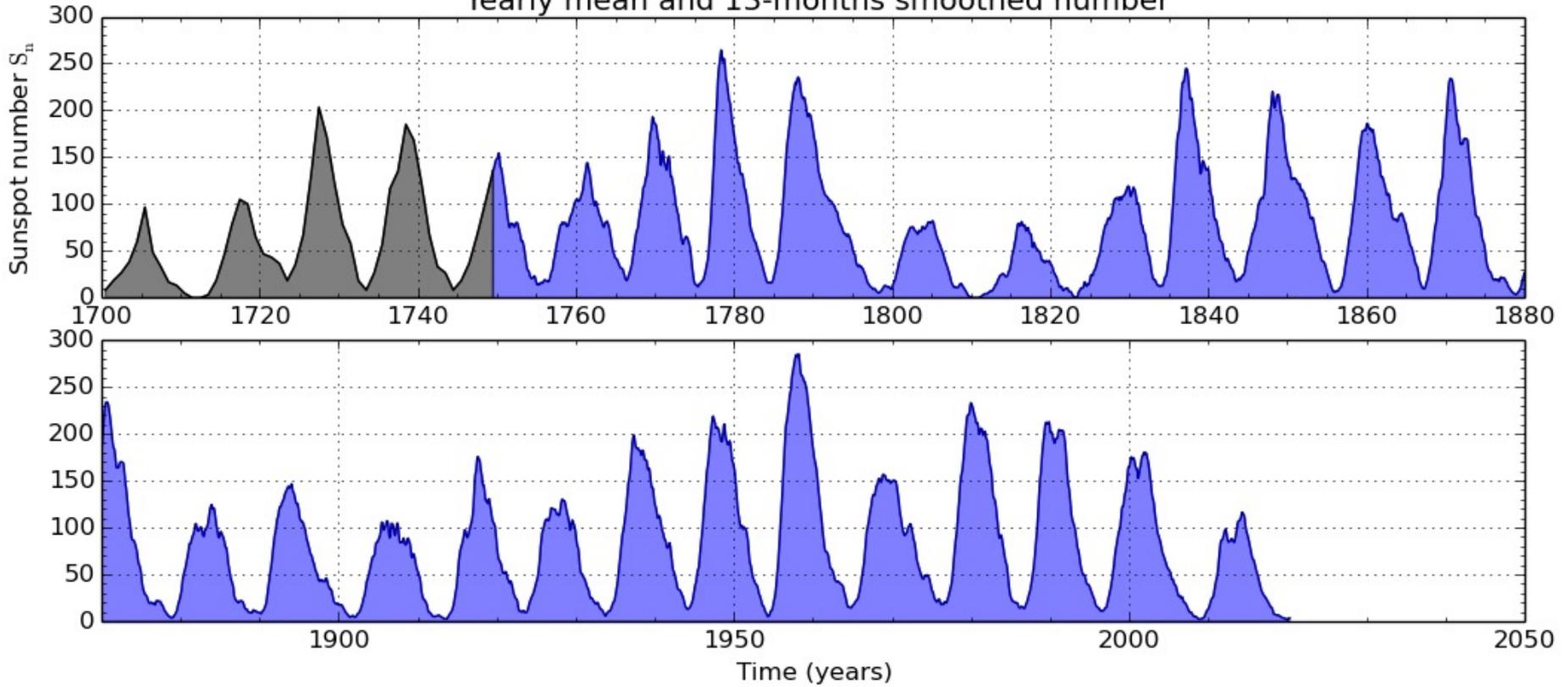
This is the Danielson-Lanczos formula:

Trigonometric recurrence.



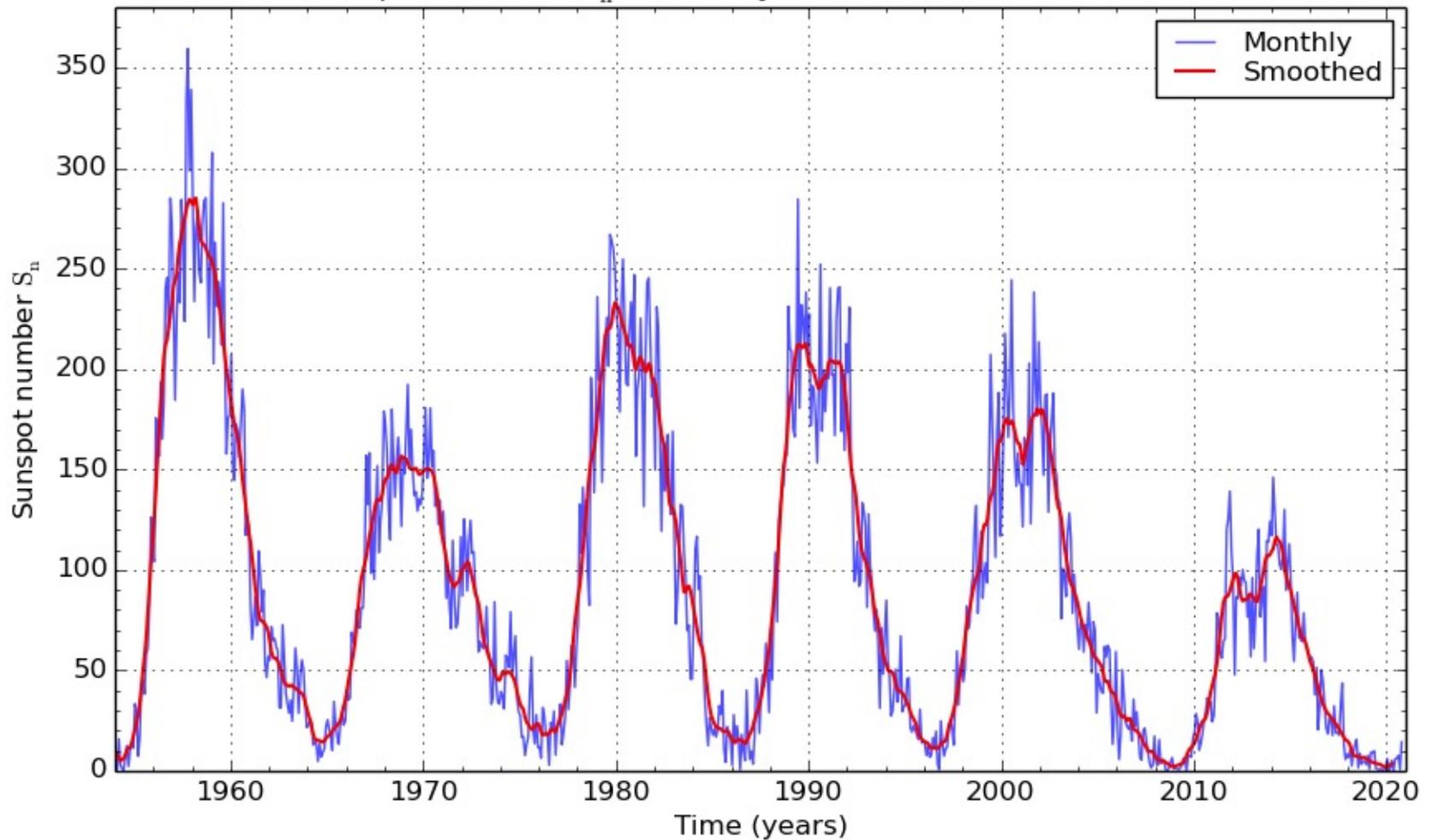
Time plot of Wolf Sunspot Number, 1700-2007. This time series is known to have an irregular cycle with period near 11 years. The long-term mean is 49.9. Data source: <http://sidc.oma.be/sunspot-data/>

International sunspot number S_n :
Yearly mean and 13-months smoothed number

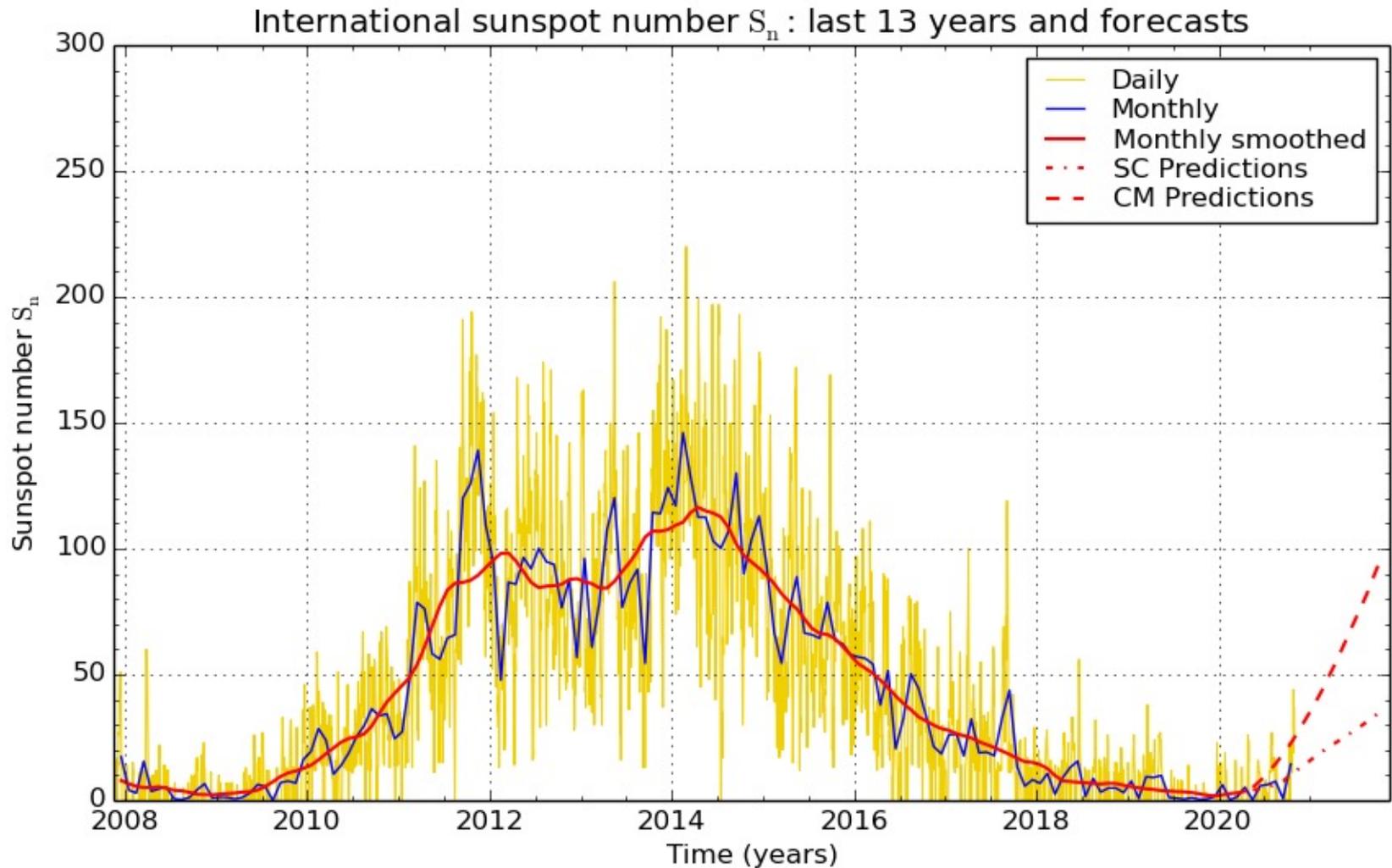


SILSO graphics (<http://sidc.be/silso>) Royal Observatory of Belgium 2020 November 1

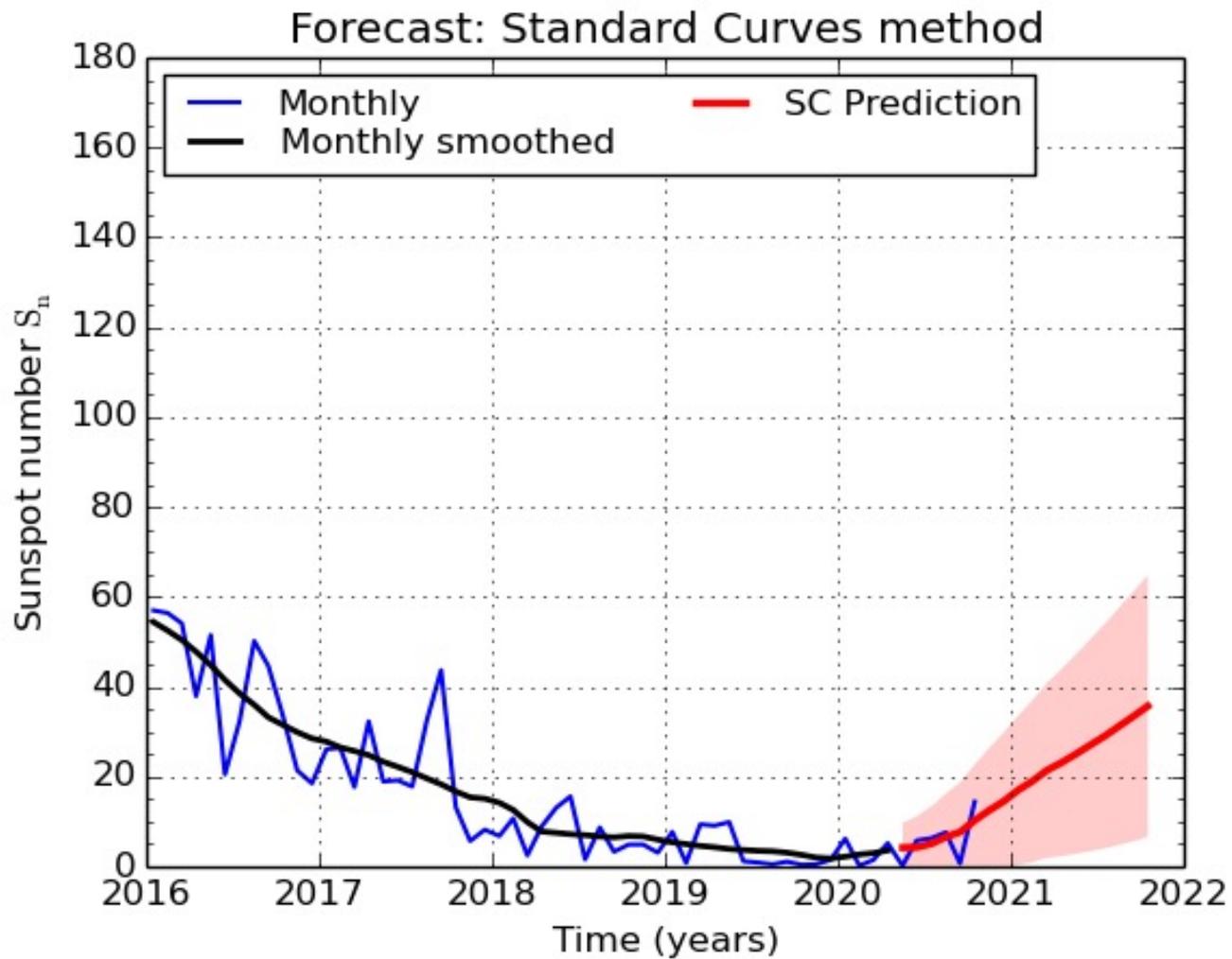
International sunspot number S_n : monthly mean and 13-month smoothed number



SILSO graphics (<http://sidc.be/silso>) Royal Observatory of Belgium 2020 November 1

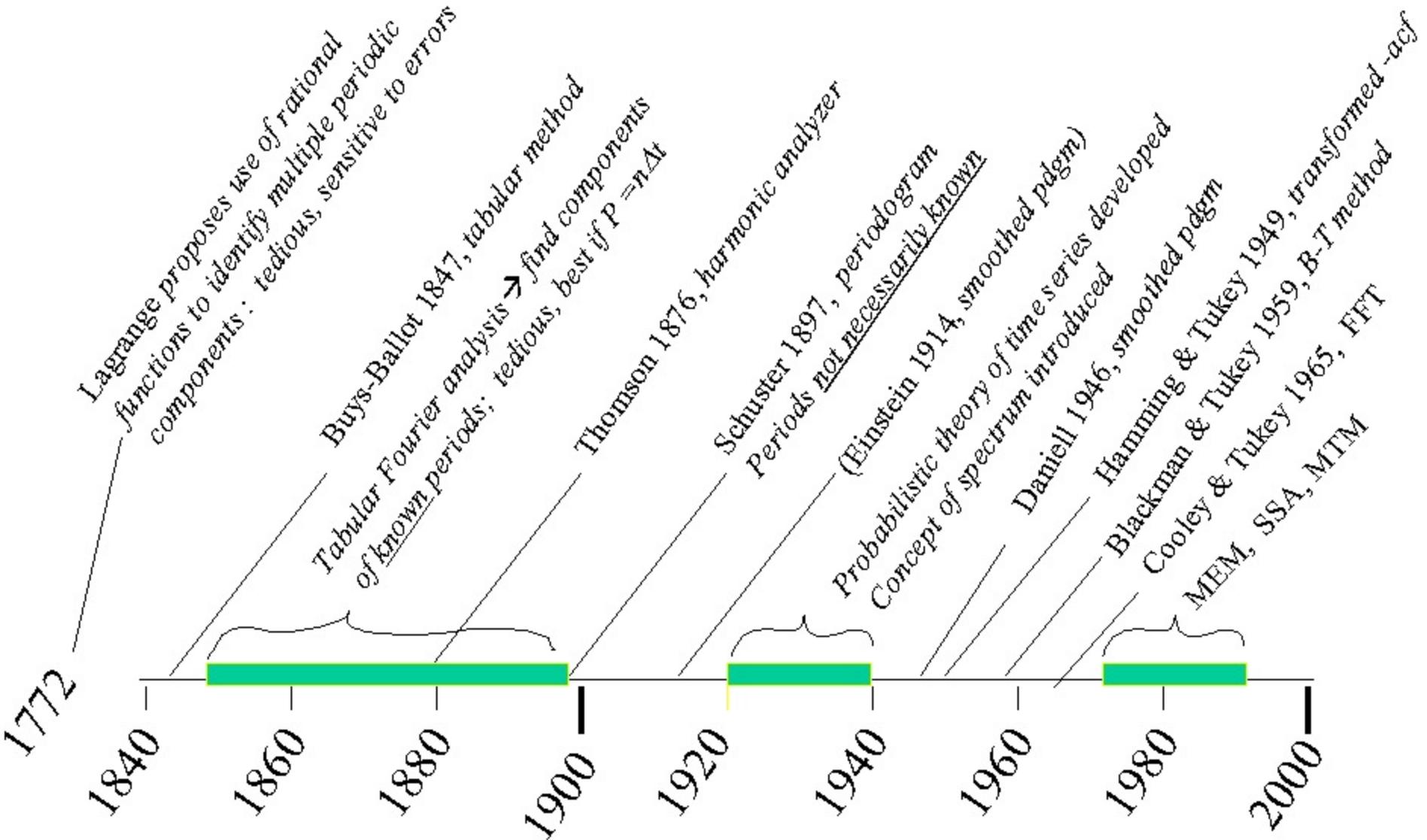


SILSO graphics (<http://sidc.be/silso>) Royal Observatory of Belgium 2020 November 1



SILSO graphics (<http://sidc.be/silso>) Royal Observatory of Belgium 2020 November 1

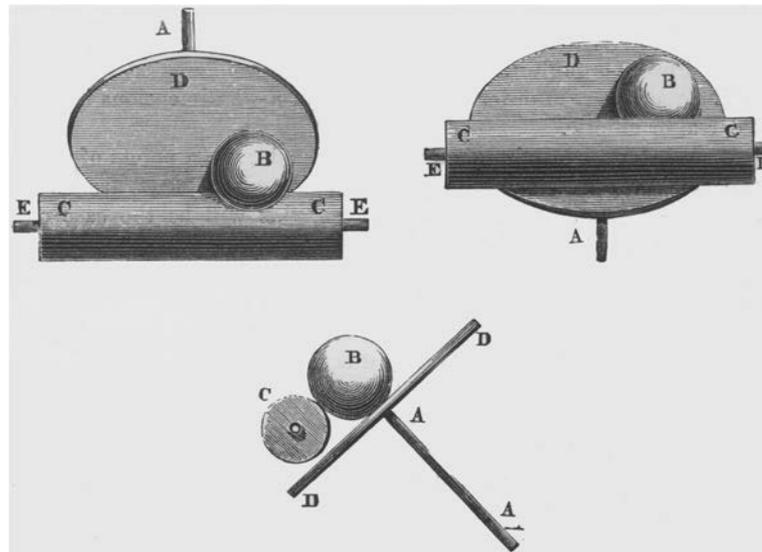
Historical Background



IV. "Harmonic Analyzer." Shown and explained by Sir WILLIAM THOMSON, F.R.S., Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow. Received May 9, 1878.

This is a realization of an instrument designed rudimentarily in the author's communication to the Royal Society ("Proceedings," February 3rd, 1876), entitled "On an Instrument for Calculating $(\int \phi(x)\psi(x)dx)$, the Integral of the Product of two given Functions."

It consists of five disk globe and cylinder integrators of the kind described in Professor James Thomson's paper "On an Integrating Machine having a new Kinematic Principle," of the same date, and represented in the annexed woodcuts.



Densità spettrale nel caso della DFT

nel caso continuo la densità spettrale

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

rappresenta la potenza media del segnale ad una certa frequenza (angolare), o anche la fluttuazione quadratica media a questa stessa frequenza

nel caso della DFT possiamo ragionare in modo analogo

fluttuazione quadratica
media del segnale
campionato

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2 \Delta t$$

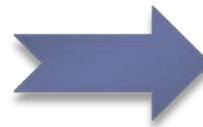
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k,m=0}^{N-1} F_k^* e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{k,m=0}^{N-1} F_k^* F_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (m-k)n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{k,m=0}^{N-1} F_k^* F_m N \delta_{m,k}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2$$



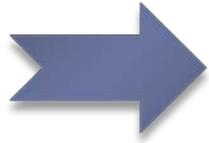
Periodogramma

$$S_k = \frac{|F_k|^2}{N^2}$$

$$T = N \Delta t$$

Simmetrie di DFT e periodogramma nel caso di segnali reali

$$F_k^* = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}} e^{-\frac{2\pi i N n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i n(N-k)}{N}} = F_{N-k}$$



$$S_k = S_{N-k}$$

inoltre (se N è pari):

$$F_0 \in \mathbb{R}$$

$$F_{N/2}^* = F_{N/2} \quad \Rightarrow \quad F_{N/2} \in \mathbb{R}$$

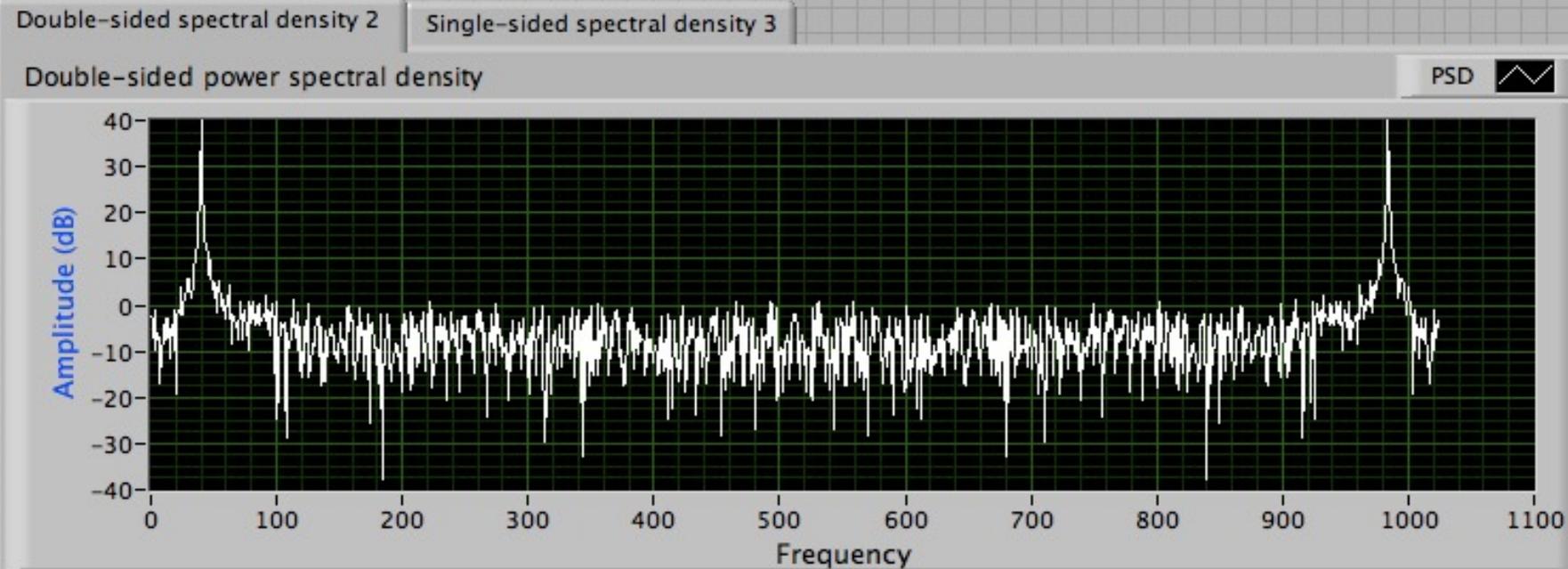
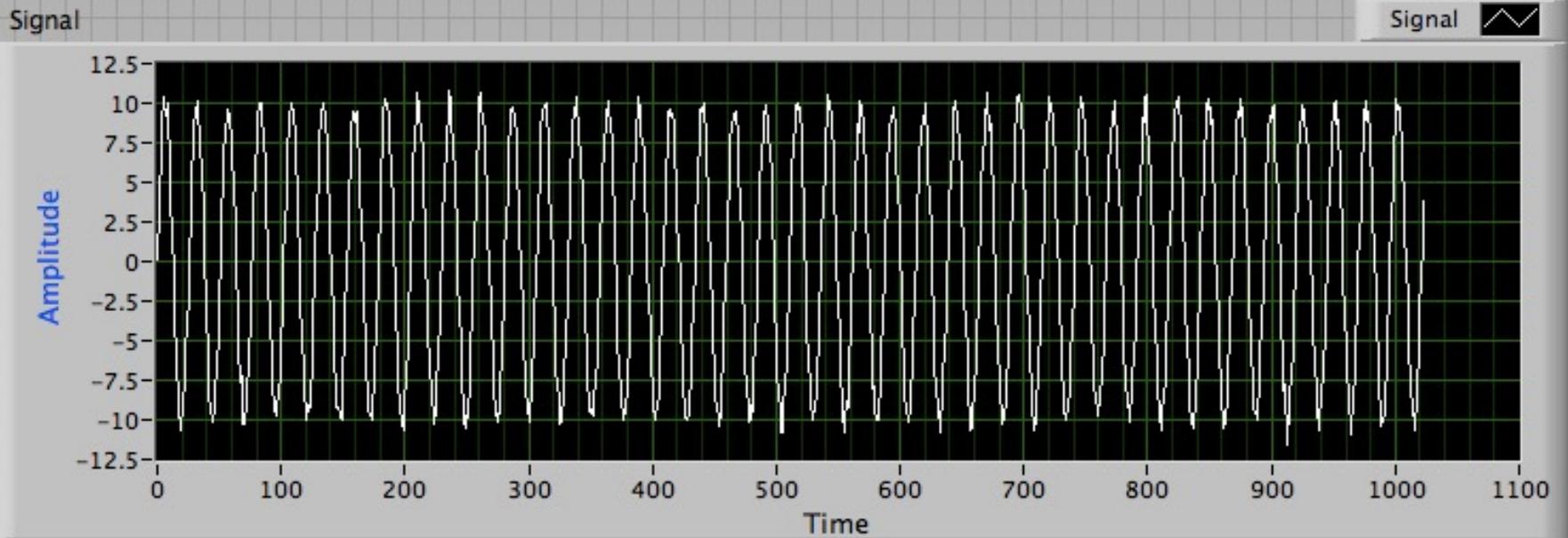
Esempio: spettro di un segnale sinusoidale

$$F_k = \frac{A}{2} N (\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0})$$

$$S_k = \frac{|F_k|^2}{N^2} = \frac{A^2}{4} (\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0})$$

Definizione di spettro unilatero

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = \frac{|F_0|^2}{N^2} \\ S_k = \frac{1}{N^2} (|F_k|^2 + |F_{N-k}|^2) \quad (k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2) \\ S_{N/2} = \frac{|F_{N/2}|^2}{N^2} \end{array} \right.$$



Teorema di Wiener-Kintchine nel caso della DFT

$$R_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* f_{n+m}$$

funzione di autocorrelazione nel caso di segnali campionati

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} R_m e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* f_{n+m} \right) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} f_n^* e^{\frac{2\pi i}{N}nk} f_{n+m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(n+m)k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* e^{\frac{2\pi i}{N}nk} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} \\ &= \frac{|F_k|^2}{N} = NS_k \end{aligned}$$

la DFT della funzione di autocorrelazione è uguale a N volte la densità spettrale

$$X_k = DFT \{x_n\}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi ink}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} x_n = IDFT \{X_k\}_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} DFT \{X_k\}_{-n} \end{aligned}$$

Implementazione “ovvia” della IDFT:

- **DFT**
- **inversione della sequenza**
- **divisione per N**

operazione di scambio

$$x_n = a_n + ib_n$$

$$ix_n^* = i(a_n - ib_n) = b_n + ia_n$$

$$\begin{aligned} ix_n^* &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (iX_k^*) \exp\left(-\frac{2\pi ink}{N}\right) = \\ &= \frac{1}{N} DFT \{iX_k^*\}_n \end{aligned}$$

Implementazione efficiente della IDFT:

- **scambio Re-Im**
- **DFT**
- **scambio Re-Im**
- **divisione per N**

*... We tried to assemble the 10 algorithms with the greatest influence on the development and practice of science and engineering in the 20th century. Following is our list (**here, the list is in chronological order; however, the articles appear in no particular order**):*

- *Metropolis Algorithm for Monte Carlo*
- *Simplex Method for Linear Programming*
- *Krylov Subspace Iteration Methods*
- *The Decompositional Approach to Matrix Computations*
- *The Fortran Optimizing Compiler*
- *QR Algorithm for Computing Eigenvalues*
- *Quicksort Algorithm for Sorting*
- ***Fast Fourier Transform***
- *Integer Relation Detection*
- *Fast Multipole Method*

(from Dongarra and Sullivan: “The Top-Ten Algorithms”, *Comp. Sci. Eng.* (2000) n. 1, p. 22)

Discrete Cosine Transform

IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTERS, JANUARY 1974

Discrete Cosine Transform

N. AHMED, T. NATARAJAN, AND K. R. RAO

Abstract—A discrete cosine transform (DCT) is defined and an algorithm to compute it using the fast Fourier transform is developed. It is shown that the discrete cosine transform can be used in the area of digital processing for the purposes of pattern recognition and Wiener filtering. Its performance is compared with that of a class of orthogonal transforms and is found to compare closely to that of the Karhunen-Loève transform, which is known to be optimal. The performances of the Karhunen-Loève and discrete cosine transforms are also found to compare closely with respect to the rate-distortion criterion.

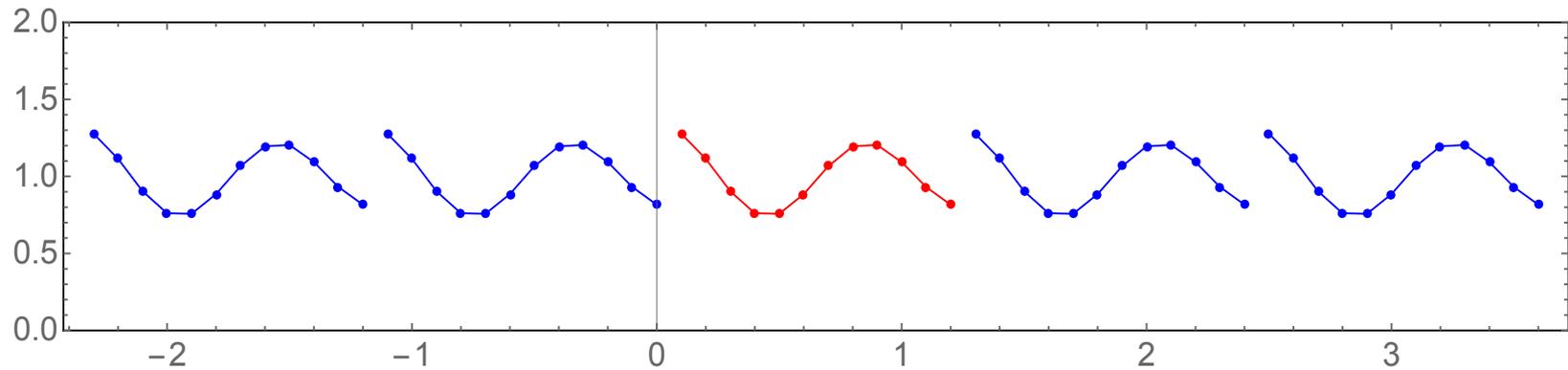
Manuscript received January 29, 1973; revised June 7, 1973.

N. Ahmed is with the Departments of Electrical Engineering and Computer Science, Kansas State University, Manhattan, Kans.

T. Natarajan is with the Department of Electrical Engineering, Kansas State University, Manhattan, Kans.

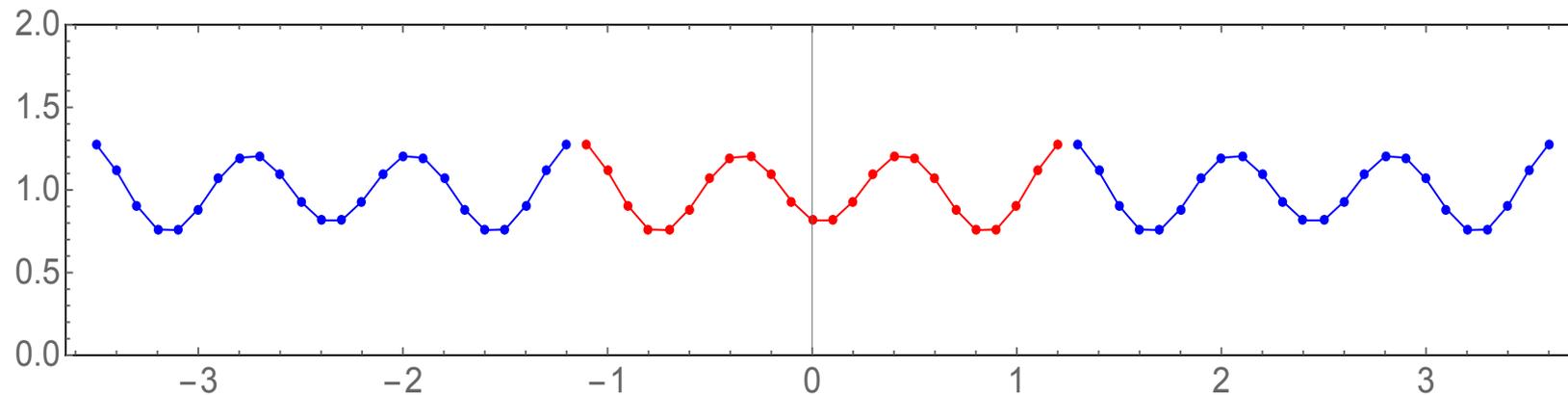
K. R. Rao is with the Department of Electrical Engineering, University of Texas at Arlington, Arlington, Tex. 76010.

Discrete Cosine Transform



Estensione periodica indotta dalla DFT

Discrete Cosine Transform



Estensione periodica che si assume nella DCT

$$\begin{aligned}
2C_k &= \sum_{n=-N}^{N-1} f_n e^{-2\pi i(n+1/2)k/2N} \\
&= \sum_{n=-N}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{2\pi(n+1/2)k}{2N}\right) + i \sum_{n=-N}^{N-1} f_n \sin\left(-\frac{2\pi(n+1/2)k}{2N}\right) = \sum_{n=-N}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right)
\end{aligned}$$

dove $f_n = f_{-n-1}$ se $-N \leq n < 0$



$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{2\pi(n+1/2)k}{2N}\right) &= \sum_{n=-N}^{-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) + \sum_0^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) \\
&= \sum_{n=-N}^{-1} f_{-n-1} \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) + \sum_0^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) \\
&= \sum_1^N f_{n+1} \cos\left(\frac{\pi(n-1/2)k}{N}\right) + \sum_0^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) \\
&= \sum_0^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) + \sum_0^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) \\
&= 2 \sum_0^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right)
\end{aligned}$$

Discrete Cosine Transform

$$C_k = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N-1} f_n e^{-2\pi i(n+1/2)k/2N} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right)$$

$$C_0 = \sum_{n=0}^{N-1} f_n$$

$$C_{-k} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(-\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{N}\right) = C_k$$

$$C_N = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cos[\pi(n+1/2)] = 0$$

Inverse Discrete Cosine Transform

$$2C_k = \sum_{n=-N}^{N-1} f_n e^{-2\pi i(n+1/2)k/2N} = e^{-\pi i k/2N} F_k^{(2N)} \quad \Rightarrow \quad F_k^{(2N)} = 2e^{\pi i k/2N} C_k$$

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} F_k^{(2N)} e^{2\pi i k n/2N} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} F_k^{(2N)} e^{2\pi i k n/2N} = \frac{2}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} C_k e^{\pi i k/2N} e^{2\pi i k n/2N} \\ &= \frac{2}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2\pi i k(n+1/2)/2N} + \sum_{k=-N}^{-1} C_k e^{2\pi i k(n+1/2)/2N} \right] \\ &= \frac{2}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2\pi i k(n+1/2)/2N} + \sum_{k=1}^{N-1} C_k e^{-2\pi i k(n+1/2)/2N} \right] \\ &= \frac{2}{N} \left[C_0 + \sum_{k=1}^{N-1} C_k \left(e^{2\pi i k(n+1/2)/2N} + e^{-2\pi i k(n+1/2)/2N} \right) \right] \\ &= \frac{4}{N} \left[\frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^{N-1} C_k \cos \left(\frac{\pi}{N} (n+1/2)k \right) \right] \end{aligned}$$

Compressione JPEG

La compressione di immagini JPEG utilizza l'algoritmo DCT. I passi essenziali sono

1. Suddivisione dell'immagine in blocchi di 8 x 8 pixel
2. Trasformazione di ciascun blocco con una DCT di tipo II bidimensionale

$$C_{\ell m} = \sum_{j,k=0}^{N-1} I_{jk} \cos \left[\frac{\pi}{8} (2j+1) \ell \right] \cos \left[\frac{\pi}{8} (2k+1) m \right]$$

3. Ciascuna componente della DCT viene divisa per un coefficiente che corrisponde alla capacità dell'occhio di distinguere le variazioni di luminosità alle diverse frequenze spaziali: tipicamente il coefficiente è piccolo alle basse frequenze e grande alle alte frequenze (l'occhio non distingue bene le variazioni di intensità ad alta frequenza spaziale)

4. Le componenti spaziali pesate, vengono arrotondate. Tipicamente questa operazione di quantizzazione annulla molti valori della DCT, e quindi il blocco 8 x 8 viene in realtà codificato da un numero di valori molto inferiore a 64.

5. I valori restanti vengono quindi compressi con un algoritmo standard come il runlength encoding oppure l'Huffman coding

La decodifica dei dati viene realizzata rovesciando la sequenza di codifica:

1. Decompressione dati
2. Moltiplicazione dei valori per i coefficienti di quantizzazione
3. Trasformata coseno inversa