

Utilizzo delle finestre per la riduzione dello spectral leakage

Edoardo Milotti

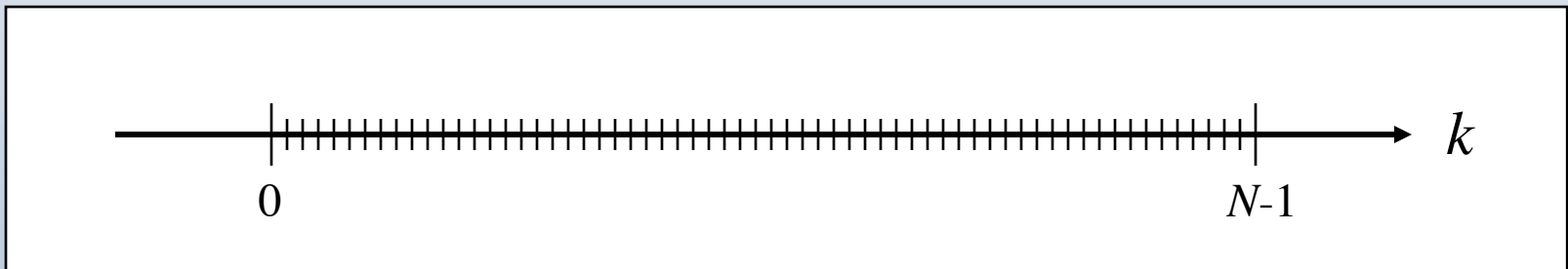
**Corso di Fondamenti Fisici di Tecnologia
Moderna**

Consideriamo un certo processo di campionamento in cui si prendono N campioni con intervallo di campionamento Δt : in questo caso il tempo di campionamento totale è $T = N\Delta t$, e l'intervallo tra frequenze successive nella corrispondente DFT è

$$\Delta\omega = 2\pi/T$$

Si definisce così un “pettine di frequenze”

$$\omega_k = k\Delta\omega \quad k = 0, \dots, N-1$$



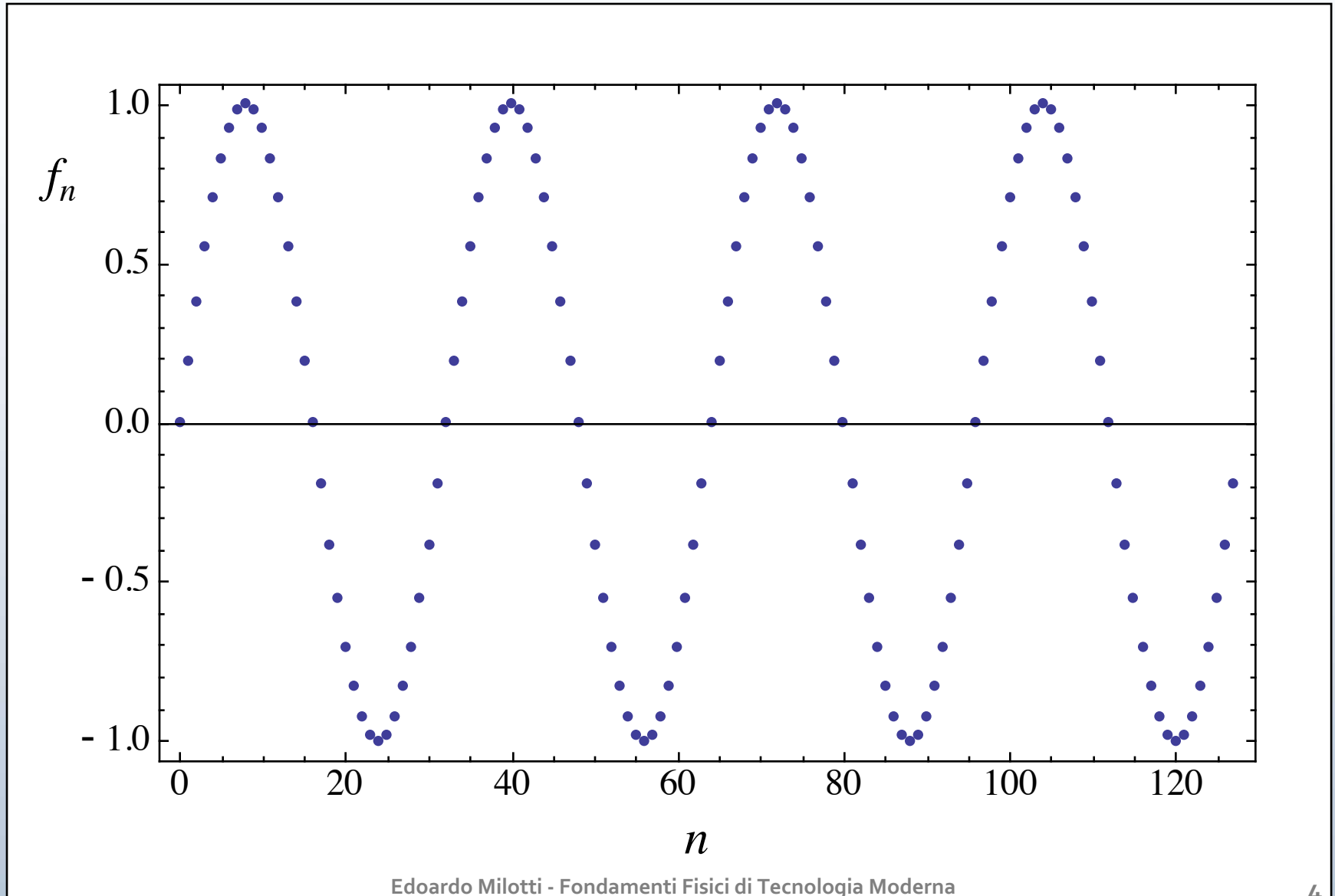
Consideriamo ora una componente di Fourier che oscilla con una frequenza uguale a una di quelle del pettine: l'argomento della funzione è del tipo seguente

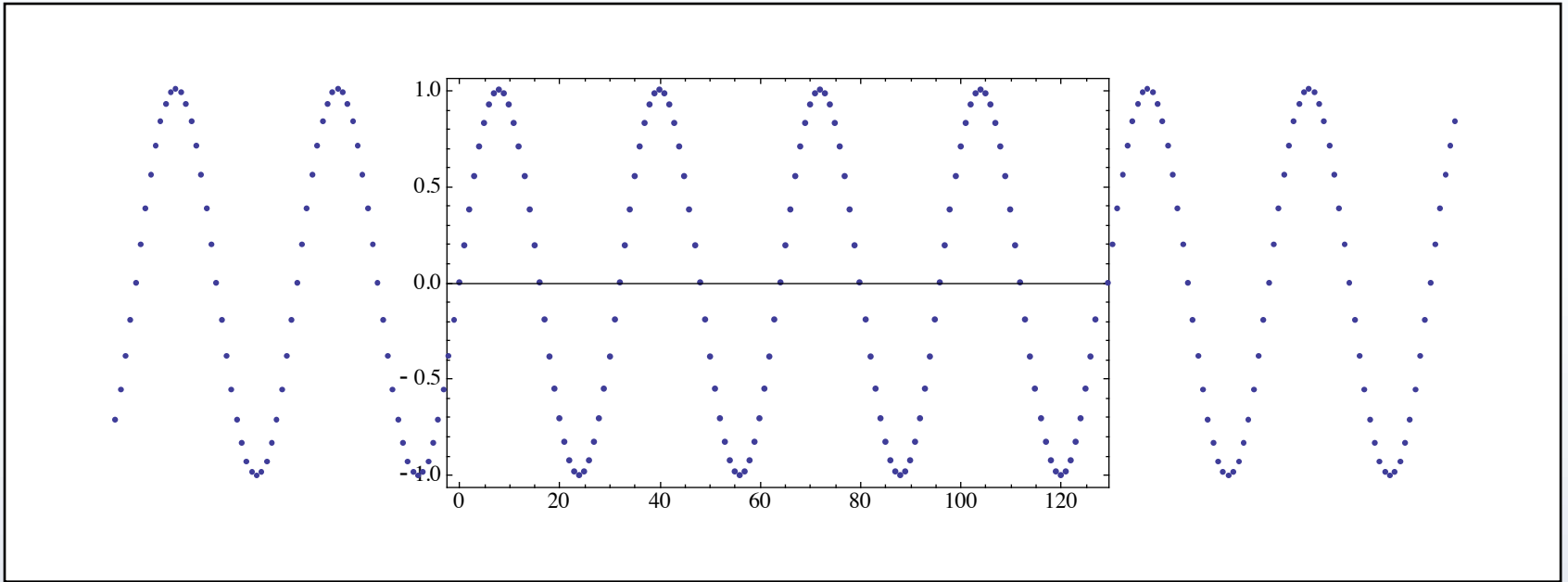
$$\omega_k t = \frac{2\pi}{T} kt$$

quindi quando $t = N\Delta t$ l'esponenziale corrispondente vale 1 e la funzione alla fine dell'intervallo è uguale alla funzione all'inizio dell'intervallo.

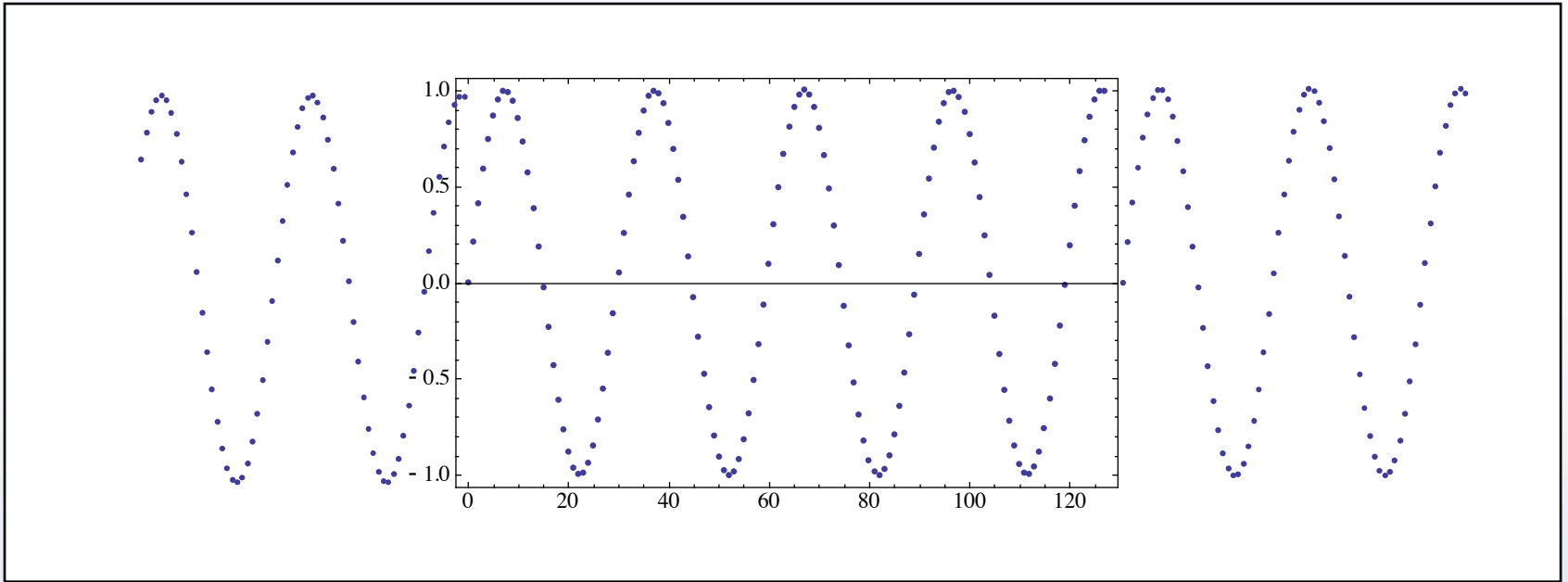
Si noti che anche le derivate della funzione periodica devono essere periodiche e quindi l'argomento esposto sopra vale anche per le derivate.

Esempio: 128 campioni, $k_0 = 4$





In questo caso l'estensione periodica del segnale campionato si raccorda con continuità



In questo caso $k_0 = 4.3$, e l'estensione periodica del segnale campionato non si raccorda con continuità

L'effetto di allargamento è associato alla presenza della discontinuità ai bordi – che a sua volta dipende dall'assenza di una periodicità esatta.

Per compensare questo effetto si moltiplica il segnale per una funzione che annulla il segnale ai bordi – e quindi induce una continuità artificiale nella condizione di periodicità.

Questa funzione sostituisce la r di prima, e si chiama *funzione finestra*.

La DFT della funzione moltiplicata per la funzione finestra e campionata è

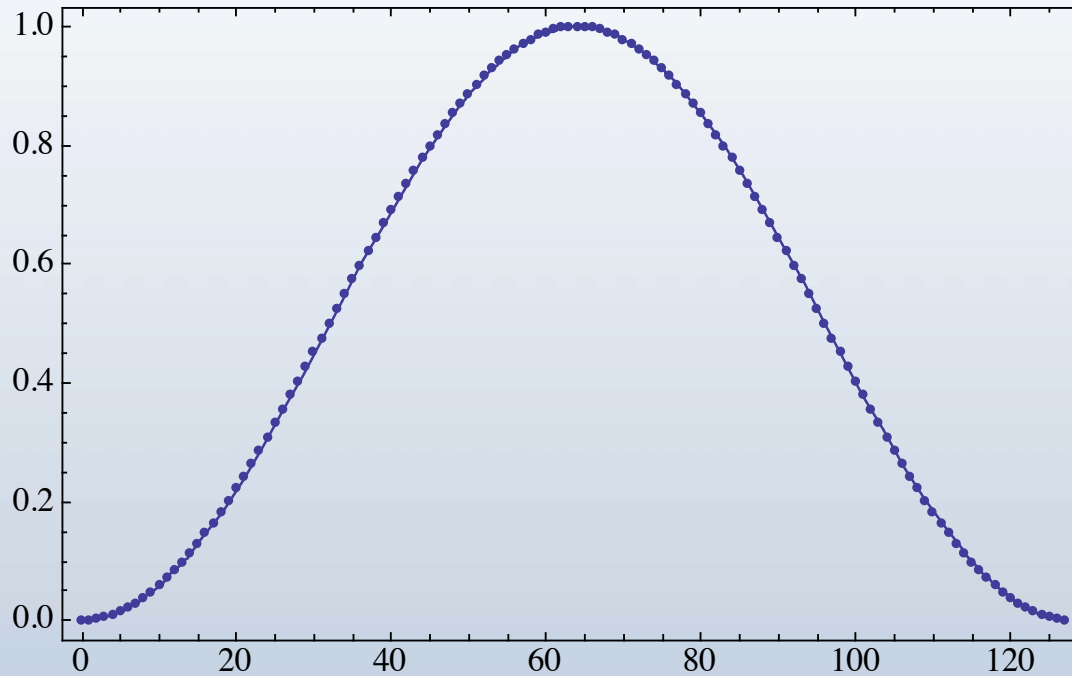
$$DFT(\{f_n w_n\})_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

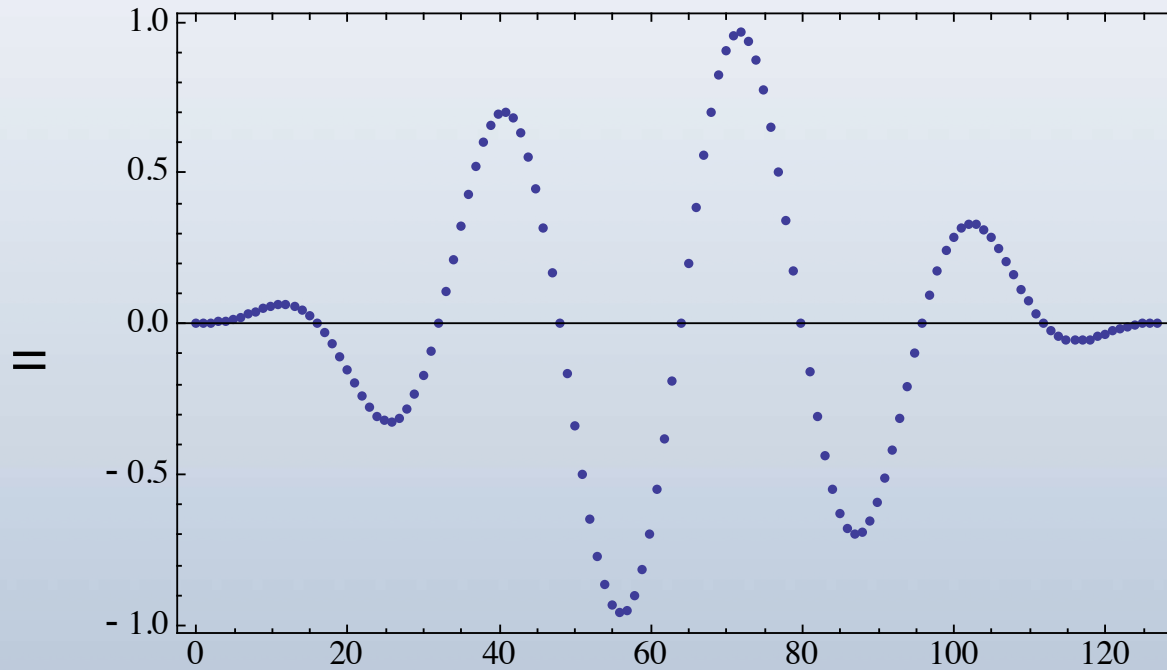
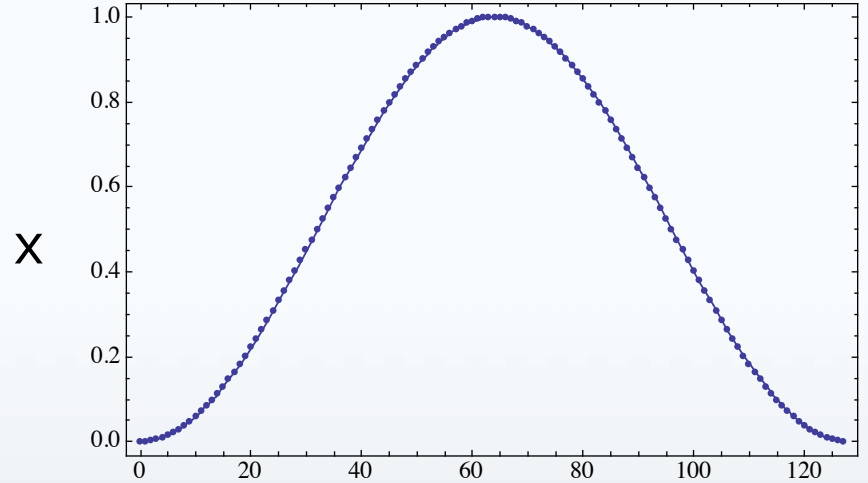
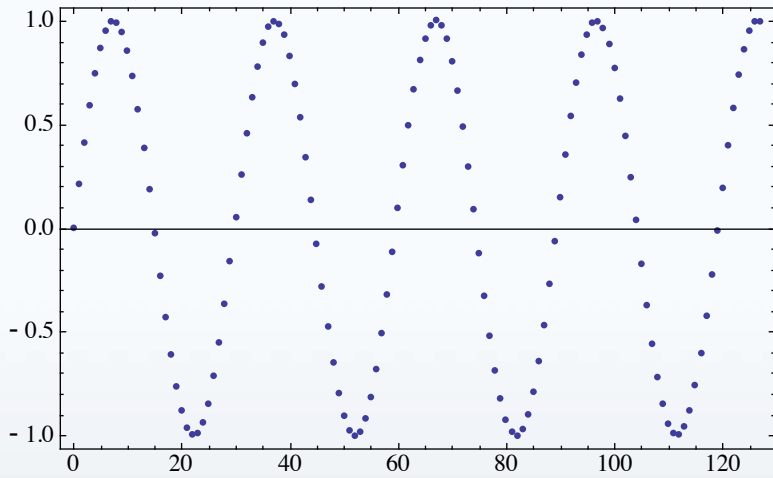
Inoltre si trova la formula seguente come variante del teorema di convoluzione:

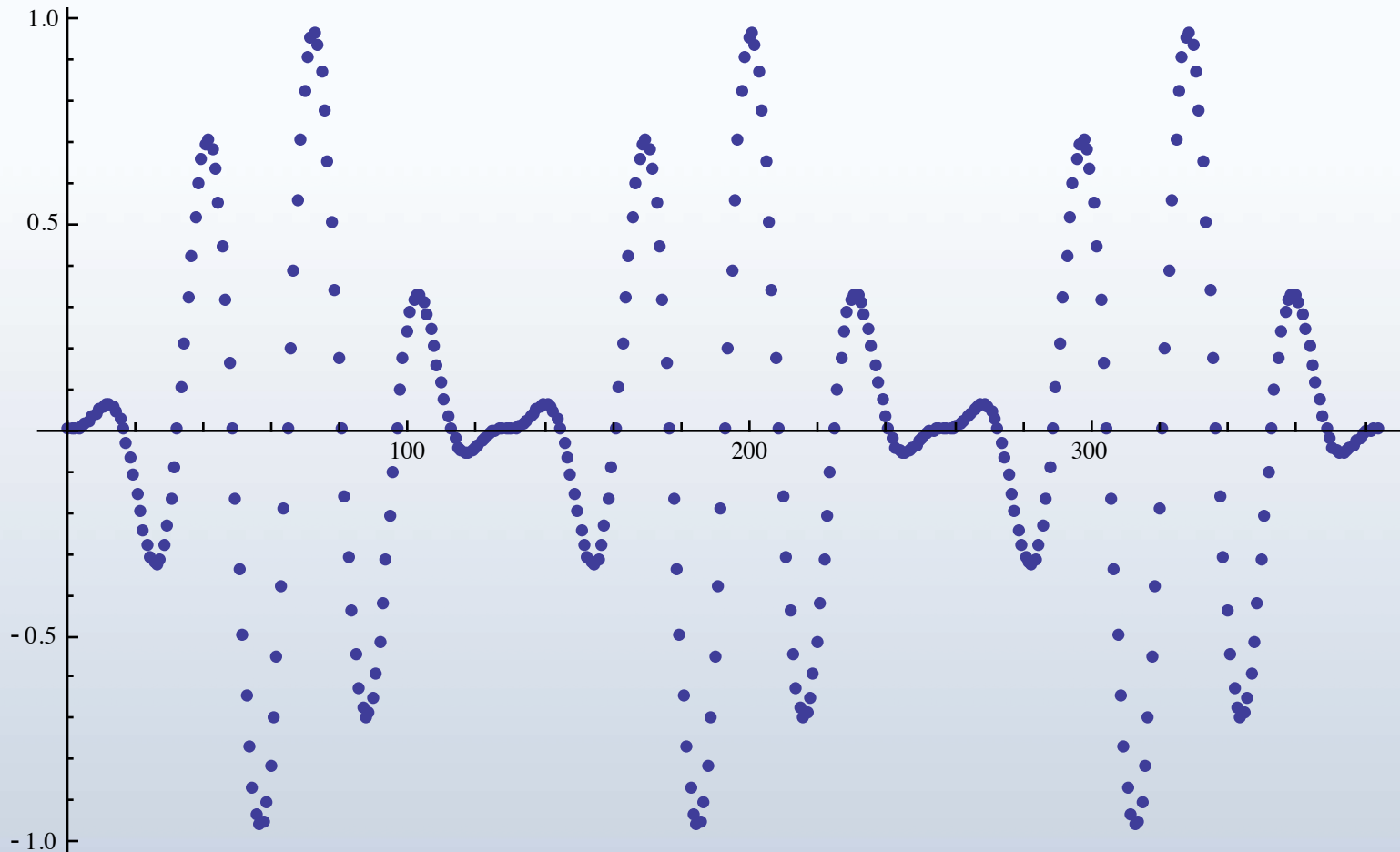
$$\begin{aligned} DFT(f \cdot w)_m &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_n e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i (m-k)n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k F_{m-k} = G_m \end{aligned}$$

La finestra di Hanning

$$w_n = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) = \sin^2 \frac{\pi n}{N}$$







La finestra ripristina (approssimativamente) la continuità ai bordi

Per capire l'effetto di bordo utilizzando le trasformate di Fourier, consideriamo un segnale sinusoidale periodico arbitrario $f(t)$ sull'intervallo $(-T/2, +T/2)$ e calcoliamone i coefficienti di Fourier

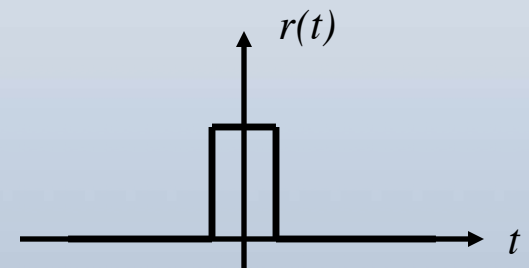
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Questi coefficienti di Fourier sono formalmente identici alla trasformata di Fourier del segnale

$$f(t)r(t)$$

dove $r(t)$ è l'impulso rettangolare

$$r(t) = \begin{cases} 1 & t \in (-T/2, +T/2) \\ 0 & t \notin (-T/2, +T/2) \end{cases}$$



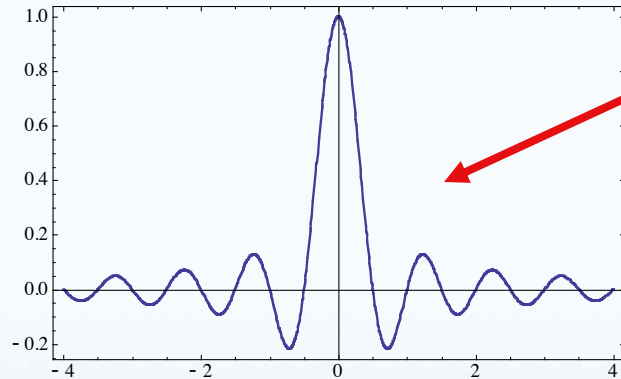
$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) r(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') R(k\omega_0 - \omega') d\omega'
\end{aligned}$$

questa formula mostra che i coefficienti di Fourier sono in generale una somma pesata dei valori della trasformata di Fourier.

Inoltre:

$$R(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{e^{i\omega \frac{T}{2}} - e^{-i\omega \frac{T}{2}}}{i\omega} = T \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} = T \operatorname{sinc} \left(\omega \frac{T}{2} \right)$$

$$R(\omega) = T \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{T}{2}\right)$$



La funzione R si annulla per tutte le frequenze del pettine a parte la frequenza zero

Se la trasformata di Fourier del segnale originale contiene soltanto frequenze appartenenti al pettine di frequenze della DFT, vale a dire se

$$F(\omega) = \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

allora dalla formula

$$C_k = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') R(k\omega_0 - \omega') d\omega' = \frac{a_k}{2\pi T}$$

si vede che C_k contiene solo il contributo dalla frequenza k -esima.

In generale l'espressione

$$C_k = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') R(k\omega_0 - \omega') d\omega'$$

riceve contributi da valori di F a frequenze diverse, e quindi i picchi nello spettro stimato dalla DFT vengono allargati artificialmente (*spectral leakage*).

Si noti che più è grande T , più è stretto il picco di R , e quindi l'effetto che stiamo considerando dipende dalla finitezza del tempo di campionamento.

Analizziamo ora il comportamento della finestra di Hanning: nel caso continuo questa finestra ha la forma funzionale

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right) = \cos^2 \frac{\pi t}{T}$$

e la sua trasformata di Fourier è

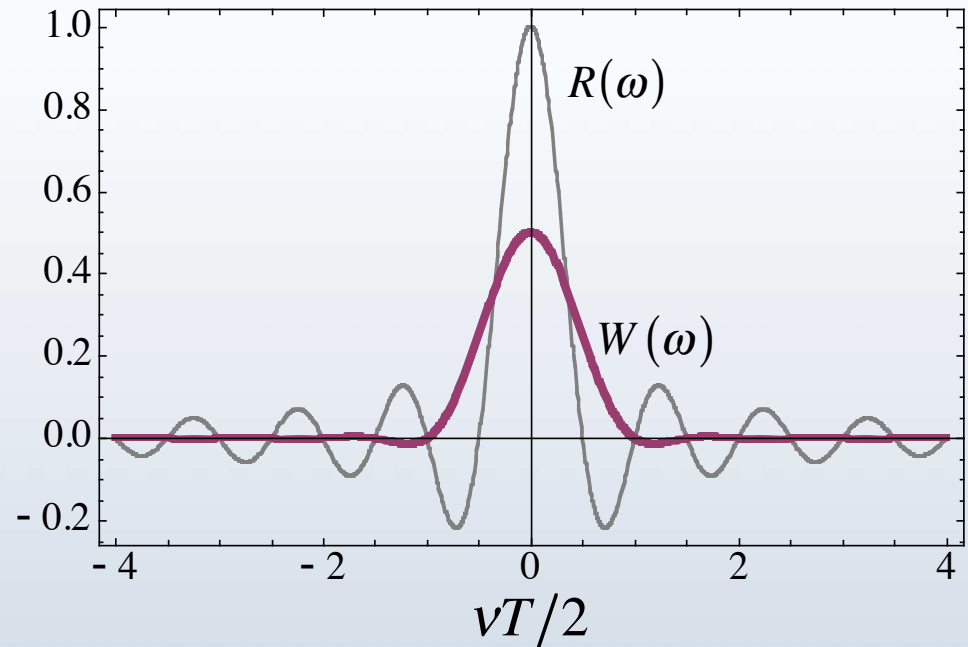
$$\begin{aligned} W(\omega) &= \int_{-T/2}^{+T/2} w(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\omega t}}{2} \left(e^{\frac{2\pi i t}{T}} + e^{-\frac{2\pi i t}{T}} \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\omega t}}{2} \left(e^{\frac{2\pi i t}{T}} + e^{-\frac{2\pi i t}{T}} \right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[T \operatorname{sinc} \left(\omega \frac{T}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(T \operatorname{sinc} \left(\left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) \frac{T}{2} \right) + T \operatorname{sinc} \left(\left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) \frac{T}{2} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[T \operatorname{sinc} \left(\omega \frac{T}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(T \operatorname{sinc} \left(\omega \frac{T}{2} - \pi \right) + T \operatorname{sinc} \left(\omega \frac{T}{2} + \pi \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Confronto tra la finestra rettangolare (R) e la finestra di Hanning (W)

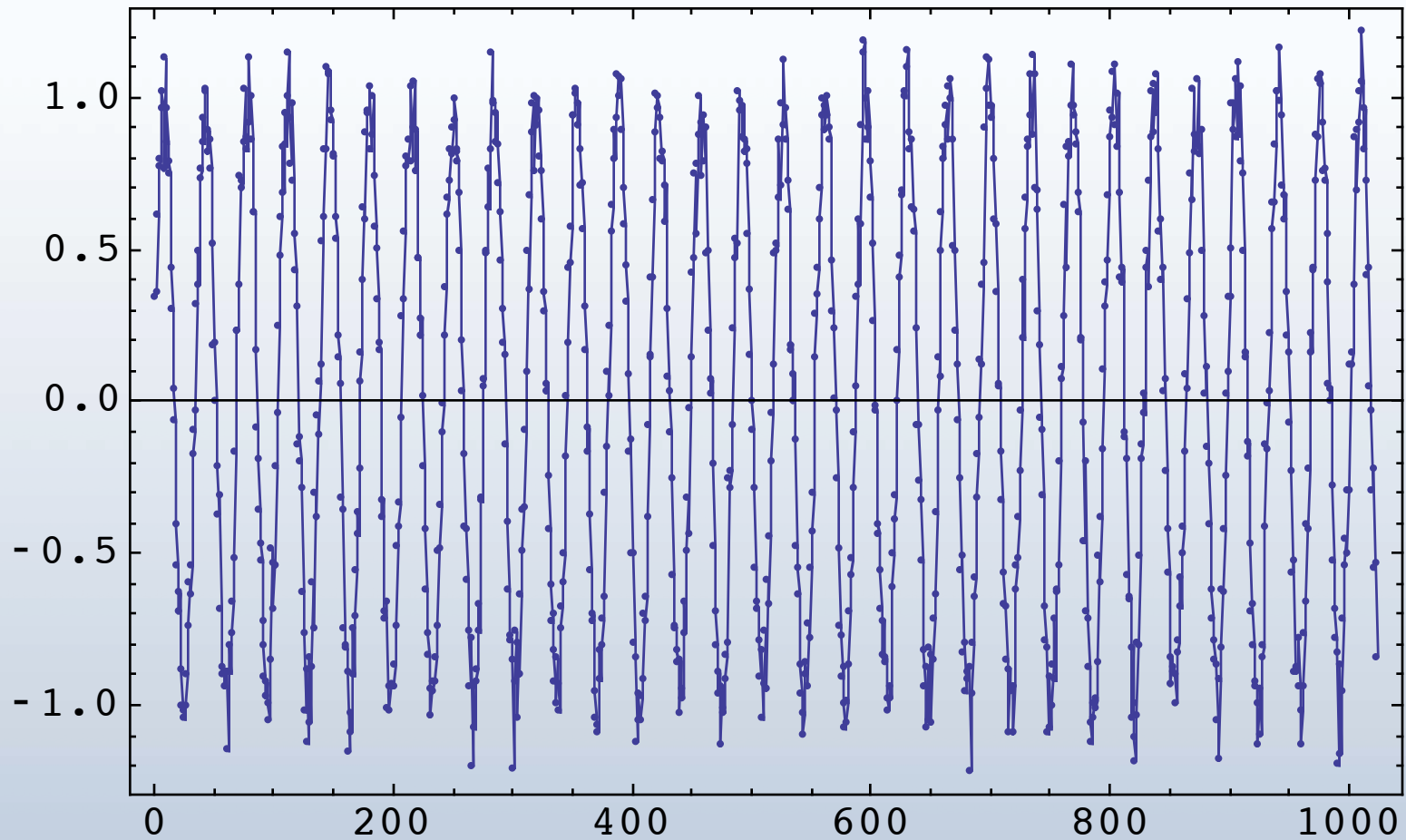
1. Il picco centrale di W è più largo di quello di R;
2. I lobi laterali di W decadono molto più velocemente di quelli di R;
3. Il valore di picco di W è la metà di quello di R.

Queste proprietà della finestra di Hanning implicano che:

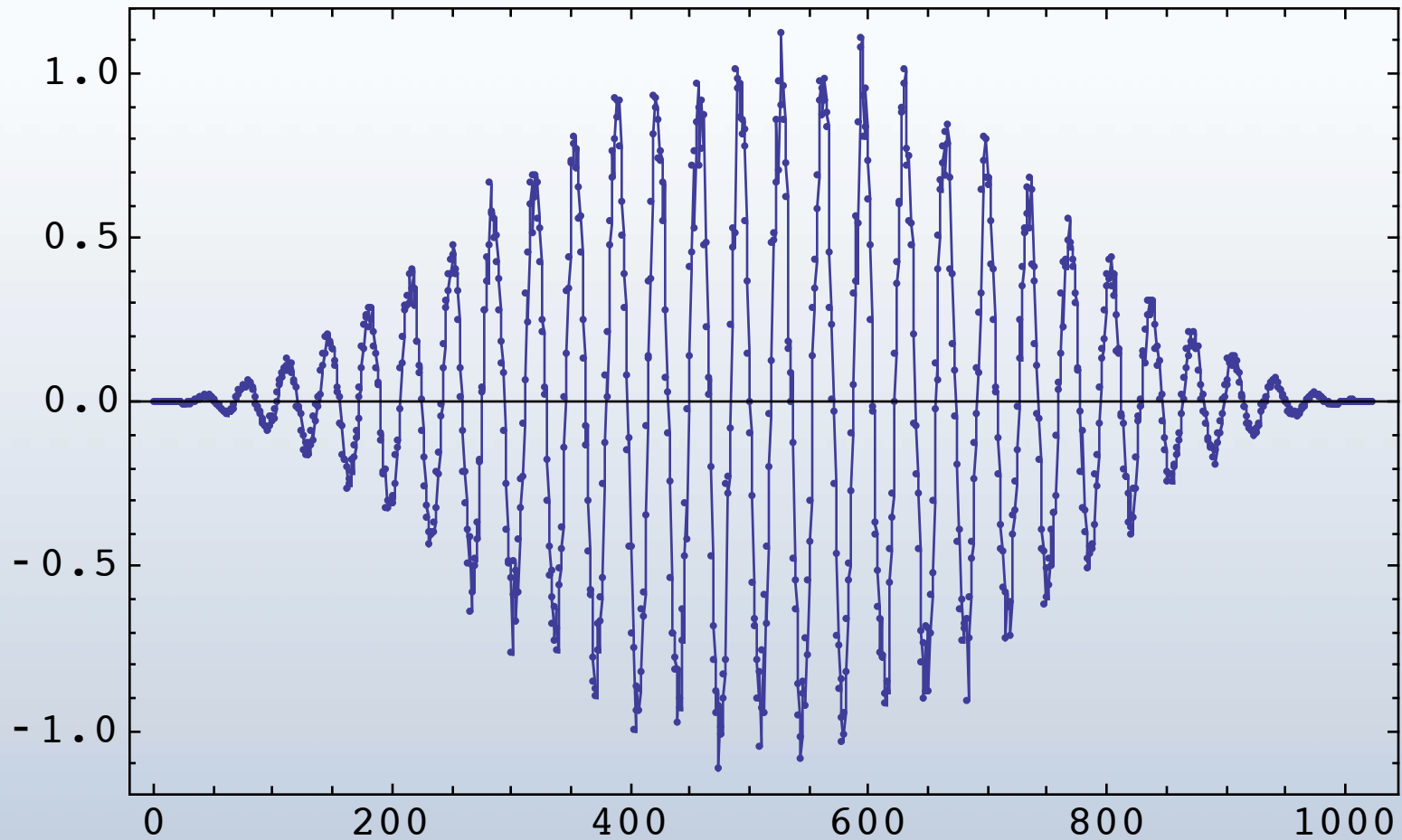
1. La risoluzione in frequenza della finestra è un po' ridotta;
2. Lo spectral leakage è molto inferiore;
3. Quando si applica una finestra si deve compensare la riduzione di ampiezza.



Segnale sinusoidale campionato in presenza di rumore

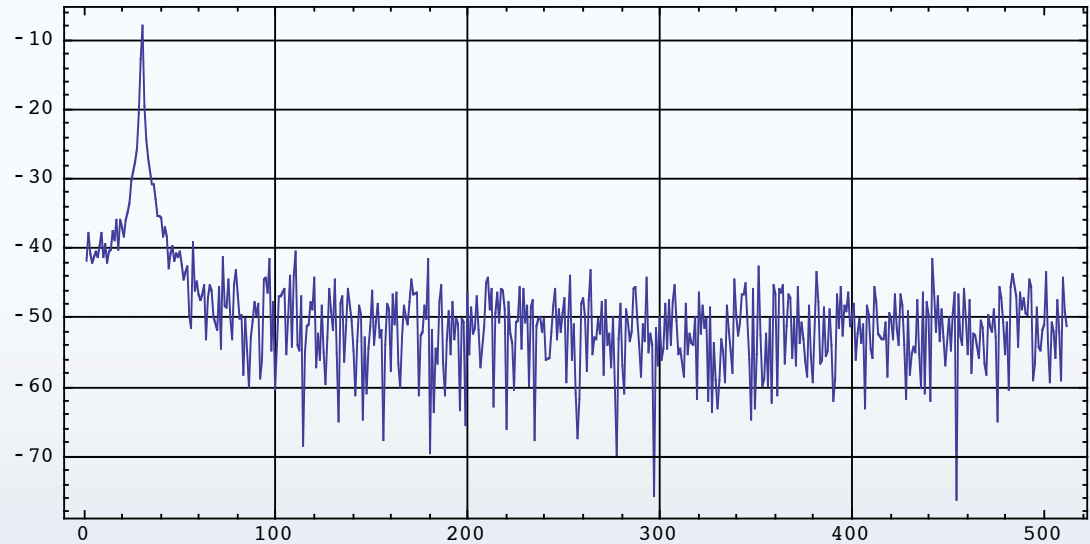


Segnale sinusoidale campionato in presenza di rumore e moltiplicato per la finestra di Hanning

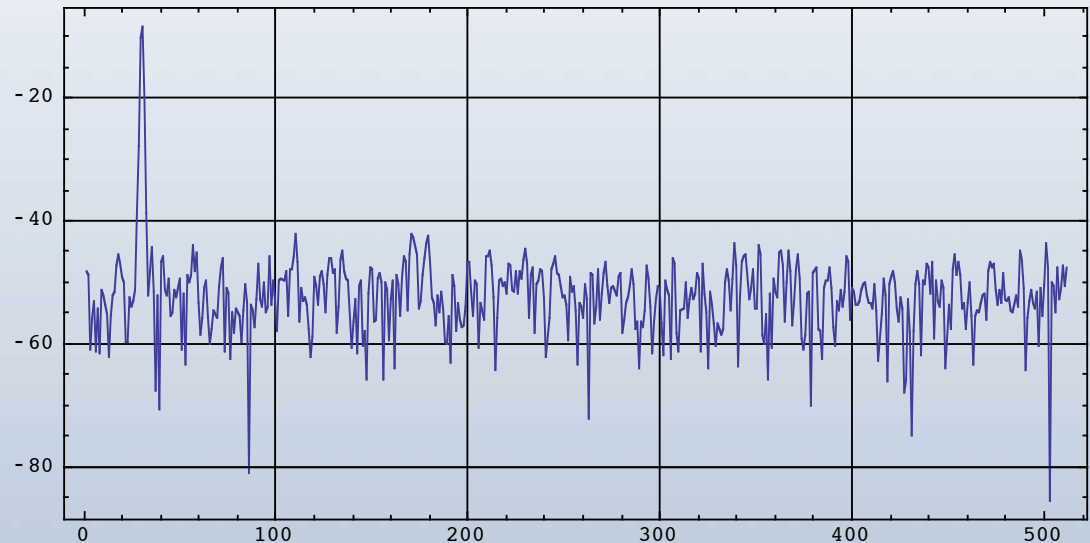


Spettri stimati

con finestra rettangolare



con finestra di Hanning



DFT della finestra di Hanning

$$\begin{aligned}W_k &= \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i n}{N}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\&= \frac{1}{2} \left(N \delta_{k,0} - \frac{1}{2} N \delta_{k,1} - \frac{1}{2} N \delta_{k,N-1} \right) \\&= \frac{N}{2} \left(\delta_{k,0} - \frac{1}{2} \delta_{k,1} - \frac{1}{2} \delta_{k,N-1} \right)\end{aligned}$$

quindi la DFT di un segnale a cui viene applicata la finestra di Hanning è la seguente

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l W_{k-l} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l \frac{N}{2} \left(\delta_{k-l,0} - \frac{1}{2} \delta_{k-l,1} - \frac{1}{2} \delta_{k-l,N-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(F_k - \frac{1}{2} F_{k-1} - \frac{1}{2} F_{k+1} \right) \end{aligned}$$

quindi la finestra di Hanning rimpiazza la DFT ad una data frequenza con una media pesata della trasformata stessa presa a frequenze adiacenti.

Se prendiamo il caso di una sinusoida che ha la frequenza esattamente coincidente con una delle frequenze che definiscono la DFT

$$F_k = \frac{A}{2} N (\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0})$$

$$S_k = \frac{A^2}{4} (\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0})$$

Perciò lo spettro del segnale modificato è

$$S_k^{(G)} = \frac{1}{4} \left((\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0}) + \frac{1}{4} (\delta_{k-1,k_0} + \delta_{k-1,N-k_0}) + \frac{1}{4} (\delta_{k+1,k_0} + \delta_{k+1,N-k_0}) \right) \frac{A^2}{4}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \left(\delta_{k,k_0} + \frac{1}{4} \delta_{k-1,k_0} + \frac{1}{4} \delta_{k+1,k_0} \right) + \frac{1}{4} \left(\delta_{k,N-k_0} + \frac{1}{4} \delta_{k-1,N-k_0} + \frac{1}{4} \delta_{k+1,N-k_0} \right) \right] \frac{A^2}{4}$$

ci sono così due picchi più larghi del picco originale, e il valore di picco della densità spettrale vale 1/4 del picco originale (−6dB).

Parametri generali che caratterizzano il comportamento delle funzioni finestra

1. *Amplificazione di picco (guadagno di picco) della finestra (Peak signal Gain o Coherent Gain)*

Come abbiamo già visto nel caso della finestra di Hanning, la funzione finestra riduce il valore di picco rispetto la finestra rettangolare, e anche se si tratta di una riduzione di ampiezza è comune parlare di amplificazione o guadagno della finestra. Il guadagno di picco è proporzionale W_0 , vale a dire dal valore a frequenza 0 o DC della DFT. Utilizzando la DFT della finestra

$$W_k = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

e la formula

$$G_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_l F_{k-l}$$

si trova che il guadagno di picco è dato da

$$\frac{W_0}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n$$

Esempio: amplificazione di picco della finestra di Hanning.

Abbiamo visto che

$$W_k = \frac{N}{2} \left(\delta_{k,0} - \frac{1}{2} \delta_{k,1} - \frac{1}{2} \delta_{k,N-1} \right)$$

quindi

$$W_0 = \frac{N}{2}$$

e infine il guadagno di picco è

$$\frac{W_0}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Amplificazione di potenza coerente (Coherent Power Gain)

Questo è un parametro che talvolta compare nella letteratura sull'argomento e non è altro che il modulo quadro dell'amplificazione di picco:

$$\frac{|W_0|^2}{N^2} = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2$$

Esempio: coherent power gain della finestra di Hanning

Dal risultato trovato sopra troviamo immediatamente che la coherent power gain della finestra di Hanning vale $\frac{1}{4}$.

3. Amplificazione di potenza incoerente o guadagno di potenza incoerente (Incoherent Power Gain)

Un tipo di rumore molto comune (il cosiddetto rumore bianco) ha una densità spettrale (media) costante e i diversi coefficienti di Fourier sono statisticamente scorrelati tra loro, e quindi applicando la finestra al segnale di rumore si trova

$$S_k = \frac{\langle |F_k|^2 \rangle}{N^2} = \frac{\sigma_0^2}{N}; \quad \langle F_k^* F_l \rangle = N\sigma_0^2 \delta_{k,l}$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle |G_m|^2 \rangle}{N^2} &\approx \frac{1}{N^2} \left\langle \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k F_{m-k} \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{N^4} \sum_{k,l=0}^{N-1} W_k^* W_l \langle F_{m-k}^* F_{m-l} \rangle = \frac{1}{N^4} \sum_{k,l=0}^{N-1} W_k^* W_l \sigma_0^2 N \delta_{k,l} \\ &= \frac{\sigma_0^2}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2 = \left(\frac{\sigma_0^2}{N} \right) \cdot \left(\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2 \right) \end{aligned}$$

Questo significa che l'amplificazione del segnale di rumore è diversa da quella del segnale deterministico e il coefficiente di amplificazione (*guadagno di potenza incoerente*) vale

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2$$

Esempio: incoherent power gain per la finestra di Hanning

Nel caso della finestra di Hanning

$$W_k = \frac{N}{2} \left(\delta_{k,0} - \frac{1}{2} \delta_{k,1} - \frac{1}{2} \delta_{k,N-1} \right)$$

quindi

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2 = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N^2}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$$

4. Larghezza di banda di rumore equivalente (Equivalent Noise BandWidth, ENBW)

Il rapporto tra i due guadagni trovati in precedenza definisce una specie di banda efficace da cui si trae rumore

$$\begin{aligned}
 ENBW &= \frac{[\text{densità spettrale del rumore (con finestra)}]}{(\text{amplificazione in potenza})(\text{densità spettrale del rumore})} \\
 &= \frac{\langle |G_m|^2 \rangle / N^2}{(|W_0|^2 / N^2)(\sigma_0^2 / N)} = \frac{\left(\frac{\sigma_0^2}{N}\right) \left(\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2\right)}{\left(\frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2\right) \left(\frac{\sigma_0^2}{N}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2} = \frac{N \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2}
 \end{aligned}$$

Esempio: ENBW per la finestra di Hanning

$$ENBW = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2}{\frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2} = \frac{3/8}{1/4} = \frac{3}{2}$$

il binsize efficace è più grande del caso senza finestra, la prestazione rispetto al rumore peggiora

5. Guadagno algoritmico (*Processing Gain, PG*)

Questa quantità misura quanto la finestra è efficiente nell'evidenziare la presenza di un segnale al di sopra del fondo di rumore ed è data dal rapporto tra SNR e SNR con finestra per un segnale sinusoidale puro. Nel caso di un segnale sinusoidale di ampiezza A con finestra rettangolare l'amplificazione di potenza coerente è 1 e la densità spettrale (unilatera) vale $A^2/2$, mentre la densità spettrale del rumore vale σ_0^2/N quindi

$$SNR_0 = \frac{A^2 N}{4\sigma_0^2}$$

Se è presente la finestra

$$SNR_W = \frac{\frac{A^2}{4} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2}{\frac{\sigma_0^2}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} = SNR_0 \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2}$$

$$PG = \frac{SNR_W}{SNR_0} = \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2}$$

Questo parametro è uguale all'inverso dell'ENBW

6. Perdita di guadagno nel caso peggiore (Scalloping Loss)

Il caso peggiore che può capitare è quello di una sinusoide con una frequenza che sta a metà strada tra due frequenze della DFT. In questo caso si ha una perdita aggiuntiva di guadagno rispetto a quello che avevamo calcolato nel caso coerente, e questa perdita viene parametrizzata come rapporto tra guadagno coerente nel caso peggiore diviso per il guadagno coerente definito sopra. In generale si trova che questo rapporto dipende dalla frequenza.

7. Risoluzione spettrale

Abbiamo visto nel caso della finestra di Hanning che quella finestra produce una riduzione della risoluzione spettrale. Un modo per caratterizzare le finestre consiste nel definire il cosiddetto punto a 3dB, vale a dire il punto in corrispondenza al quale il guadagno incoerente in potenza della finestra si riduce di un fattore 2.

| WINDOW | HIGHEST SIDE-LOBE LEVEL (dB) | SIDE LOBE FALL OFF (dB/OCT) | COHERENT GAIN | EQUIV. NOISE BW (BINS) | 3.0-dB BW (BINS) | SCALLOP LOSS (dB) | WORST CASE PROCESS LOSS (dB) | 6.0-dB BW (BINS) | OVERLAP CORRELATION (PCNT) | | |
|----------------------------------|------------------------------|-----------------------------|---------------|------------------------|------------------|-------------------|------------------------------|------------------|----------------------------|--------|------|
| | | | | | | | | | 75% OL | 50% OL | |
| RECTANGLE | -13 | -6 | 1.00 | 1.00 | 0.89 | 3.92 | 3.92 | 1.21 | 75.0 | 50.0 | |
| TRIANGLE | -27 | -12 | 0.50 | 1.33 | 1.28 | 1.82 | 3.07 | 1.78 | 71.9 | 25.0 | |
| COS ² (X) HANNING | $\alpha = 1.0$ | -23 | -12 | 0.64 | 1.23 | 1.20 | 2.10 | 3.01 | 1.65 | 75.5 | 31.8 |
| | $\alpha = 2.0$ | -32 | -18 | 0.50 | 1.50 | 1.44 | 1.42 | 3.18 | 2.00 | 65.9 | 16.1 |
| | $\alpha = 3.0$ | -39 | -24 | 0.42 | 1.73 | 1.66 | 1.08 | 3.47 | 2.32 | 56.1 | 8.5 |
| | $\alpha = 4.0$ | -47 | -30 | 0.38 | 1.94 | 1.86 | 0.86 | 3.75 | 2.59 | 48.6 | 4.2 |
| HAMMING | -43 | -6 | 0.54 | 1.36 | 1.30 | 1.78 | 3.10 | 1.81 | 70.7 | 23.5 | |
| RIESZ | -21 | -12 | 0.67 | 1.20 | 1.16 | 2.22 | 3.01 | 1.59 | 76.5 | 34.4 | |
| RIEMANN | -26 | -12 | 0.59 | 1.30 | 1.26 | 1.89 | 3.03 | 1.74 | 73.4 | 27.4 | |
| DE LA VALLE-POUSSIN | -53 | -24 | 0.38 | 1.92 | 1.82 | 0.90 | 3.72 | 2.55 | 49.3 | 5.0 | |
| TUKEY | $\alpha = 0.25$ | -14 | -18 | 0.88 | 1.10 | 1.01 | 2.96 | 3.39 | 1.38 | 74.1 | 44.4 |
| | $\alpha = 0.50$ | -15 | -18 | 0.75 | 1.22 | 1.15 | 2.24 | 3.11 | 1.57 | 72.7 | 36.4 |
| | $\alpha = 0.75$ | -19 | -18 | 0.63 | 1.36 | 1.31 | 1.73 | 3.07 | 1.80 | 70.5 | 29.1 |
| BOHMAN | -46 | -24 | 0.41 | 1.79 | 1.71 | 1.02 | 3.54 | 2.38 | 54.5 | 7.4 | |
| POISSON | $\alpha = 2.0$ | -19 | -6 | 0.44 | 1.30 | 1.21 | 2.09 | 3.23 | 1.68 | 89.1 | 27.8 |
| | $\alpha = 3.0$ | -24 | -6 | 0.32 | 1.65 | 1.45 | 1.46 | 3.84 | 2.08 | 54.8 | 15.1 |
| | $\alpha = 4.0$ | -31 | -6 | 0.25 | 2.08 | 1.75 | 1.03 | 4.21 | 2.58 | 40.4 | 7.4 |
| HANNING-POISSON | $\alpha = 0.5$ | -35 | -18 | 0.43 | 1.61 | 1.54 | 1.26 | 3.33 | 2.14 | 61.3 | 12.6 |
| | $\alpha = 1.0$ | -39 | -18 | 0.38 | 1.73 | 1.64 | 1.11 | 3.50 | 2.30 | 56.0 | 9.2 |
| | $\alpha = 2.0$ | NONE | -18 | 0.29 | 2.02 | 1.87 | 0.87 | 3.94 | 2.65 | 44.6 | 4.7 |
| CAUCHY | $\alpha = 3.0$ | -31 | -6 | 0.42 | 1.48 | 1.34 | 1.71 | 3.40 | 1.90 | 61.6 | 20.2 |
| | $\alpha = 4.0$ | -35 | -6 | 0.33 | 1.76 | 1.50 | 1.36 | 3.83 | 2.20 | 48.8 | 13.2 |
| | $\alpha = 5.0$ | -30 | -6 | 0.28 | 2.06 | 1.68 | 1.13 | 4.28 | 2.53 | 38.3 | 9.0 |
| GAUSSIAN | $\alpha = 2.5$ | -42 | -6 | 0.51 | 1.30 | 1.33 | 1.69 | 3.14 | 1.86 | 67.7 | 20.0 |
| | $\alpha = 3.0$ | -55 | -6 | 0.43 | 1.64 | 1.56 | 1.25 | 3.40 | 2.18 | 57.5 | 10.6 |
| | $\alpha = 3.5$ | -69 | -6 | 0.37 | 1.90 | 1.79 | 0.94 | 3.73 | 2.52 | 47.2 | 4.9 |
| DOLPH-CHEBYSHEV | $\alpha = 2.5$ | -50 | 0 | 0.53 | 1.39 | 1.33 | 1.70 | 3.12 | 1.85 | 69.6 | 22.3 |
| | $\alpha = 3.0$ | -60 | 0 | 0.48 | 1.51 | 1.44 | 1.44 | 3.23 | 2.01 | 64.7 | 16.3 |
| | $\alpha = 3.5$ | -70 | 0 | 0.45 | 1.62 | 1.56 | 1.25 | 3.36 | 2.17 | 60.2 | 11.9 |
| | $\alpha = 4.0$ | -80 | 0 | 0.42 | 1.73 | 1.65 | 1.10 | 3.48 | 2.31 | 55.9 | 8.7 |
| KAISER-BESSEL | $\alpha = 2.0$ | -46 | -6 | 0.49 | 1.50 | 1.43 | 1.46 | 3.20 | 1.99 | 65.7 | 16.9 |
| | $\alpha = 2.5$ | -57 | -6 | 0.44 | 1.65 | 1.57 | 1.20 | 3.38 | 2.20 | 59.5 | 11.2 |
| | $\alpha = 3.0$ | -69 | -6 | 0.40 | 1.80 | 1.71 | 1.02 | 3.56 | 2.39 | 53.9 | 7.4 |
| | $\alpha = 3.5$ | -82 | -6 | 0.37 | 1.93 | 1.83 | 0.89 | 3.74 | 2.57 | 48.8 | 4.8 |
| BARCELON-TEMES | $\alpha = 3.0$ | -53 | -6 | 0.47 | 1.56 | 1.49 | 1.34 | 3.27 | 2.07 | 63.0 | 14.2 |
| | $\alpha = 3.5$ | -58 | -6 | 0.43 | 1.67 | 1.59 | 1.18 | 3.40 | 2.23 | 58.6 | 10.4 |
| | $\alpha = 4.0$ | -68 | -6 | 0.41 | 1.77 | 1.69 | 1.05 | 3.52 | 2.36 | 54.4 | 7.6 |
| EXACT BLACKMAN | -51 | -6 | 0.46 | 1.57 | 1.52 | 1.31 | 3.29 | 2.13 | 62.1 | 11.0 | |
| BLACKMAN | -58 | -18 | 0.42 | 1.73 | 1.68 | 1.10 | 3.47 | 2.35 | 56.7 | 9.0 | |
| MINIMUM 3-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS | -67 | -6 | 0.42 | 1.71 | 1.66 | 1.13 | 3.45 | 1.81 | 57.2 | 9.6 | |
| MINIMUM 4-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS | -92 | -6 | 0.36 | 2.00 | 1.90 | 0.83 | 3.85 | 2.72 | 46.0 | 3.8 | |
| 61 dB 3-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS | -61 | -6 | 0.45 | 1.61 | 1.56 | 1.27 | 3.34 | 2.19 | 61.0 | 12.6 | |
| 74 dB 4-SAMPLE BLACKMAN-HARRIS | -74 | -6 | 0.40 | 1.79 | 1.74 | 1.03 | 3.56 | 2.44 | 53.9 | 7.4 | |
| 4-SAMPLE KAISER-BESSEL | -69 | -6 | 0.40 | 1.80 | 1.74 | 1.02 | 3.56 | 2.44 | 53.9 | 7.4 | |

tabella tratta da

F. J. Harris: *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proc. IEEE **66** (1978) 51

WINDOWS AND FIGURES OF MERIT

| WINDOW | HIGHEST SIDE- LOBE LEVEL (dB) | SIDE LOBE FALL- OFF (dB/OCT) | COHERENT GAIN | EQUIV. NOISE BW (BINS) | 3.0-dB BW (BINS) | SCALLOP LOSS (dB) | WORST CASE PROCESS LOSS (dB) | 6.0-dB BW (BINS) | OVERLAP CORRELATION (PCNT) | | |
|-------------------|---|--|------------------|---------------------------------|------------------------|-------------------------|--|------------------------|----------------------------------|--------|------|
| | | | | | | | | | 75% OL | 50% OL | |
| RECTANGLE | -13 | -6 | 1.00 | 1.00 | 0.89 | 3.92 | 3.92 | 1.21 | 75.0 | 50.0 | |
| TRIANGLE | -27 | -12 | 0.50 | 1.33 | 1.28 | 1.82 | 3.07 | 1.78 | 71.9 | 25.0 | |
| $\text{COS}^2(x)$ | $\alpha = 1.0$ | -23 | -12 | 0.64 | 1.23 | 1.20 | 2.10 | 3.01 | 1.65 | 75.5 | 31.6 |
| HANNING | $\alpha = 2.0$ | -32 | -18 | 0.50 | 1.50 | 1.44 | 1.42 | 3.18 | 2.00 | 65.9 | 16.7 |
| | $\alpha = 3.0$ | -39 | -24 | 0.42 | 1.73 | 1.66 | 1.08 | 3.47 | 2.32 | 56.7 | 8.5 |
| | $\alpha = 4.0$ | -47 | -30 | 0.38 | 1.94 | 1.86 | 0.86 | 3.75 | 2.59 | 48.6 | 4.7 |
| HAMMING | -43 | -6 | 0.54 | 1.36 | 1.30 | 1.78 | 3.10 | 1.81 | 70.7 | 23.5 | |

Funzioni finestra di uso comune

| Finestra | Espressione analitica $\left(t_n = \frac{2\pi n}{N}\right)$ |
|------------------------|---|
| <i>Blackman</i> | $w_n = 0.42 - 0.50 \cos(t_n) + 0.08 \cos(2t_n)$ |
| <i>Blackman-Harris</i> | $w_n = 0.42323 - 0.49755 \cos(t_n) + 0.07922 \cos(2t_n)$ |
| <i>Cosine tapered</i> | $w_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) & \text{per } n=0, \dots, m-1 \text{ e } n=N-m, \dots, N-1 \\ 1 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{con } m = \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor$ |
| <i>Exact Blackman</i> | $w_n = a_0 - a_1 \cos(t_n) + a_2 \cos(2t_n)$ con $a_0 = 7938/18608$, $a_1 = 9240/18608$, $a_2 = 1430/18608$. |
| <i>Exponential</i> | $w_n = \exp(an)$ dove $a = \ln(f)/(N-1)$ e f è il valore finale |
| <i>Flat top</i> | $w_n = 0.2810639 - 0.5208972 \cos(t_n) + 0.1980399 \cos(2t_n)$ |

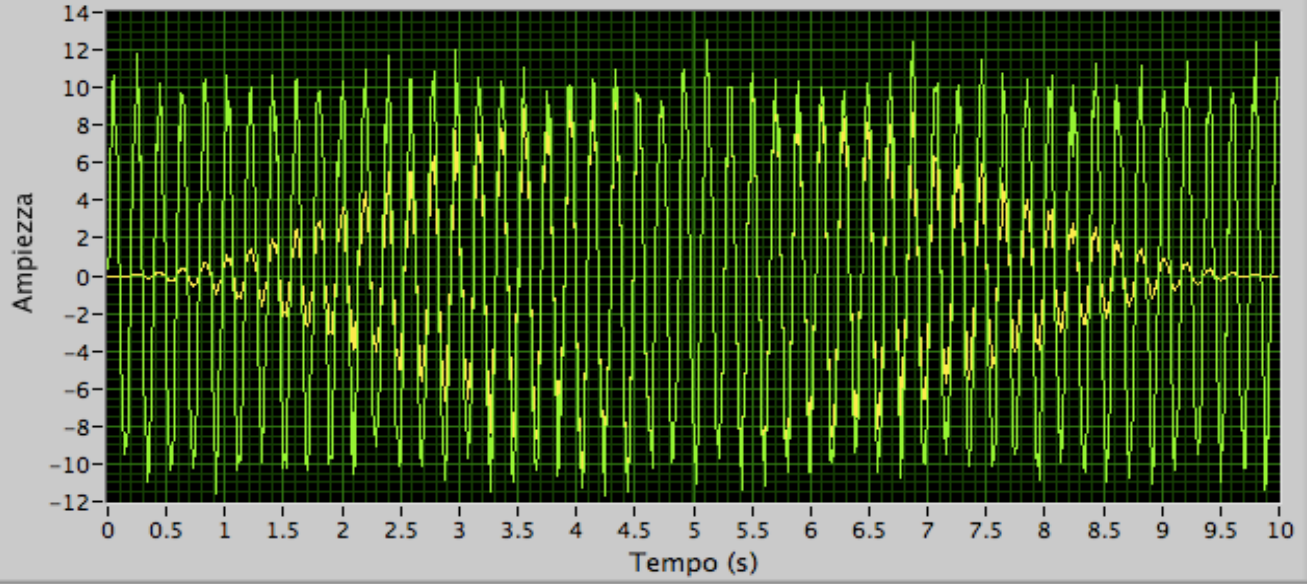
Plot 0



Plot 1



Segnale



tempo di campionamento (s)

10

dt (s)

0.01

frequenza (Hz)

5.13

ampiezza

10.00

deviazione standard rumore bianco Gaussiano

1.00

Plot 0



Plot 1



Densità spettrale

