Filtri

Edoardo Milotti

Corso di Fondamenti Fisici di Tecnologia Moderna

A. A. 2019-20

I filtri sono dei meccanismi (analitici, numerici o fisici), solitamente lineari, che modificano lo spettro di un segnale.

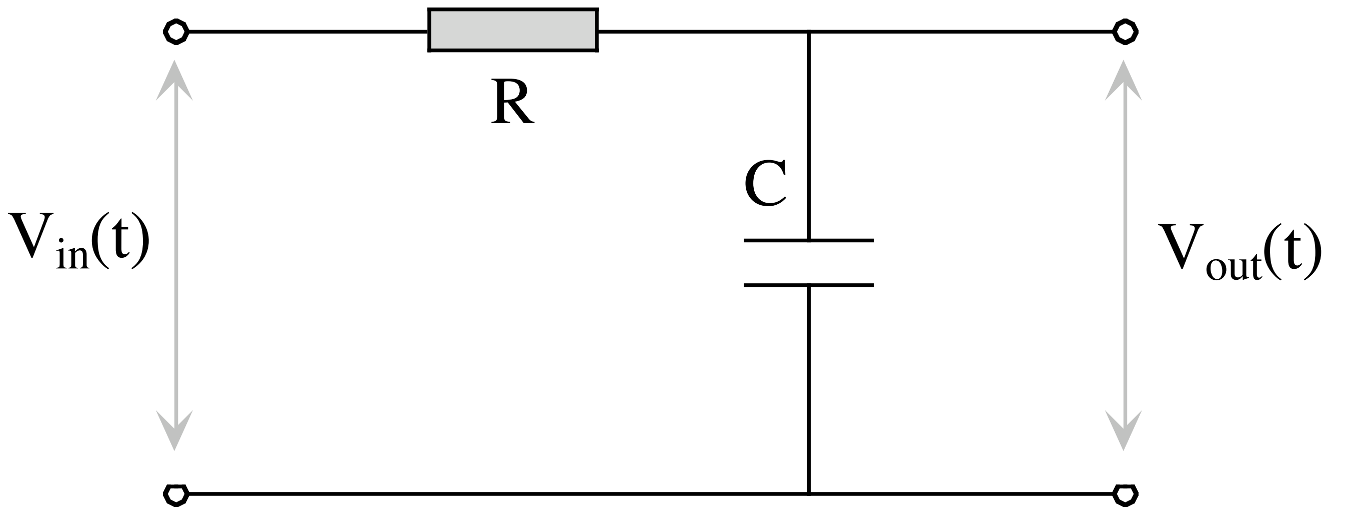
Spesso si considera l'azione dei filtri solo dal punto di vista dell'ampiezza della trasformata di un segnale, ma anche la fase viene modificata.

$$F(\omega) \;\rightarrow\; G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

$$\Downarrow$$

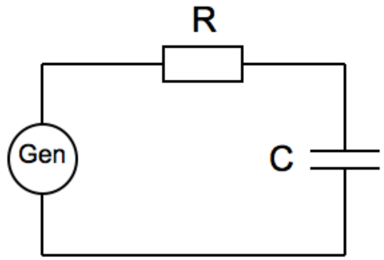
$$S_F(\omega) \;\rightarrow\; S_G(\omega) = |H(\omega)|^2 S_F(\omega)$$

Il circuito RC come filtro passa-basso



Sono possibili due tipi di analisi:

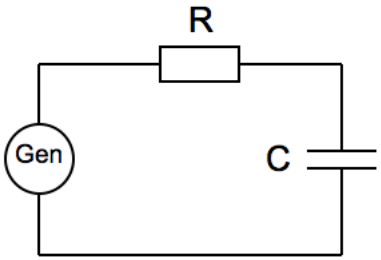
- nel dominio della frequenza
- nel dominio del tempo



Analisi nel dominio della frequenza

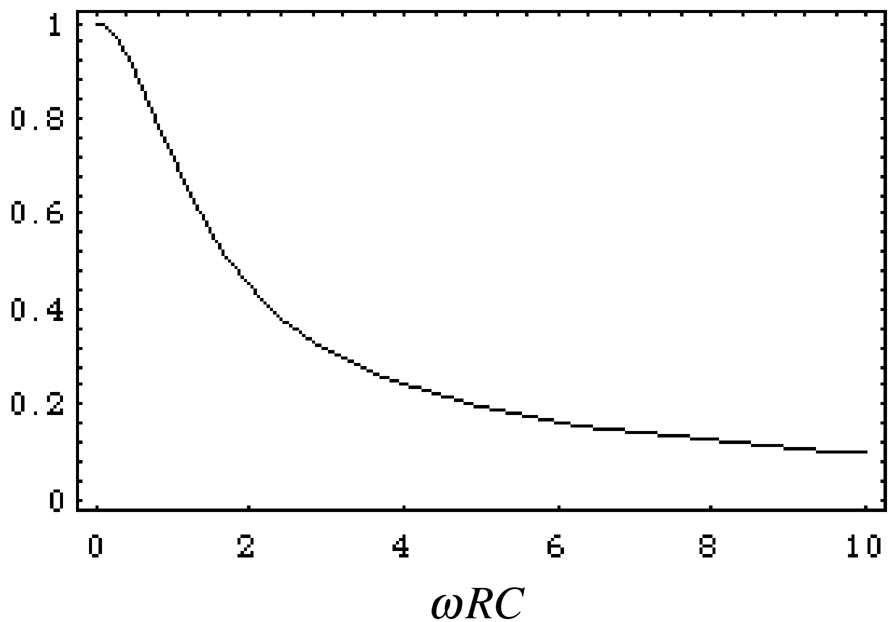
1. Anzitutto supponiamo che la tensione fornita dal generatore sia $V(t)=\hat{V}_0 e^{i\omega t}$, allora l'impedenza totale è $Z=\left(\frac{1}{i\omega C}+R\right)$ e – dalla legge di Ohm generalizzata – la corrente che scorre nel circuito è

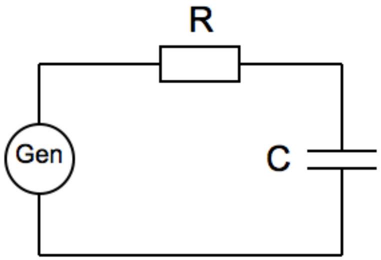
$$\hat{I}_0=\frac{\hat{V}_0}{Z}=\frac{\hat{V}_0}{\left(\frac{1}{i\omega C}+R\right)}=\frac{i\omega C\hat{V}_0}{(1+i\omega RC)}=\frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\hat{V}_0 e^{-i(\arctan\omega RC-\pi/2)} \qquad (1)$$



2. utilizzando di nuovo la legge di Ohm generalizzata e l'impedenza della capacità, che è $1/i\omega C$, la tensione complessa ai capi della capacità è

$$\hat{V}_C = \frac{\hat{I}_0}{i\omega C} = \frac{1}{(1+i\omega RC)}\hat{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\hat{V}_0 e^{-i\arctan\omega RC} \qquad (2)$$

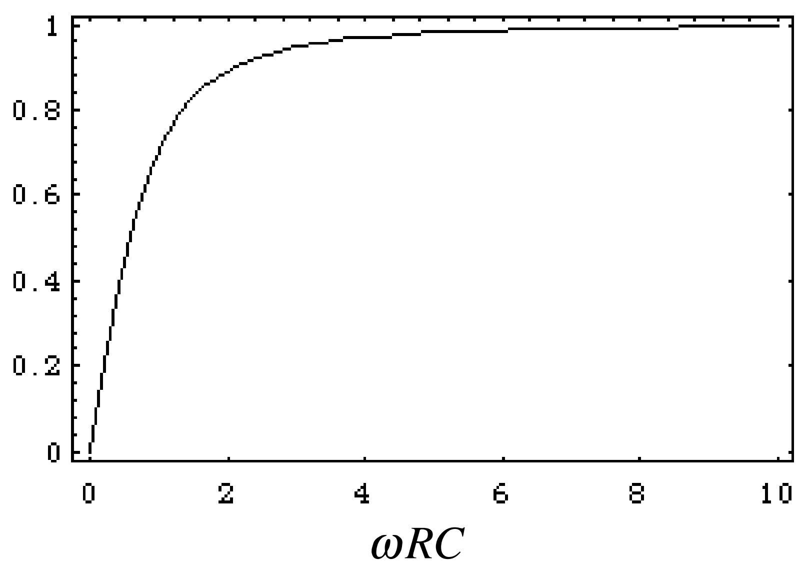


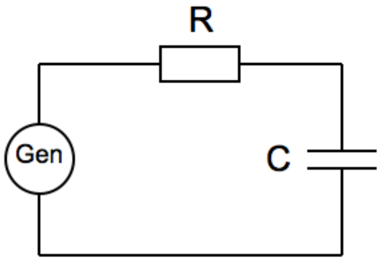


3. analogamente, la tensione ai capi della resistenza è

$$\hat{V}_R = R\hat{I}_0 = \frac{i\omega RC}{(1+i\omega RC)}\hat{V}_0 = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\hat{V}_0 e^{-i(\arctan\omega RC-\pi/2)} \tag{3}$$

e tensione ai capi della resistenza e corrente sono ovviamente in fase tra loro.



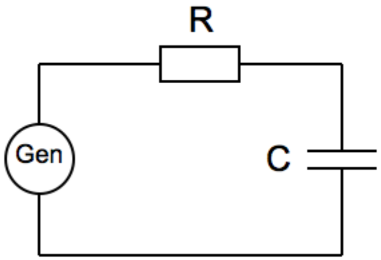


4. la potenza dissipata nella resistenza è data da

$$\langle W \rangle_R = \frac{1}{2}\left|\hat{V}_R\right|\cdot\left|\hat{I}_0\right| \qquad (4)$$

(lo sfasamento è nullo e quindi il fattore di potenza è uguale a 1). Utilizzando le formule in 3. si trova

$$\langle W \rangle_R = \frac{1}{2}\frac{\left|\hat{V}_R\right|^2}{R} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2}\left|\hat{V}_0\right|^2 \qquad (5)$$



5. la potenza assorbita dal generatore è

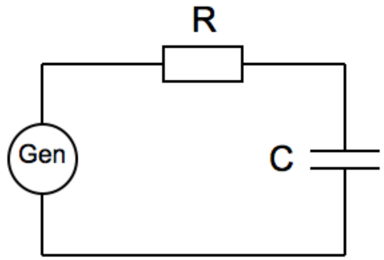
$$\langle W \rangle = \frac{1}{2}\left|\hat{V}_0\right| \cdot \left|\hat{I}_0\right| \cos\varphi \tag{6}$$

dove φ è lo sfasamento tra la corrente nel circuito e la tensione del generatore. In 1. abbiamo visto che lo sfasamento è

$$\varphi = -\arctan\omega RC + \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

quindi

$$\cos\varphi = \cos\left(-\arctan\omega RC + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\arctan\omega RC\right) \tag{8}$$



Ora, se la tangente è ωRC, allora dalla relazione che lega il coseno alla tangente ($\cos x = 1/\sqrt{1+\tan^2 x}$), si trova che il coseno è

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \tag{9}$$

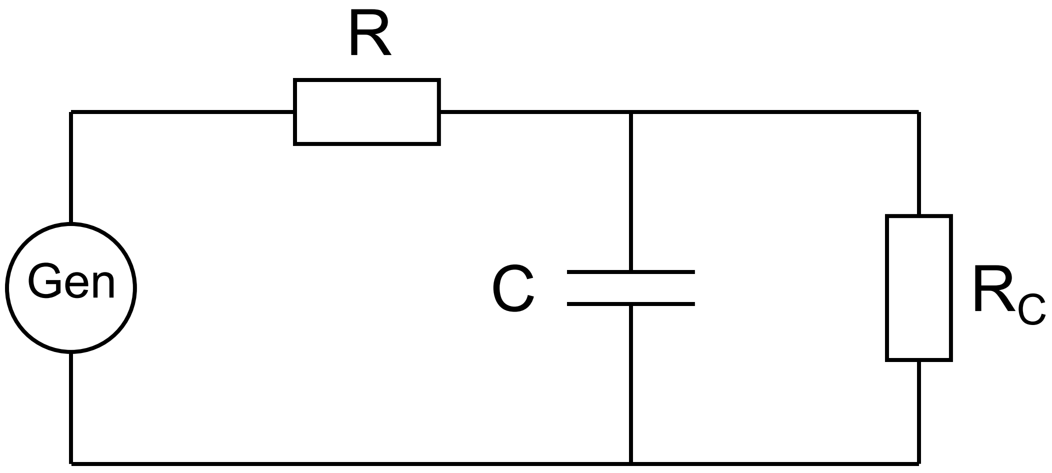
e quindi (dalla relazione $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$) il seno è $\dfrac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$.

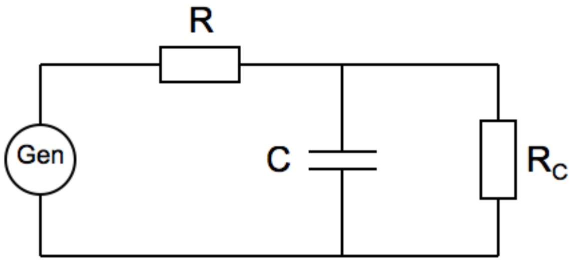
Infine

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2}\left|\hat{V}_0\right| \cdot \left|\hat{I}_0\right| \cos\varphi = \frac{1}{2}\left|\hat{V}_0\right| \cdot \frac{\omega C}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}\left|\hat{V}_0\right| \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{2R}\left|\hat{V}_0\right|^2 \cdot \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2} \tag{10}$$

la potenza estratta dal generatore è uguale a quella dissipata nella resistenza. Il risultato è consistente con la conservazione dell'energia, ma come si concilia con l'azione di filtro passa basso del circuito RC, visto che allora non viene dissipata energia nel condensatore (non viene trasferita potenza oltre il cond.)?

Il motivo è che il circuito fa da filtro solo se a valle del condensatore c’è un carico resistivo elevato, vale a dire il circuito che si considera deve avere la forma con $R_c >> R$





$$\langle W \rangle_C = \frac{1}{2R_C}\left|\hat{V}_C\right|^2 = \frac{\left|\hat{V}_0\right|^2}{2R_C}\cdot\frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2} = \langle W \rangle_0 \frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2} \tag{11}$$

quindi la "trasparenza" del filtro può essere definita per mezzo del rapporto

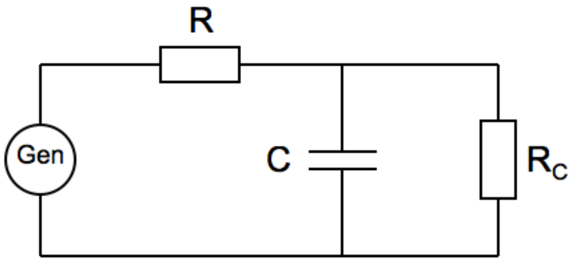
$$\frac{\langle W \rangle_C}{\langle W \rangle_0} = \frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2} \tag{12}$$

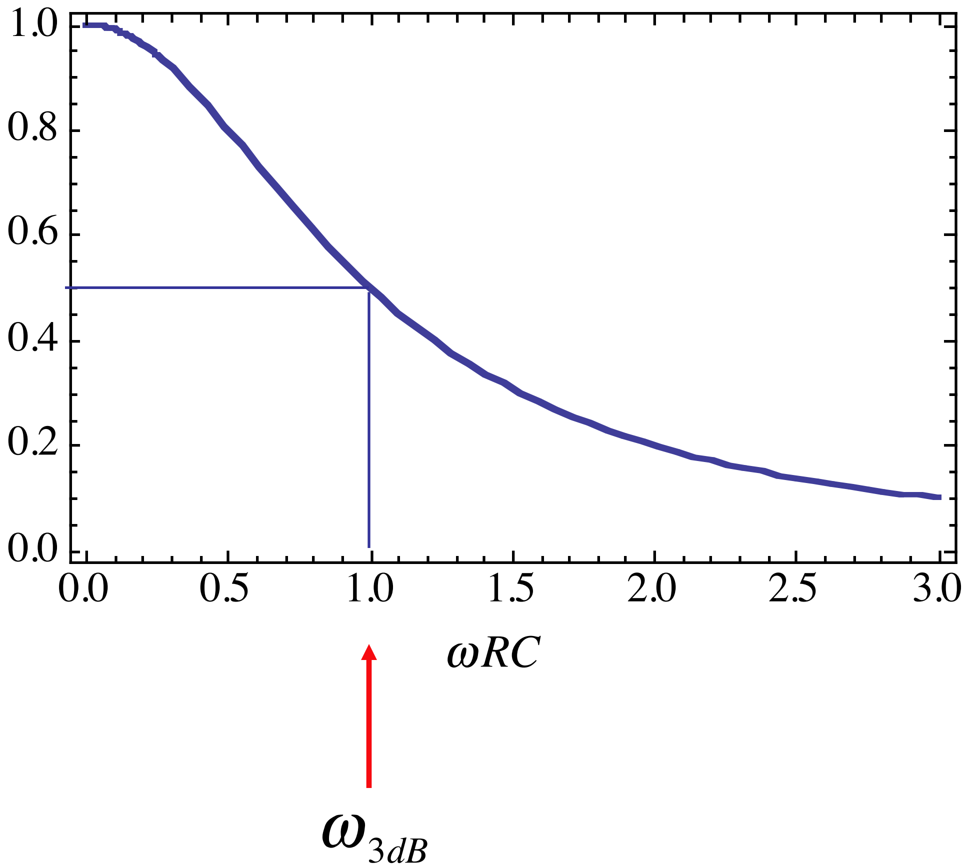
La potenza trasferita al carico vale la metà della potenza massima in corrispondenza alla frequenza ω_{3dB} che soddisfa l'equazione

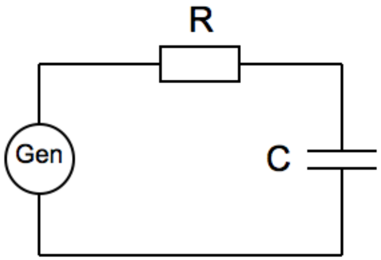
$$\frac{1}{1+\omega_{3dB}^2 R^2 C^2} = \frac{1}{2} \tag{13}$$

e quindi

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{RC} \tag{14}$$


R
Gen
C
R_C


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
ωRC
ω_{3dB}



Analisi nel dominio del tempo

Le equazioni differenziali che regolano il comportamento del circuito nel dominio del tempo sono le seguenti:

$$\begin{cases} V_{in}(t) = RI(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q(t)}{C} \\ V_{out}(t) = \dfrac{Q(t)}{C} \end{cases} \qquad (4.15)$$

quindi

$$V_{in}(t) = RC\frac{dV_{out}}{dt} + V_{out}(t) \qquad (4.16)$$

$$V_{in}(t) = RC\frac{dV_{out}}{dt} + V_{out}(t)$$

$$\frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC}V_{in}(t) = e^{\frac{t}{RC}}\frac{dV_{out}}{dt} + \frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC}V_{out}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{RC}}V_{out}(t)\right)$$

da cui si ottiene, integrando,

$$e^{\frac{t}{RC}}V_{out}(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t'}{RC}}V_{in}(t')dt'$$

$$V_{out}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t'}{RC}}V_{in}(t')dt' = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{RC}}V_{in}(t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')V_{in}(t')dt' = h * V_{in}(t)$$

La tensione di uscita è la convoluzione della tensione di ingresso e della funzione

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{RC}}\Big/RC & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

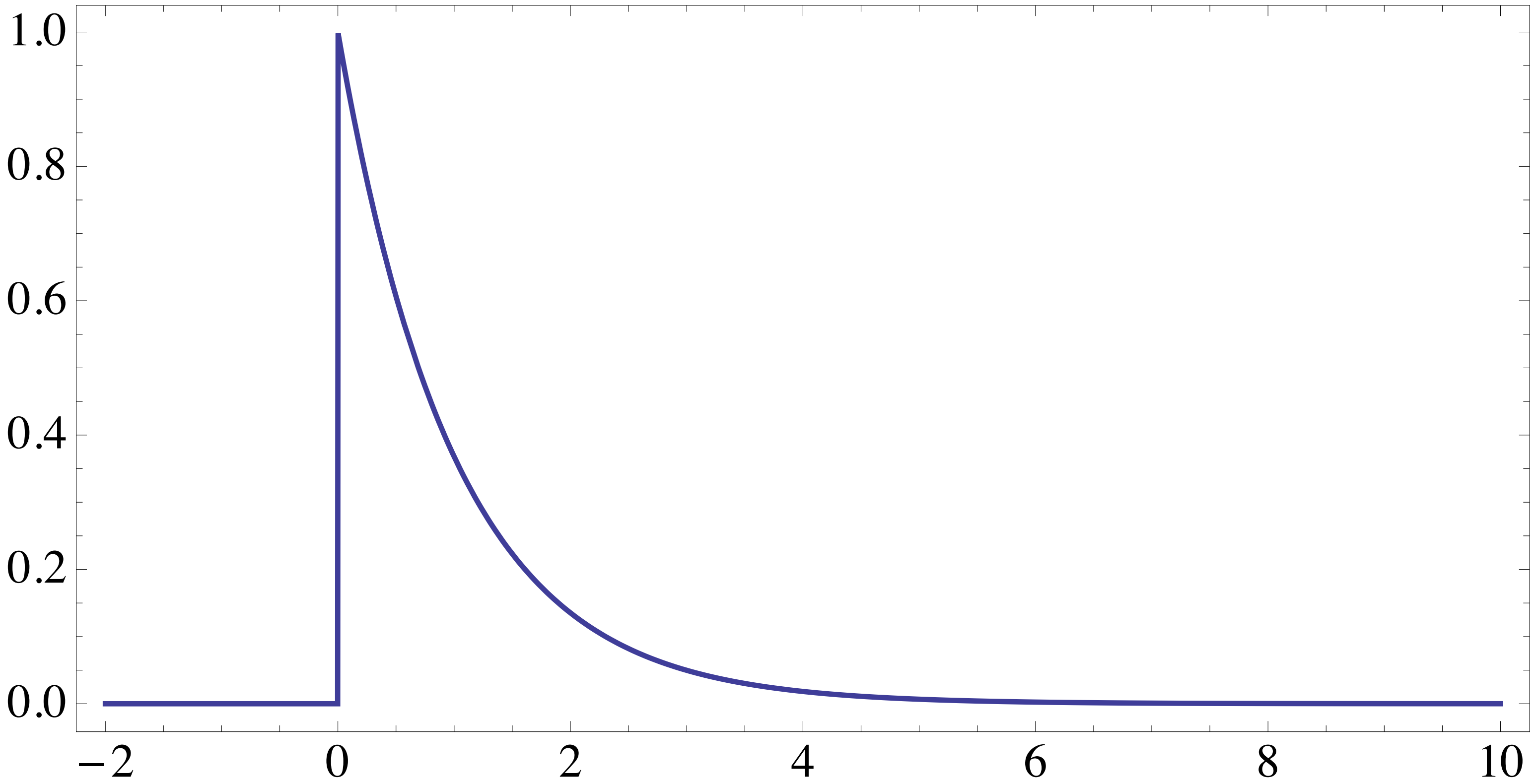
funzione di risposta impulsiva

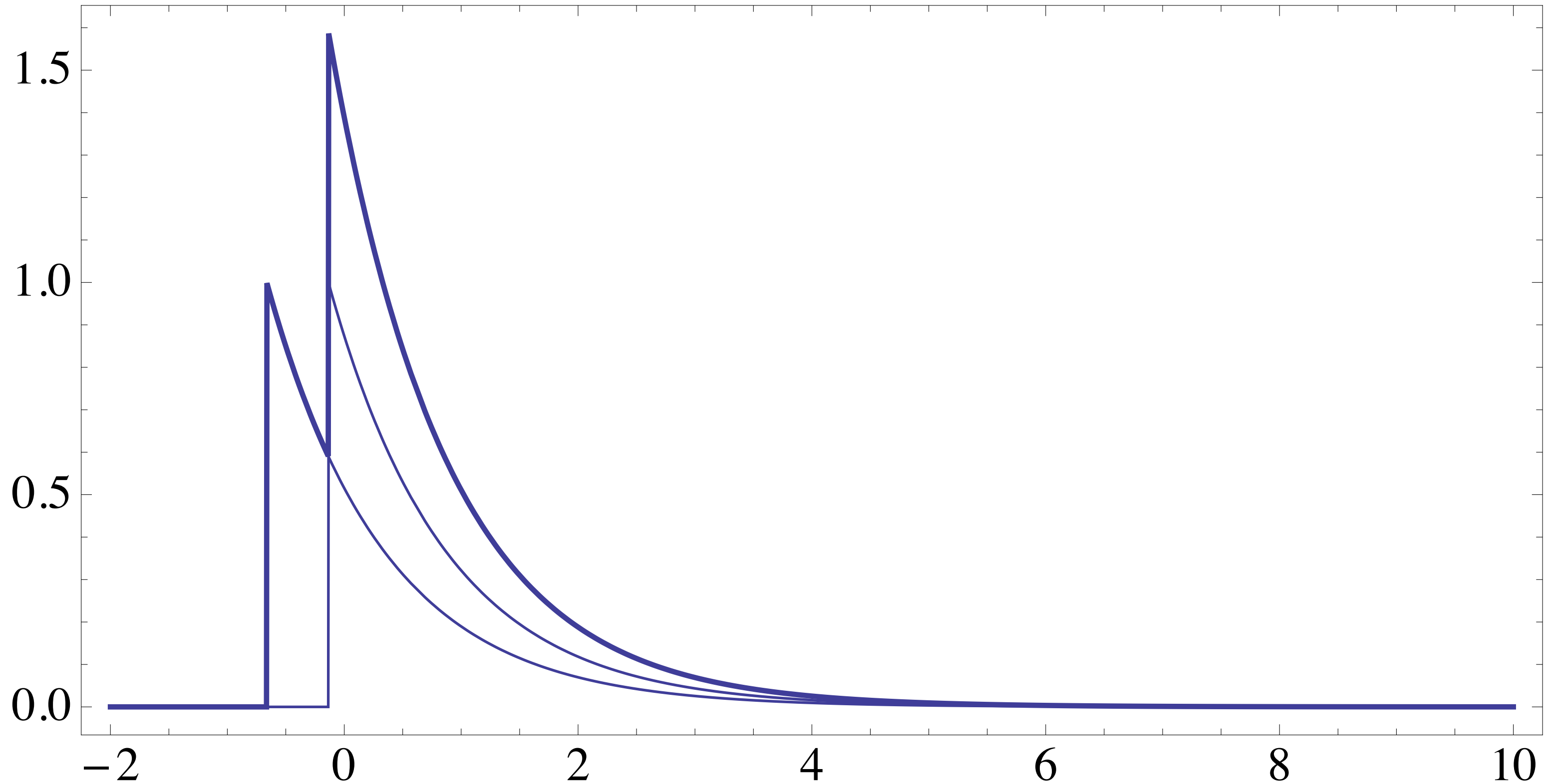
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') * V(t')dt' \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t-t_n)V_n\Delta t$$

risposta del filtro nel tempo: una convoluzione

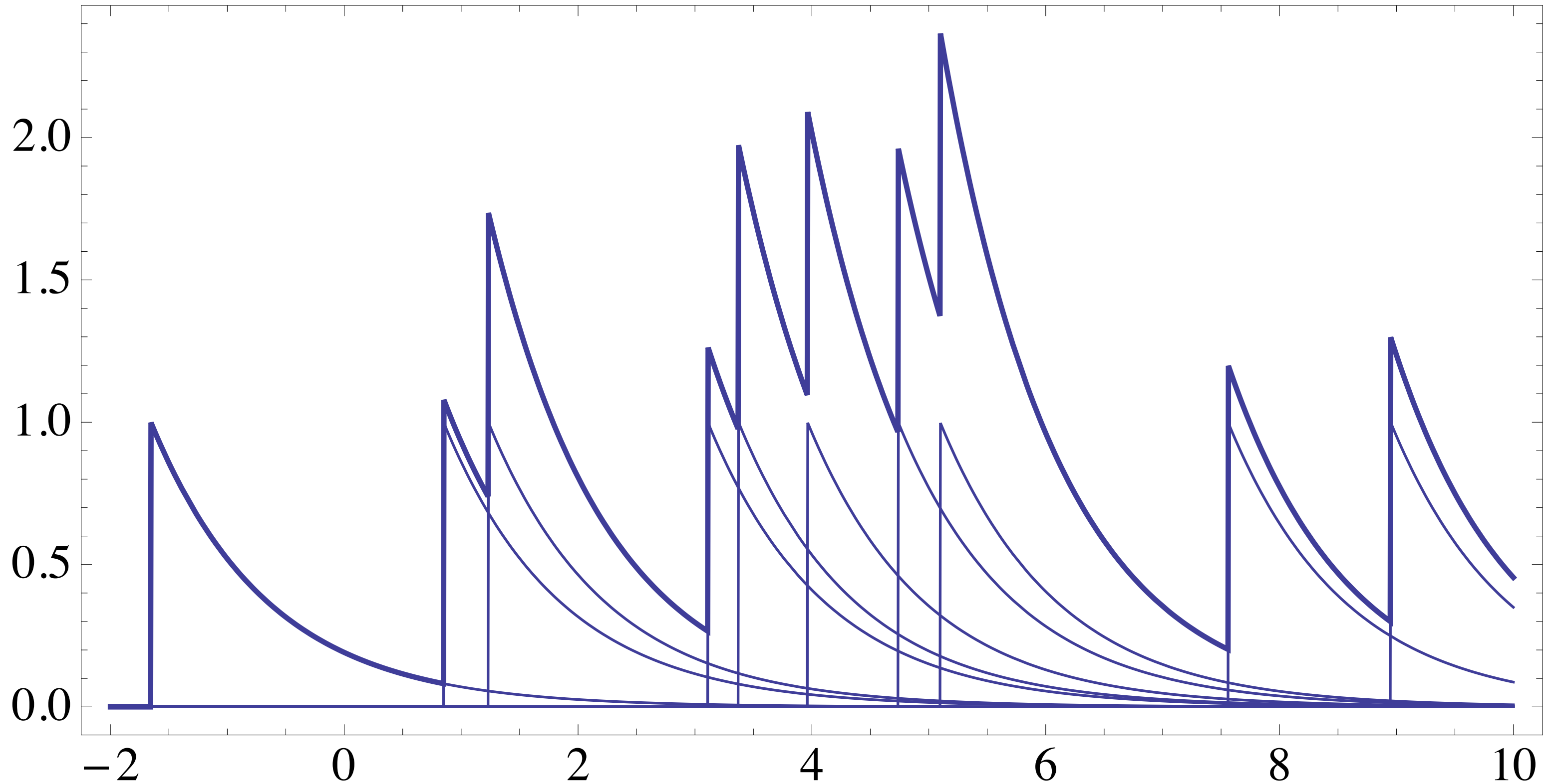
approssimabile per mezzo di una somma che contiene la funzione di risposta impulsiva e il numero di impulsi unitari nell'intervallo di tempo

Risposta impulsiva del filtro RC

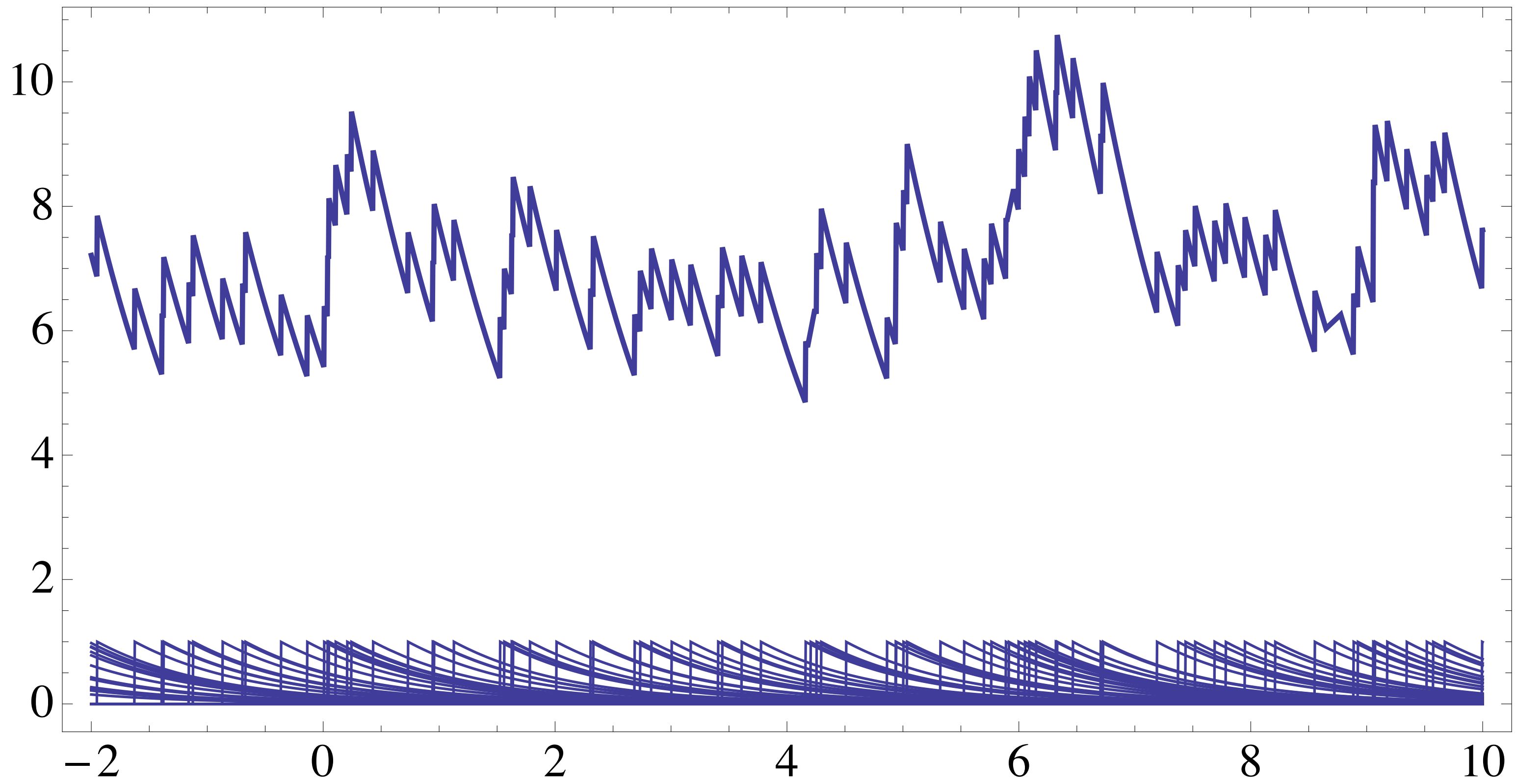




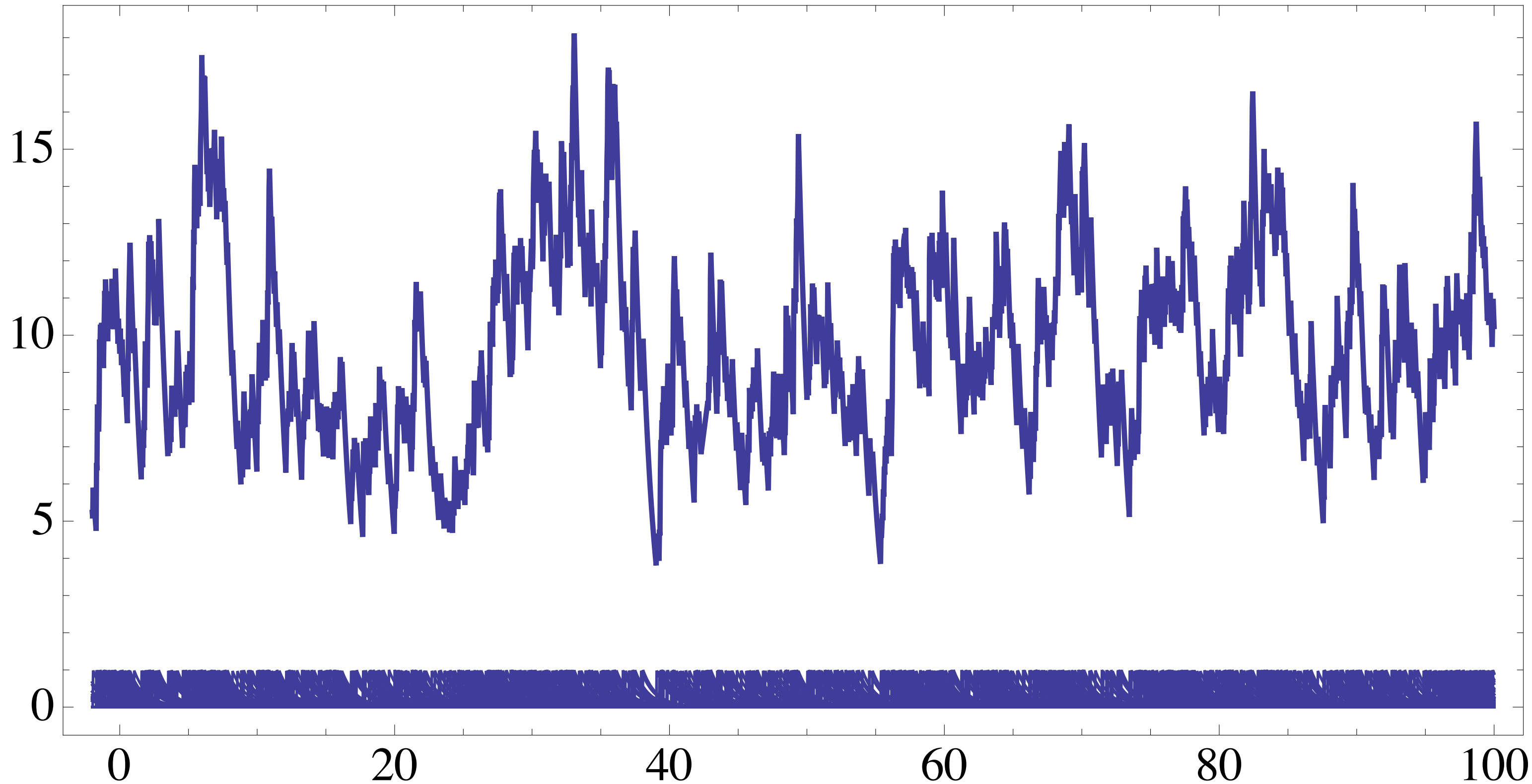
1.5
1.0
0.5
0.0
−2
0
2
4
6
8
10



2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−2
0
2
4
6
8
10



10
8
6
4
2
0
−2
0
2
4
6
8
10



15
10
5
0
0
20
40
60
80
100

Trasformata di Fourier di un singolo impulso esponenziale

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} A \exp(-t/RC) \exp(-i\omega t) dt = \frac{A}{1/RC + i\omega}$$

Allora la densità spettrale di una successione di impulsi esponenziali che arrivano con frequenza media *n* (e hanno la stessa ampiezza massima) è

$$S(\omega) = \frac{nA^2}{1/R^2C^2 + \omega^2} = \frac{nA^2R^2C^2}{1 + \omega^2R^2C^2}$$

In generale

funzione di risposta impulsiva
(o funzione di Green)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(t-s)\,ds$$

teorema di
convoluzione

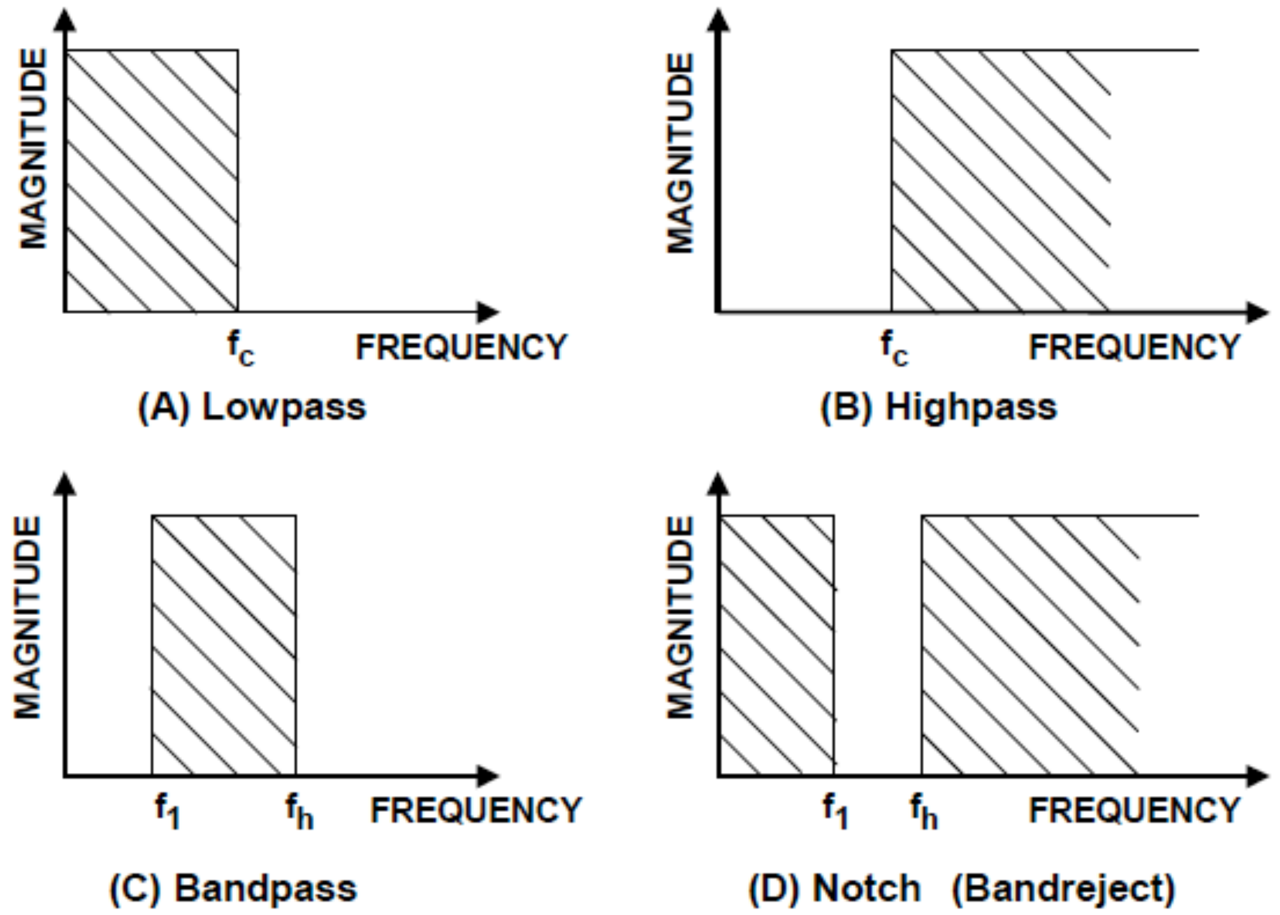
$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

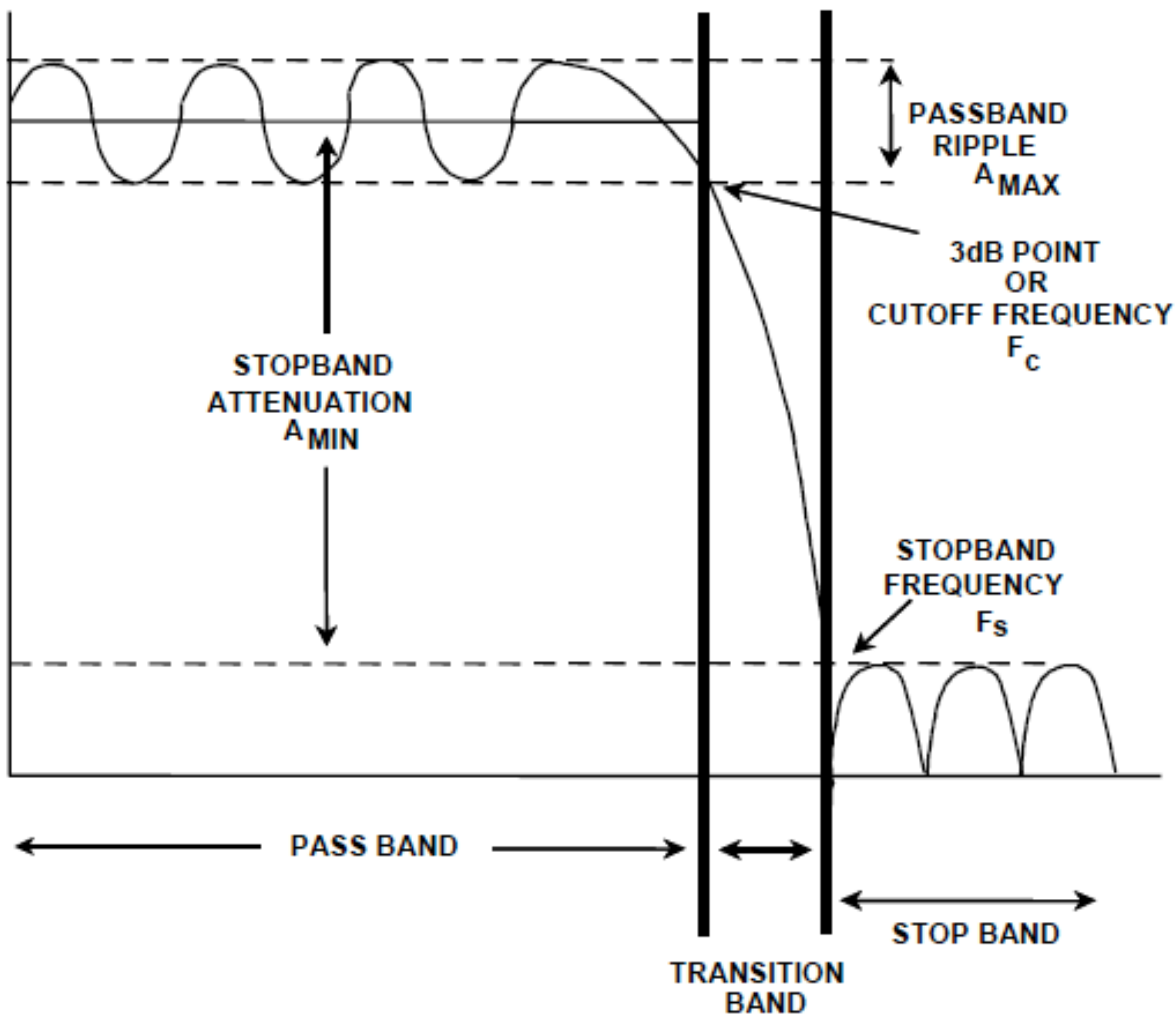
funzione di trasferimento

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{H(\omega)}$$

Il segnale in ingresso si può ottenere dalla misura del segnale in uscita dal filtro e dalla conoscenza della funzione di trasferimento del filtro.

Classificazione dei filtri




PASSBAND
RIPPLE
A_{MAX}
3dB POINT
OR
CUTOFF FREQUENCY
F_c
STOPBAND
ATTENUATION
A_{MIN}
STOPBAND
FREQUENCY
F_S
PASS BAND
STOP BAND
TRANSITION
BAND

dominio della frequenza

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

dominio del tempo

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')f(t')dt'$$