

Regressioni lineari e filtri digitali

Corso di Fondamenti
Fisici di Tecnologia
Moderna

Memoria nei processi deterministici

Esempio: equazione dell'oscillatore armonico

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Usando l'espansione:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) + x(t - \Delta t) &\approx \left[x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \Delta t^2 \right] + \left[x(t) - \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \Delta t^2 \right] \\ &= 2x(t) + \frac{d^2 x}{dt^2} \Delta t^2 \end{aligned}$$

si trova

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \approx \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

quindi

$$\frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \approx -\omega^2 x(t)$$

$$x(t + \Delta t) = (2 - \Delta t^2 \omega^2) x(t) - x(t - \Delta t)$$

$$x_{n+1} = (2 - \Delta t^2 \omega^2) x_n - x_{n-1}$$

relazione lineare autoregressiva

In generale

$$y_n = -\sum_l a_l y_{n-l} + \sum_m b_m x_{n-m}$$

1. Auto Regressive (AR) $y_n = -\sum_{l=1, q-1} a_l y_{n-l}$
2. Moving Average (MA) $y_n = \sum_{m=0, p-1} b_m x_{n-m}$
3. Auto Regressive - Moving Average (ARMA) $y_n = -\sum_{l=1, p-1} a_l y_{n-l} + \sum_{m=0, q-1} b_m x_{n-m}$

La trasformata Z

$$Z(\{x_n\}) = \sum_n x_n z^n$$

Proprietà simili a quelle della trasformata di Fourier

1. Traslazione della sequenza

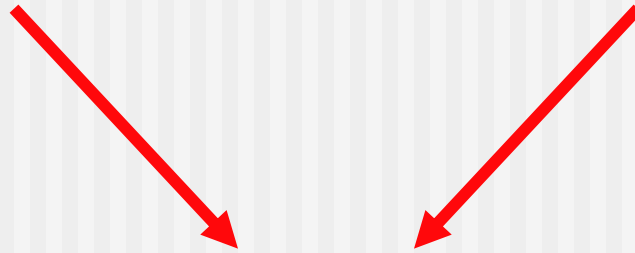
$$Z(\{x_{n-d}\}) = \sum_n x_{n-d} z^n = z^d \sum_n x_{n-d} z^{n-d} = z^d \sum_n x_n z^n = z^d Z(\{x_n\})$$

2. Convoluzione

$$\begin{aligned} Z\left(\left\{\sum_l x_l y_{n-l}\right\}\right) &= \sum_n \left(\sum_l x_l y_{n-l}\right) z^n = \sum_{l,n} x_l z^l y_{n-l} z^{n-l} \\ &= \sum_l x_l z^l \sum_n y_{n-l} z^{n-l} = \sum_l x_l z^l \sum_n y_n z^n = X(z)Y(z) \end{aligned}$$

Collegamento con la trasformata di Fourier discreta

$$X(z) = Z(\{x_n\}) = \sum_n x_n z^n \quad z = e^{i\omega_0 \Delta t}$$



$$X(e^{i\omega_0 \Delta t}) = \sum_n x_n e^{i\omega_0 n \Delta t}$$

Applicazione della trasformata Z alle regressioni lineari

$$y_n = -\sum_l a_l y_{n-l} + \sum_m b_m x_{n-m}$$



$$Y(z) = -A(z) \cdot Y(z) + B(z) \cdot X(z)$$

quindi

$$Y(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} \cdot X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} \cdot X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

La funzione

$$H(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} = \frac{\sum_k b_k z^k}{1 + \sum_k a_k z^k}$$

è detta *funzione di trasferimento* del sistema

Collegamento con la DFT

Poniamo ora $z = e^{-i\omega\Delta t}$ così che la trasformata Z di una sequenza di N campioni diventa

$$X(e^{-i\omega\Delta t}) = \sum_n x_n e^{-in\omega\Delta t}$$

e quindi lo spettro è

$$S(\omega) = \frac{|X(e^{-i\omega\Delta t})|^2}{N^2} = \frac{1}{N^2} \left| \sum_n x_n e^{-in\omega\Delta t} \right|^2$$

Per un sistema con funzione di trasferimento $H(t)$

$$Y(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} \cdot X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

e quindi

$$\begin{aligned} S_{out}(\omega) &= \frac{|Y(e^{-i\omega\Delta t})|^2}{N^2} \\ &= \frac{1}{N^2} |H(e^{-i\omega\Delta t})|^2 |X(e^{-i\omega\Delta t})|^2 = |H(e^{-i\omega\Delta t})|^2 S_{in}(\omega) \end{aligned}$$

Esempio: regressione lineare della sequenza $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$

$$\chi^2 = \sum_{n=2}^{N-1} \left[x_n - (Ax_{n-1} + Bx_{n-2}) \right]^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = -2 \sum_{n=2}^{N-1} x_{n-1} \left[x_n - (Ax_{n-1} + Bx_{n-2}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = -2 \sum_{n=2}^{N-1} x_{n-2} \left[x_n - (Ax_{n-1} + Bx_{n-2}) \right] = 0$$

$$\begin{cases} \sum_n x_{n-1} [x_n - (Ax_{n-1} + Bx_{n-2})] = 0 \\ \sum_n x_{n-2} [x_n - (Ax_{n-1} + Bx_{n-2})] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \sum_n x_{n-1} x_{n-1} + B \sum_n x_{n-1} x_{n-2} = \sum_n x_{n-1} x_n \\ A \sum_n x_{n-2} x_{n-1} + B \sum_n x_{n-2} x_{n-2} = \sum_n x_{n-2} x_n \end{cases}$$

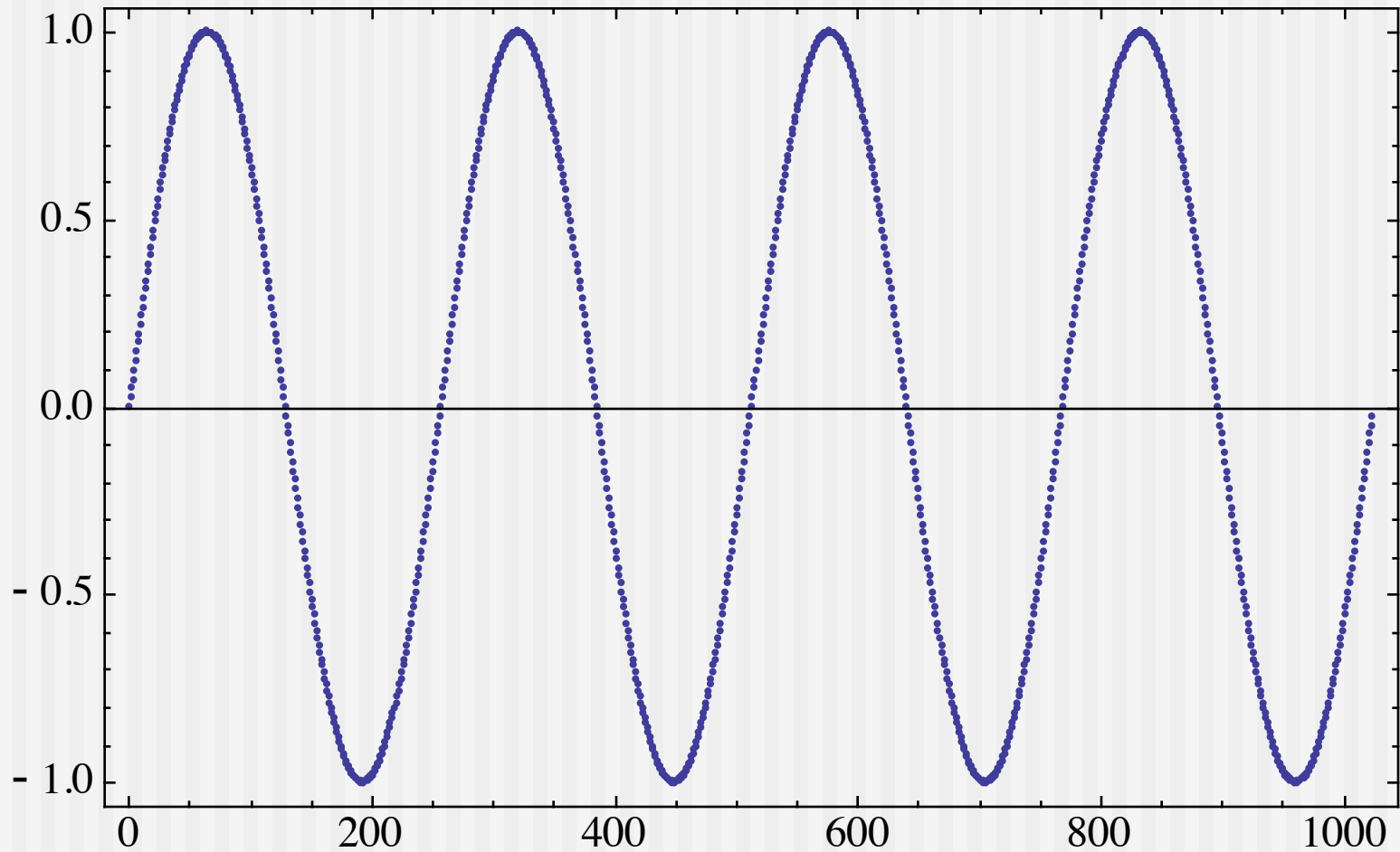
$$\begin{pmatrix} \sum_n x_{n-1}^2 & \sum_n x_{n-1} x_{n-2} \\ \sum_n x_{n-1} x_{n-2} & \sum_n x_{n-2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n x_{n-1} x_n \\ \sum_n x_{n-2} x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_n x_{n-1}^2 & \sum_n x_{n-1}x_{n-2} \\ \sum_n x_{n-1}x_{n-2} & \sum_n x_{n-2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n x_{n-1}x_n \\ \sum_n x_{n-2}x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{\sum_n x_{n-1}x_n \sum_n x_{n-2}^2 - \sum_n x_{n-2}x_n \sum_n x_{n-1}x_{n-2}}{\sum_n x_{n-1}^2 \sum_n x_{n-2}^2 - \left(\sum_n x_{n-1}x_{n-2} \right)^2}$$

$$B = \frac{\sum_n x_{n-1}^2 \sum_n x_{n-2}x_n - \sum_n x_{n-1}x_{n-2} \sum_n x_{n-1}x_n}{\sum_n x_{n-1}^2 \sum_n x_{n-2}^2 - \left(\sum_n x_{n-1}x_{n-2} \right)^2}$$

Consideriamo ora la sequenza di 1024 campioni mostrati nella figura seguente ...



Calcolando le somme e successivamente i coefficienti A e B, si trova

$$A = 1.9994$$

$$B = -1$$

Confrontando con l'espressione AR per un oscillatore armonico

$$y_{n+1} = \left(2 - \Delta t^2 \omega^2\right) y_n - y_{n-1}$$

si ritrova il valore $\omega = \pi/128$ (con $\Delta t = 1$) utilizzato per costruire la sequenza

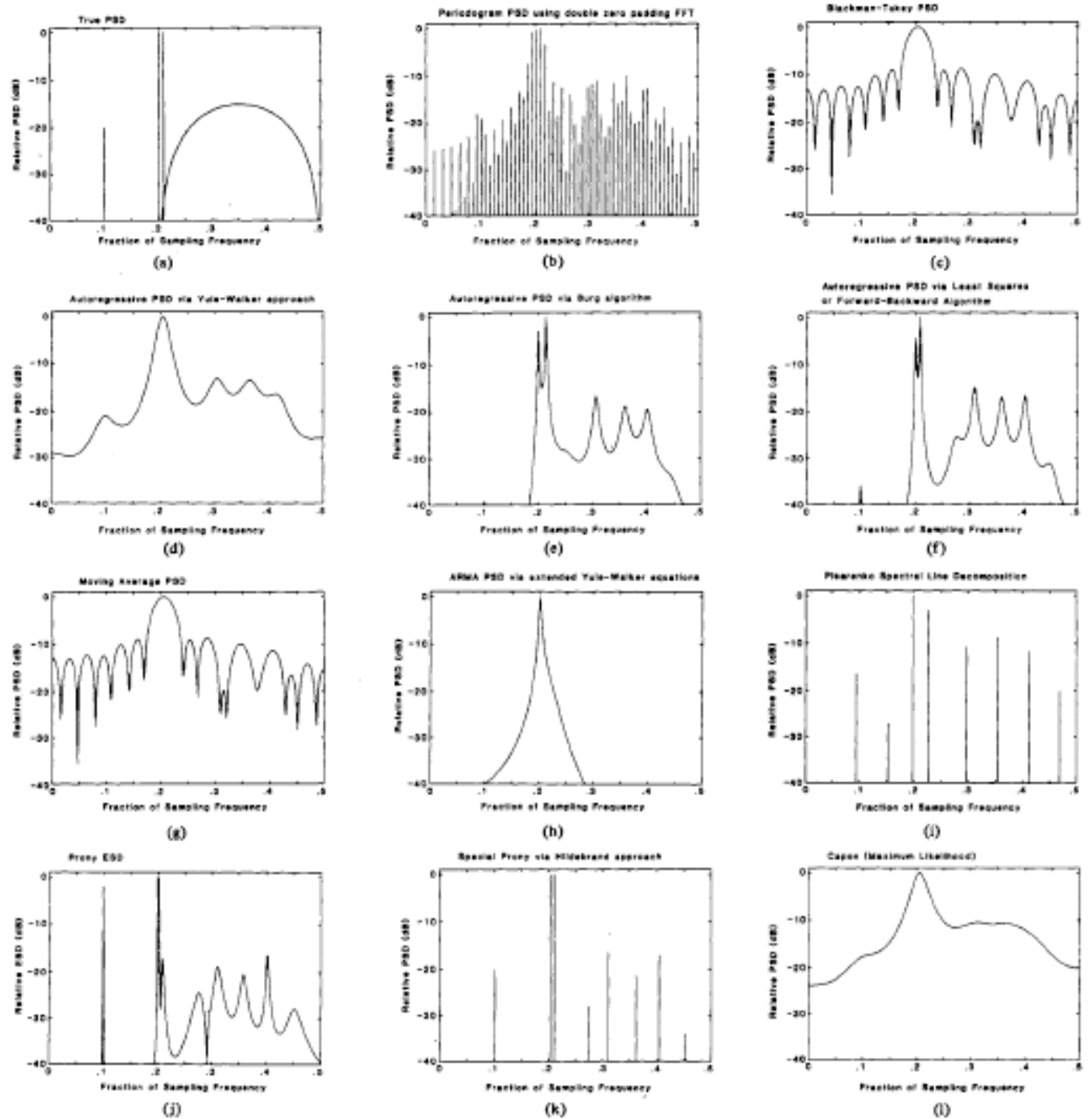


Fig. 16. Illustration of various spectra for the same 64-point sample sequence.

Confronto tra alcuni metodi di analisi spettrale, compresi parecchi metodi autoregressivi

(da S.M.Kay and S.L.Marple, Proc. of the IEEE **69** (1981) 1380)

Si consideri il processo ARMA

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + b_0 x_n$$

e si noti che

$$y_{n-1} = a_1 y_{n-2} + a_2 y_{n-3} + b_0 x_{n-1}$$

quindi

$$\begin{aligned} y_n &= a_1 (a_1 y_{n-2} + a_2 y_{n-3} + b_0 x_{n-1}) + a_2 y_{n-2} + b_0 x_n \\ &= (a_1^2 + a_2) y_{n-2} + a_1 a_2 y_{n-3} + b_0 x_n + a_1 b_0 x_{n-1} \end{aligned}$$

Si può continuare in questo modo, l'iterazione successiva è

$$y_n = (a_1^2 + a_2)(a_1 + a_1 a_2) y_{n-3} + a_2 (a_1^2 + a_2) y_{n-4} + b_0 x_n + a_1 b_0 x_{n-1} + b_0 (a_1^2 + a_2) x_{n-2}$$

la parte AR viene spinta sempre più lontano nel passato, mentre cresce la parte MA ...

Il teorema di decomposizione di Wold afferma la sostanziale equivalenza delle rappresentazioni AR, MA e ARMA.

Si noti comunque che per ottenere una pura rappresentazione MA equivalente alla rappresentazione ARMA originale, ci vogliono infiniti termini MA.

Stima numerica dei coefficienti di una sequenza AR

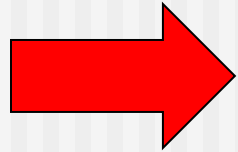
Esempio: due soli coefficienti

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2}$$

valori misurati $\{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{N-1}\}$ con errore σ_n

La stima si fa minimizzando la somma

$$S = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{(y_n - \bar{y}_n)^2}{\sigma_n^2} = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{(a_1 \bar{y}_{n-1} + a_2 \bar{y}_{n-2} - \bar{y}_n)^2}{\sigma_n^2}$$



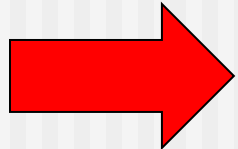
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{n=2}^{N-1} \bar{y}_{n-1} \frac{(a_1 \bar{y}_{n-1} + a_2 \bar{y}_{n-2} - \bar{y}_n)}{\sigma_n^2} = 0$$

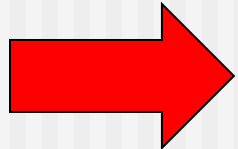
$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{n=2}^{N-1} \bar{y}_{n-2} \frac{(a_1 \bar{y}_{n-1} + a_2 \bar{y}_{n-2} - \bar{y}_n)}{\sigma_n^2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sum_2^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}^2}{\sigma_n^2} & \sum_2^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1} \bar{y}_{n-2}}{\sigma_n^2} \\ \sum_2^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1} \bar{y}_{n-2}}{\sigma_n^2} & \sum_2^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-2}^2}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_2^{N-1} \frac{\bar{y}_n \bar{y}_{n-1}}{\sigma_n^2} \\ \sum_2^{N-1} \frac{\bar{y}_n \bar{y}_{n-2}}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

Più in generale si può modellizzare con p coefficienti:

$$y_n = \sum_{k=1}^p a_k y_{n-k}$$


$$S = \sum_{n=p}^{N-1} \frac{(y_n - \bar{y}_n)^2}{\sigma_n^2} = \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\left(\sum_{k=1}^p a_k \bar{y}_{n-k} - \bar{y}_n \right)^2}{\sigma_n^2}$$


$$\sum_{k=1}^p a_k \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-j} \bar{y}_{n-k}}{\sigma_n^2} = \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-j} \bar{y}_n}{\sigma_n^2}$$

... e in forma matriciale ...

$$\begin{pmatrix}
 \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}^2}{\sigma_n^2} & \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}\bar{y}_{n-2}}{\sigma_n^2} & \dots & \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}\bar{y}_{n-p}}{\sigma_n^2} \\
 \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}\bar{y}_{n-2}}{\sigma_n^2} & \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-2}^2}{\sigma_n^2} & \dots & \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-2}\bar{y}_{n-p}}{\sigma_n^2} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}\bar{y}_{n-p}}{\sigma_n^2} & \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-2}\bar{y}_{n-p}}{\sigma_n^2} & \dots & \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-p}^2}{\sigma_n^2}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_p
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-1}\bar{y}_n}{\sigma_n^2} \\
 \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-2}\bar{y}_n}{\sigma_n^2} \\
 \vdots \\
 \sum_{n=p}^{N-1} \frac{\bar{y}_{n-p}\bar{y}_n}{\sigma_n^2}
 \end{pmatrix}$$

In generale si considera un' espressione AR a cui si aggiunge un termine di rumore bianco Gaussiano

$$y_n = - \sum_l a_l y_{n-l} + u_n$$

allora in termini di trasformata Z si ottiene

$$Y(z) = -A(z)Y(z) + U(z)$$

$$Y(z) = \frac{U(z)}{1 + A(z)} = H(z)U(z)$$

quindi

$$S_y(\omega) = \left| H(e^{-i\omega\Delta t}) \right|^2 S_u(\omega) = \left| H(e^{-i\omega\Delta t}) \right|^2 \frac{\sigma^2}{N}$$

Quindi, partendo da un segnale campionato

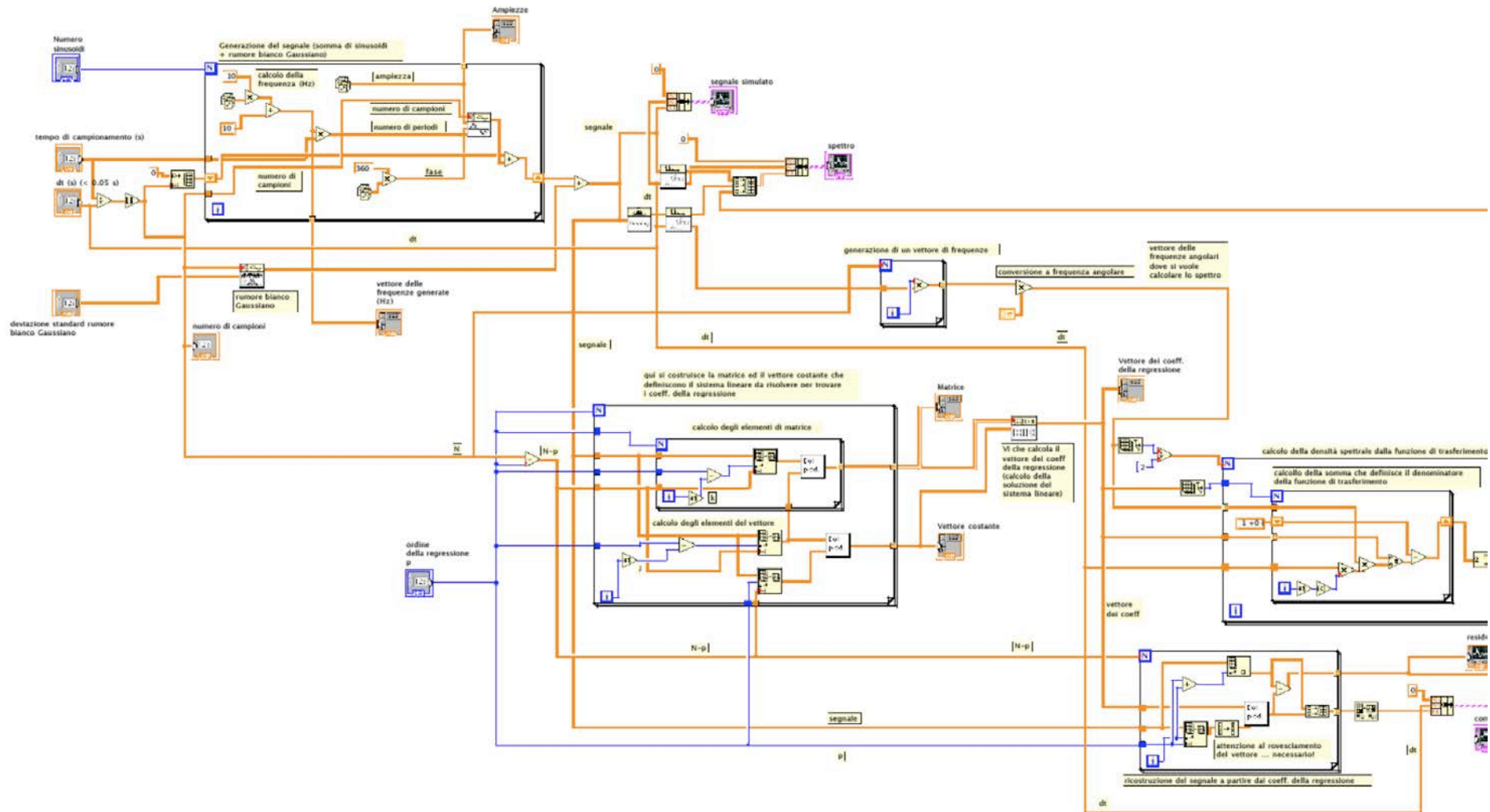
1. si trovano i coefficienti del modello autoregressivo
 - NB: il numero di coefficienti del modello va aumentato finché il residuo è un rumore bianco
2. si calcola la funzione di trasferimento del sistema da

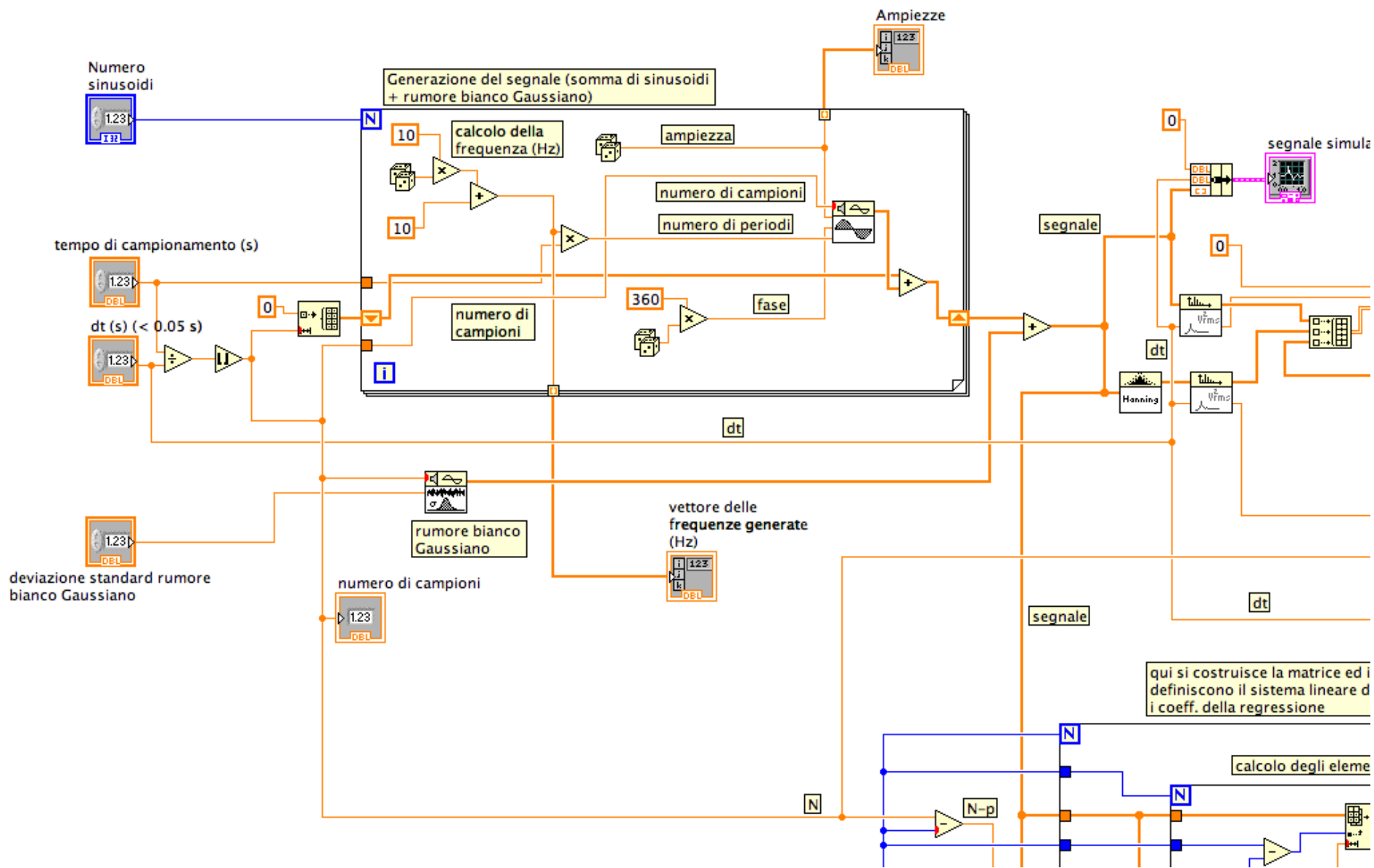
$$H(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} = \frac{\sum_k b_k z^{-k}}{1 + \sum_k a_k z^{-k}}$$

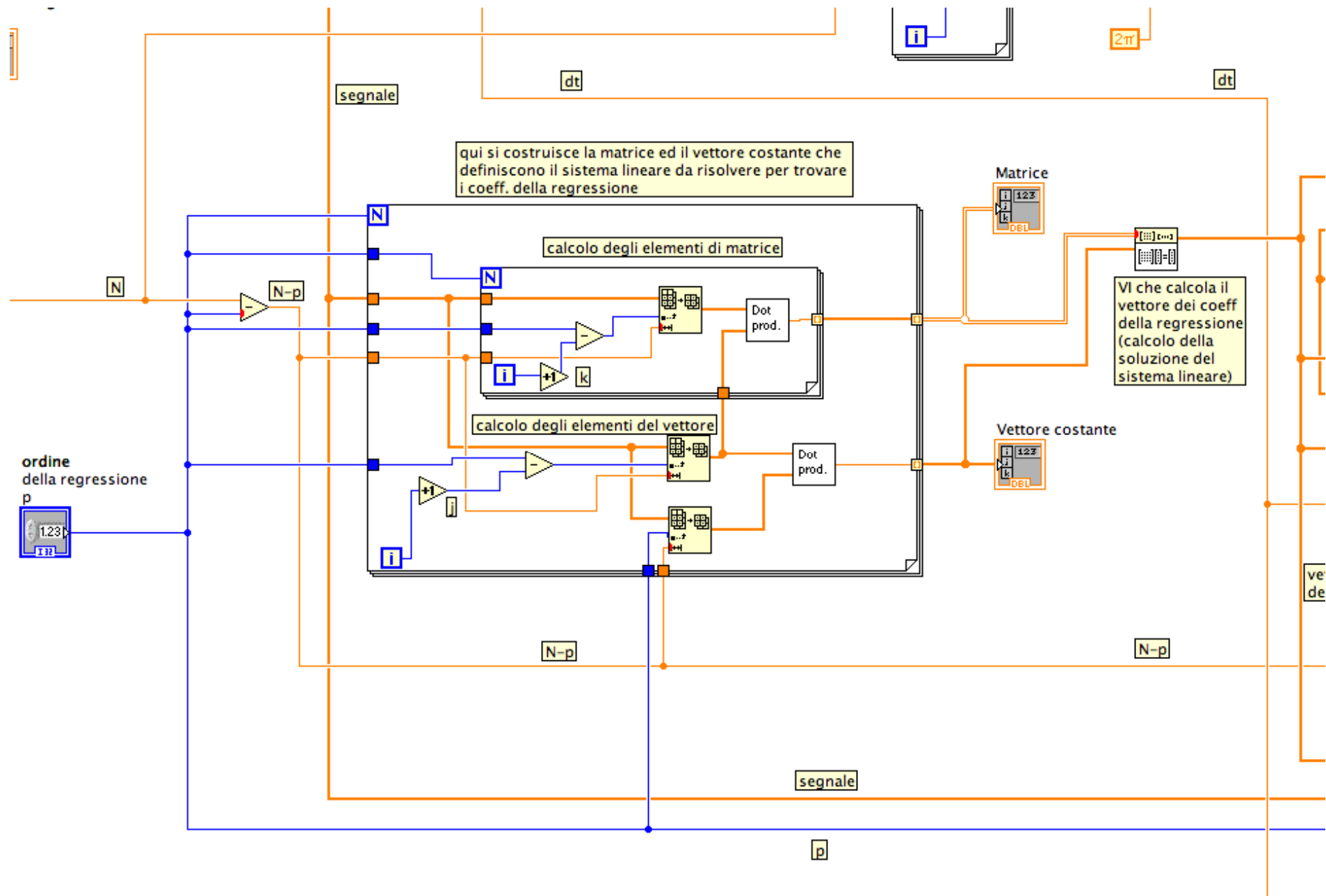
3. si calcola lo spettro dalla funzione di trasferimento

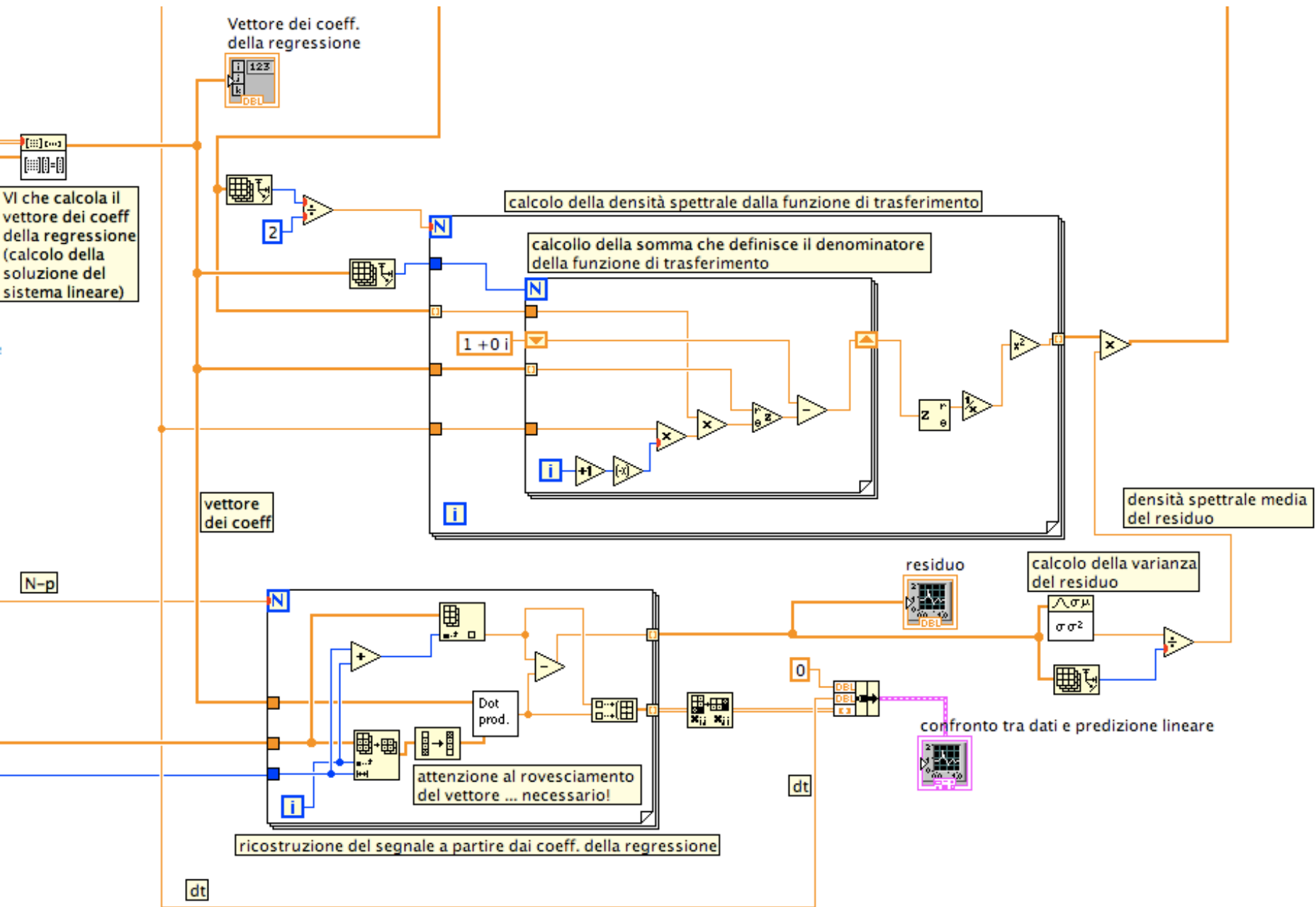
$$S_y(\omega) = \left| H(e^{-i\omega\Delta t}) \right|^2 \frac{\sigma^2}{N}$$

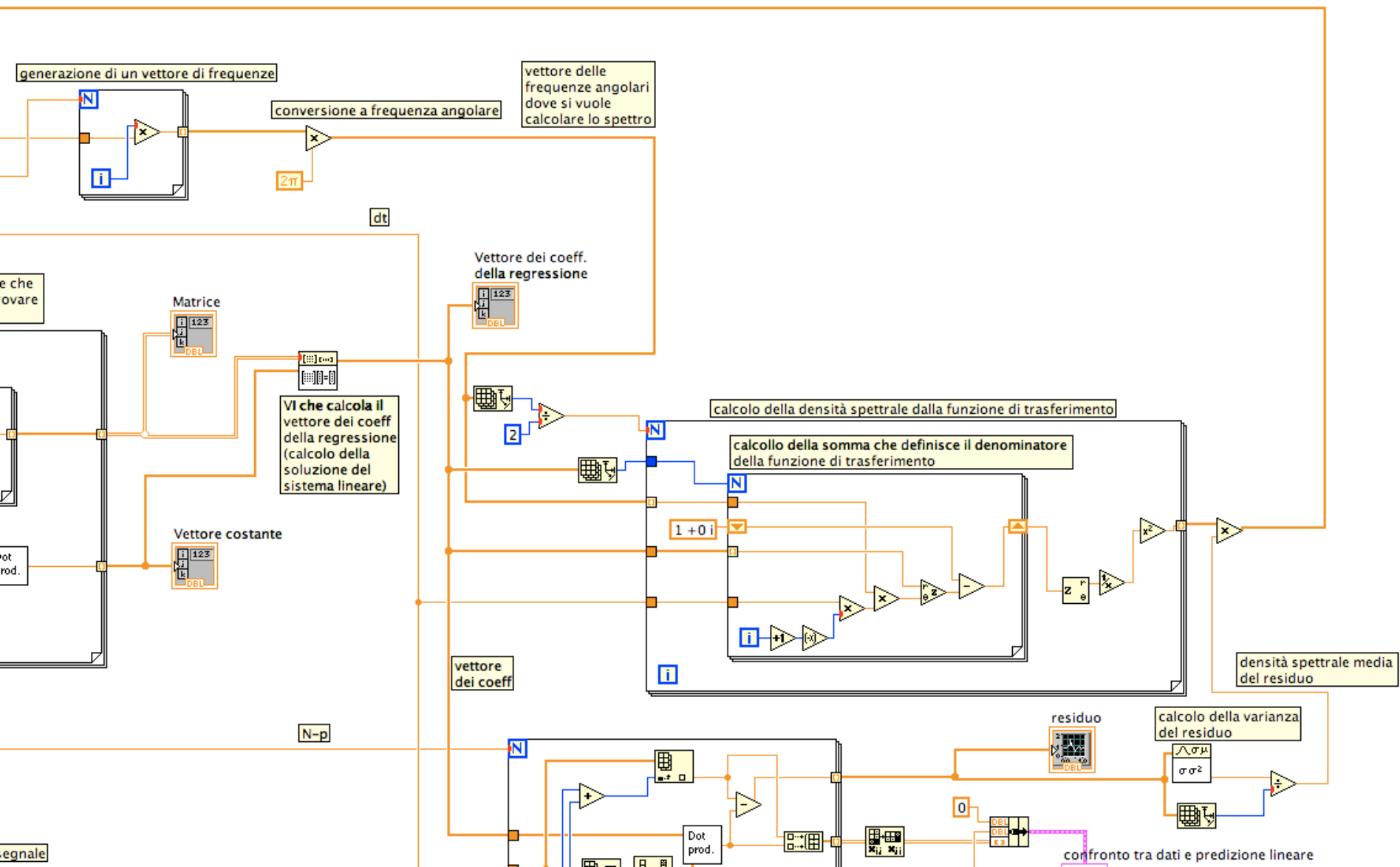
Un'implementazione in LabView dello schema autoregressivo











Numero sinusoidi
6

tempo di campionamento (s)
10

dt (s) (< 0.05 s)
0.01

deviazione standard rumore bianco Gaussiano
1.00E-6

numero di campioni
1000

Ampezze
0 0.381856

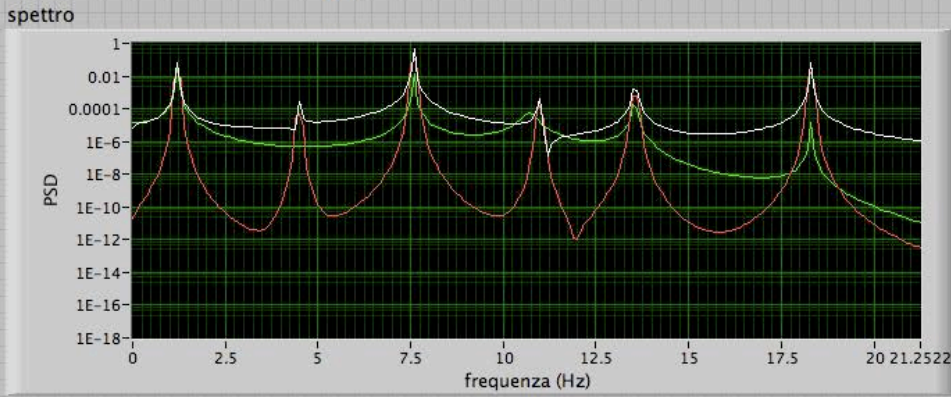
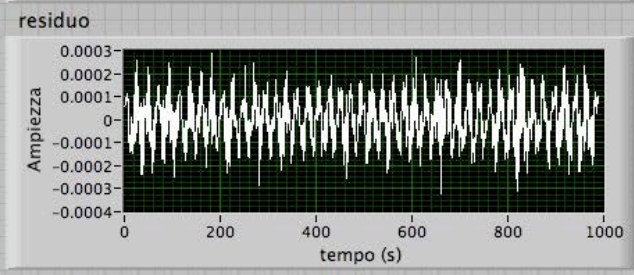
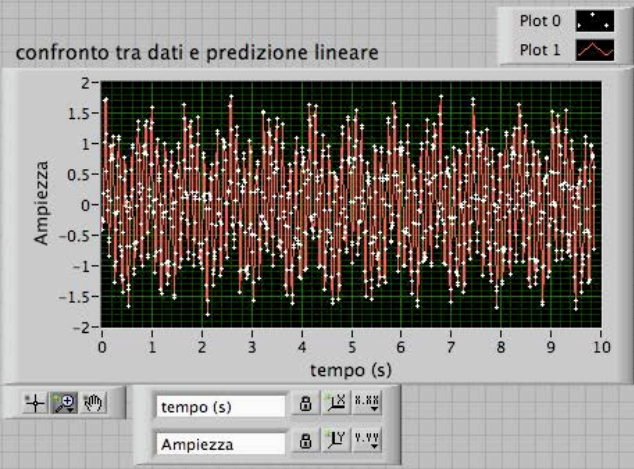
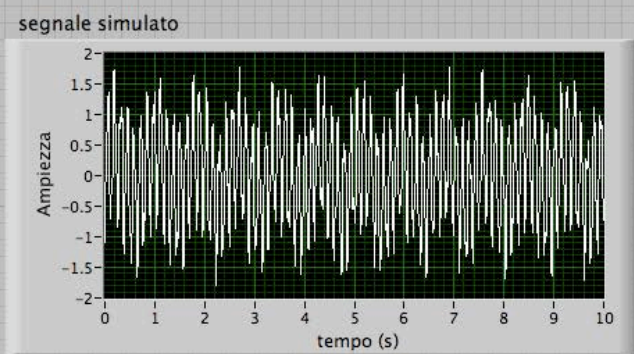
vettore delle frequenze generate (Hz)
0 1.21041

ordine della regressione p
12

Matrice
3 636.394
3

Vettore costante
0 538.387

Vettore dei coeff. della regressione
0 6.5416E+0



Spettro DFT

Spettro DFT (finestra di Hanning)

Spettro da regressione lineare

frequenza (Hz)

PSD

Filtri digitali

Le formule

$$Y(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} \cdot X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$S_{out}(\omega) = |H(e^{-i\omega\Delta t})|^2 S_{in}(\omega)$$

mostrano che il comportamento di un sistema AR, MA o ARMA è del tutto analogo a quello di un filtro, quindi sistemi come quelli che abbiamo studiato possono essere usati per costruire filtri.

I filtri digitali si realizzano normalmente con sistemi ARMA oppure sistemi MA

1. Auto Regressive (ARMA)
$$y_n = - \sum_{l=1, q-1} a_l y_{n-l} + \sum_{m=0, p-1} b_m x_{n-m}$$

2. Moving Average (MA)
$$y_n = \sum_{m=0, p-1} b_m x_{n-m}$$

- filtri realizzati a partire da una rappresentazione a media mobile (MA): in questo caso i filtri sono detti anche *filtri non ricorsivi* o *filtri FIR (Finite Impulse Response)* perché la loro rappresentazione nel dominio del tempo è definita usualmente da un numero finito di campioni del segnale di ingresso.
- filtri realizzati a partire da una rappresentazione autoregressiva (ARMA): in questo caso i filtri sono detti anche *filtri ricorsivi* o *filtri IIR (Infinite Impulse Response)* perché la loro rappresentazione nel dominio del tempo richiede un numero infinito di campioni del segnale di ingresso.
- L'ordine di un filtro è determinato dal numero di valori a tempi precedenti necessari a calcolare il valore attuale

Per studiare il comportamento del filtro digitale dobbiamo calcolare la funzione di trasferimento in corrispondenza alle frequenze del pettine della DFT

$$\omega_k = k\Delta\omega; \quad \Delta\omega = 2\pi/T = 2\pi/(N\Delta t)$$

quindi

$$\begin{aligned} H(z_k) &= H\left(e^{-ik\Delta\omega\Delta t}\right) = H\left(e^{-2\pi ik/N}\right) \\ &= \frac{B(z_k)}{1 + A(z_k)} = \frac{B\left(e^{-2\pi ik/N}\right)}{1 + A\left(e^{-2\pi ik/N}\right)} \end{aligned}$$

Esempi di filtri FIR

a. Filtro a guadagno unitario

$$y_n = x_n$$

La sequenza di uscita è uguale alla sequenza di ingresso. Questo è un filtro di ordine 0.

b. Filtro a guadagno G

$$y_n = Gx_n$$

Semplice cambio di ampiezza. Anche questo è un filtro di ordine 0

c. Ritardo

$$y_n = x_{n-m}$$

Questo è un filtro di ordine m e troviamo immediatamente che

$$Y(z) = \sum_n y_n z^n = \sum_n x_{n-m} z^n = z^m \sum_n x_n z^n = z^m X(z)$$

$$H(z) = z^m; \quad H(z_k) = \left(e^{-2\pi i k / N} \right)^m = e^{-2\pi i m k / N}$$

Si vede quindi che il filtro produce uno sfasamento.

d. Differenza a due termini

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}$$

Questo è un filtro di ordine 1 e troviamo che

$$Y(z) = \sum_n y_n z^n = \frac{1}{2}(X(z) - zX(z)) = \frac{1}{2}(1 - z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 - z)$$

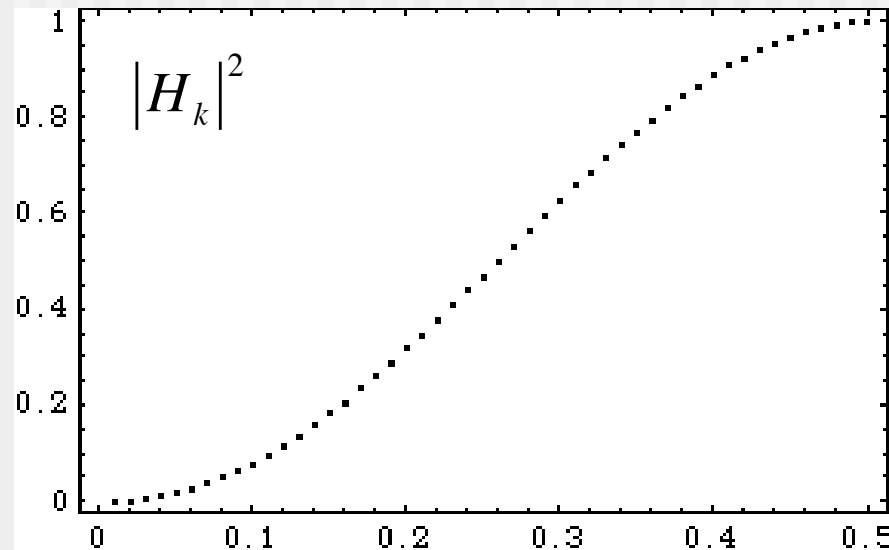
$$H(z_k) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi ik/N}) = \frac{e^{-\pi ik/N}}{2}(e^{\pi ik/N} - e^{-\pi ik/N}) = ie^{-\pi ik/N} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

e infine

$$H(e^{-2\pi ik/N}) = ie^{-\pi ik/N} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

$$\left|H(e^{-2\pi ik/N})\right|^2 = \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{N}\right)$$

La rappresentazione della risposta si fa di solito in unità di frequenza di Nyquist (che è $N/2$), quindi k va da 0 a $N/2$.



come si vede questo filtro si comporta come un filtro passa-alto (è l'equivalente di un filtro differenziatore analogico).

e. Media di due termini

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

Anche questo è un filtro di ordine 1 e troviamo che

$$Y(z) = \sum_n y_n z^n = \frac{1}{2} (X(z) + zX(z)) = \frac{1}{2} (1 + z)X(z)$$

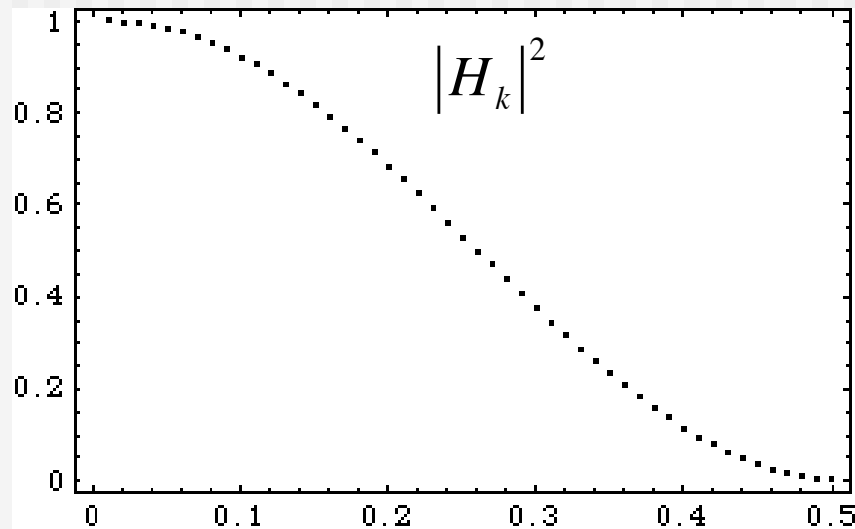
$$H(z) = \frac{1}{2} (1 + z)$$

$$H(z_k) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2\pi i k/N}) = \frac{e^{-\pi i k/N}}{2} (e^{\pi i k/N} + e^{-\pi i k/N}) = e^{-\pi i k/N} \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

e infine

$$H(e^{-2\pi i k/N}) = e^{-\pi i k/N} \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

$$\left| H(e^{-2\pi i k/N}) \right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\frac{2\pi k}{N} \right)$$



come si vede questo filtro si comporta come un filtro passa-basso (è l'equivalente di un filtro integratore analogico).

f. Media di più termini

$$y_n = \frac{1}{p} \sum_{l=0, p-1} x_{n-l}$$

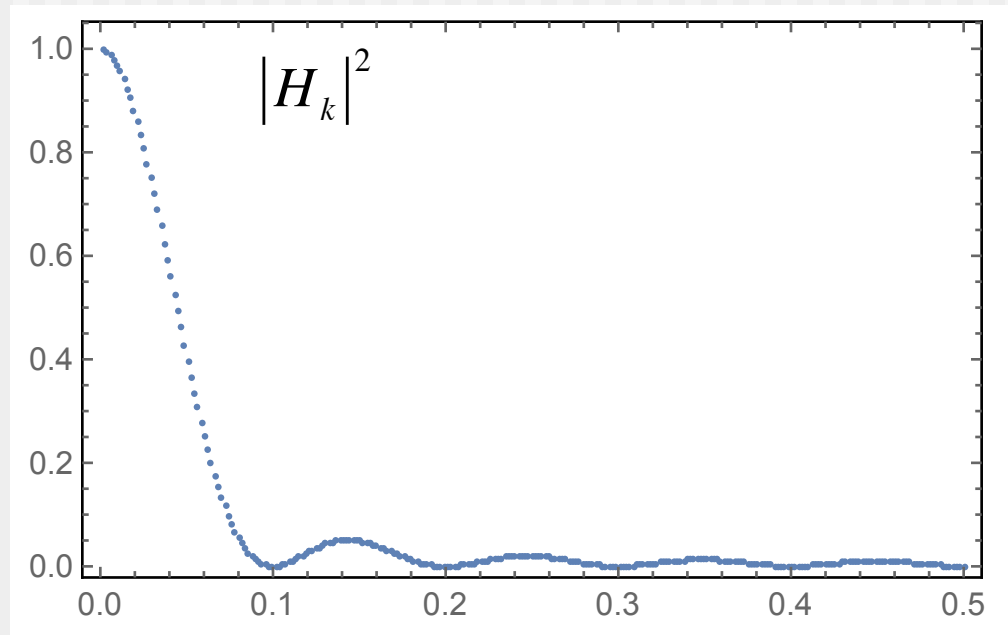
questo è un filtro di ordine $p-1$, e si trova immediatamente quanto segue

$$Y(z) = \sum_n y_n z^n = \left(\frac{1}{p} \sum_{\ell=0, p-1} z^\ell \right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0, p-1} z^\ell$$

$$H(z_k) = \frac{1}{p} \sum_{\ell=0, p-1} (e^{2\pi i k/N})^\ell = \frac{1}{p} \times \frac{1 - e^{2\pi i p k/N}}{1 - e^{2\pi i k/N}} = \frac{1}{p} e^{2\pi i (p-1)k/N} \frac{\sin(\pi p k/N)}{\sin(\pi k/N)}$$

$$|H(z_k)|^2 = \frac{1}{p^2} \frac{\sin^2(\pi p k/N)}{\sin^2(\pi k/N)}$$



($p=10$). Questo filtro si comporta come un filtro passa-basso più stretto del precedente, e la cui larghezza di banda è regolabile per mezzo del valore di p (è l'equivalente di un filtro integratore analogico, e ha una funzione di risposta simile all'irradianza di un reticolo di diffrazione ottico)

Esempi di filtri IIR

a. Filtro passa-basso

$$y_n = (1 - \alpha)x_n + \alpha y_{n-1}$$

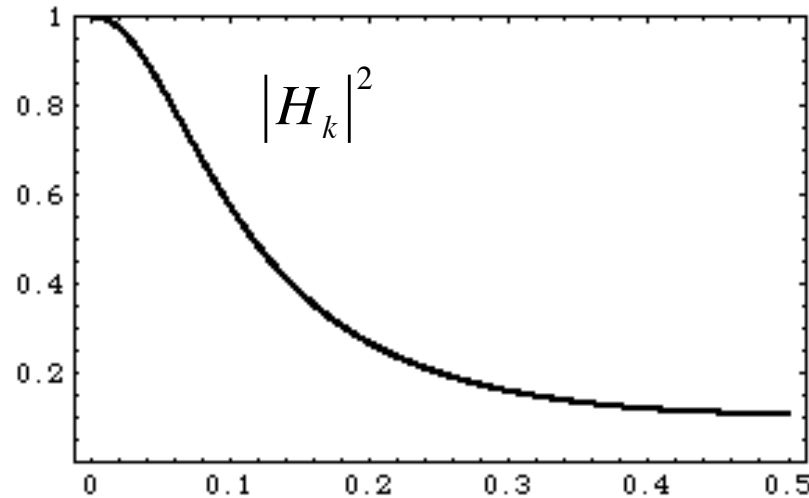
Questo è un filtro di ordine 1 e troviamo che

$$Y(z) = (1 - \alpha)X(z) + \alpha z Y(z)$$

$$H(z) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z}$$

$$H(z_k) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^{-2\pi i k / N}} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha \cos \frac{2\pi k}{N} - i\alpha \sin \frac{2\pi k}{N}}$$

$$|H(z_k)|^2 = \frac{(1 - \alpha)^2}{\left(1 - \alpha \cos \frac{2\pi k}{N}\right)^2 + \alpha^2 \sin^2 \frac{2\pi k}{N}} = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 + \alpha^2) - 2\alpha \cos \frac{2\pi k}{N}}$$



come si vede questo è un filtro passa-basso. Inoltre se si prende $N \gg k$ e $f = k/N$ si può espandere il coseno in serie e si trova

$$|H(f)|^2 \approx \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\alpha^2) - 2\alpha \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^2 \right]} = \frac{(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2 + \alpha(2\pi f)^2} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} (2\pi f)^2}$$

e quindi il filtro approssima il comportamento di un filtro RC con costante di tempo

$$RC = \sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}}$$

b. Filtro generico di secondo ordine

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2}$$

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2) X(z) - (b_1 z + b_2 z^2) Y(z)$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{1 + b_1 z + b_2 z^2}$$

$$|H_k|^2 = \left| H\left(e^{-2\pi i k/N}\right) \right|^2 = \left| \frac{a_0 + a_1 e^{-2\pi i k/N} + a_2 e^{-4\pi i k/N}}{1 + b_1 e^{-2\pi i k/N} + b_2 e^{-4\pi i k/N}} \right|^2$$

e si vede immediatamente che è possibile regolare la risposta del filtro scegliendo opportunamente gli zeri del numeratore (in corrispondenza ai quali il filtro ha il massimo assorbimento) e gli zeri del denominatore (detti poli della funzione di sistema, in corrispondenza ai quali il filtro ha la massima trasparenza). È possibile avere filtri con più zeri e più poli, ovviamente, ed è possibile progettare filtri molto complessi.

Sfasamento prodotto dai filtri

Esempio: media a due termini

$$H(z) = \frac{1}{2}(1+z)$$

$$H\left(e^{-2\pi ik/N}\right) = e^{-\pi ik/N} \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} \arg H\left(e^{-2\pi ik/N}\right) &= \arg \frac{(1+e^{-2\pi ik/N})}{2} = -\arctan \frac{\sin 2\pi k/N}{1+\cos 2\pi k/N} \\ &= -\arctan \frac{2 \sin \pi k/N \cos \pi k/N}{2 \cos^2 \pi k/N} = -\frac{\pi k}{N} \end{aligned}$$

nel caso di questo semplice filtro, lo sfasamento cresce linearmente con la frequenza.

Filtri a sfasamento zero

$$y_n = \frac{x_{n+1} + x_n + x_{n-1}}{3}$$

$$Y(z) = \frac{1}{3}(z^{-1} + 1 + z)X(z)$$

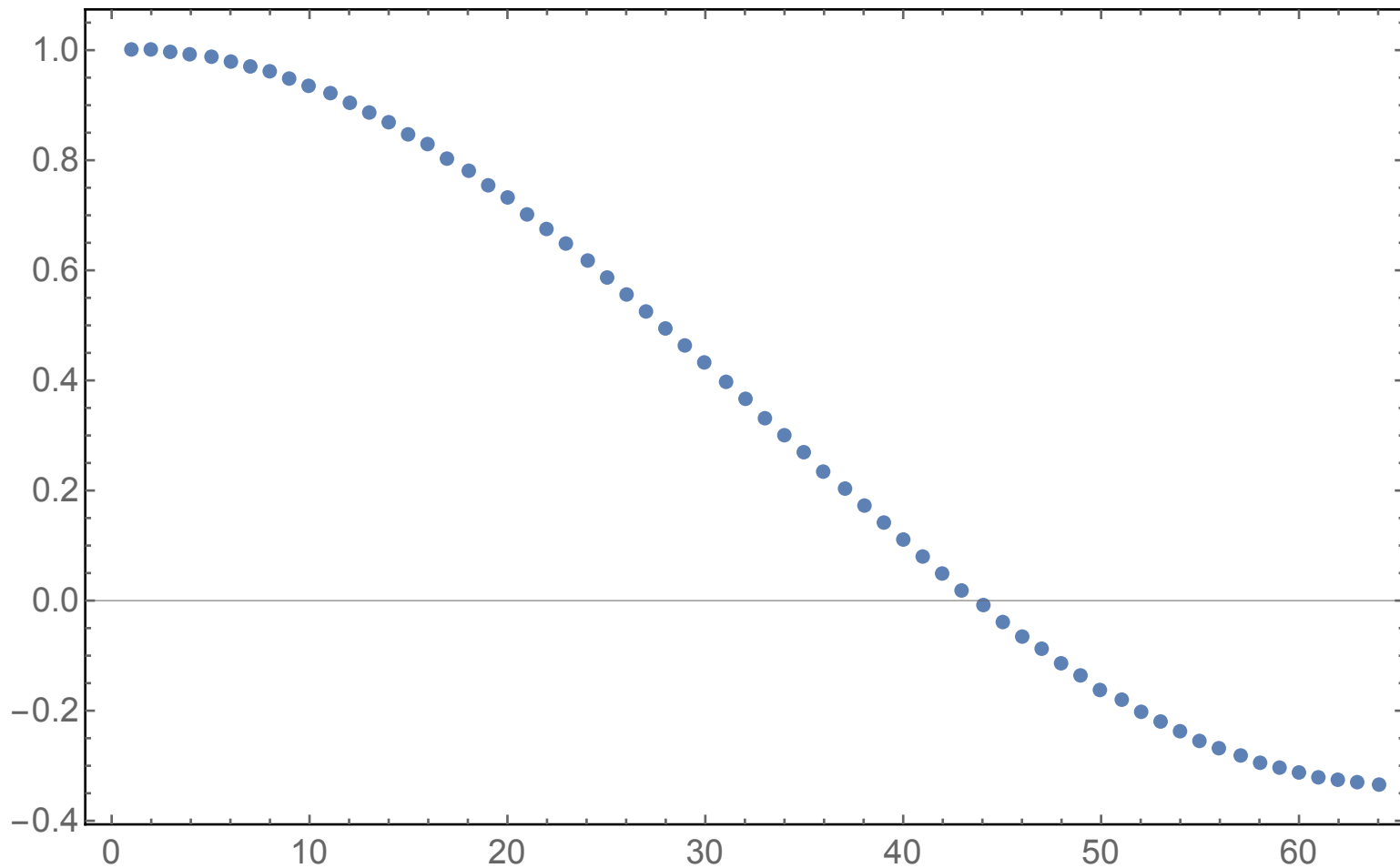
$$H(z) = \frac{1}{3}(z^{-1} + 1 + z)$$

$$H\left(e^{-2\pi ik/N}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + e^{2\pi ik/N} + e^{-2\pi ik/N}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi k}{N}\right)$$

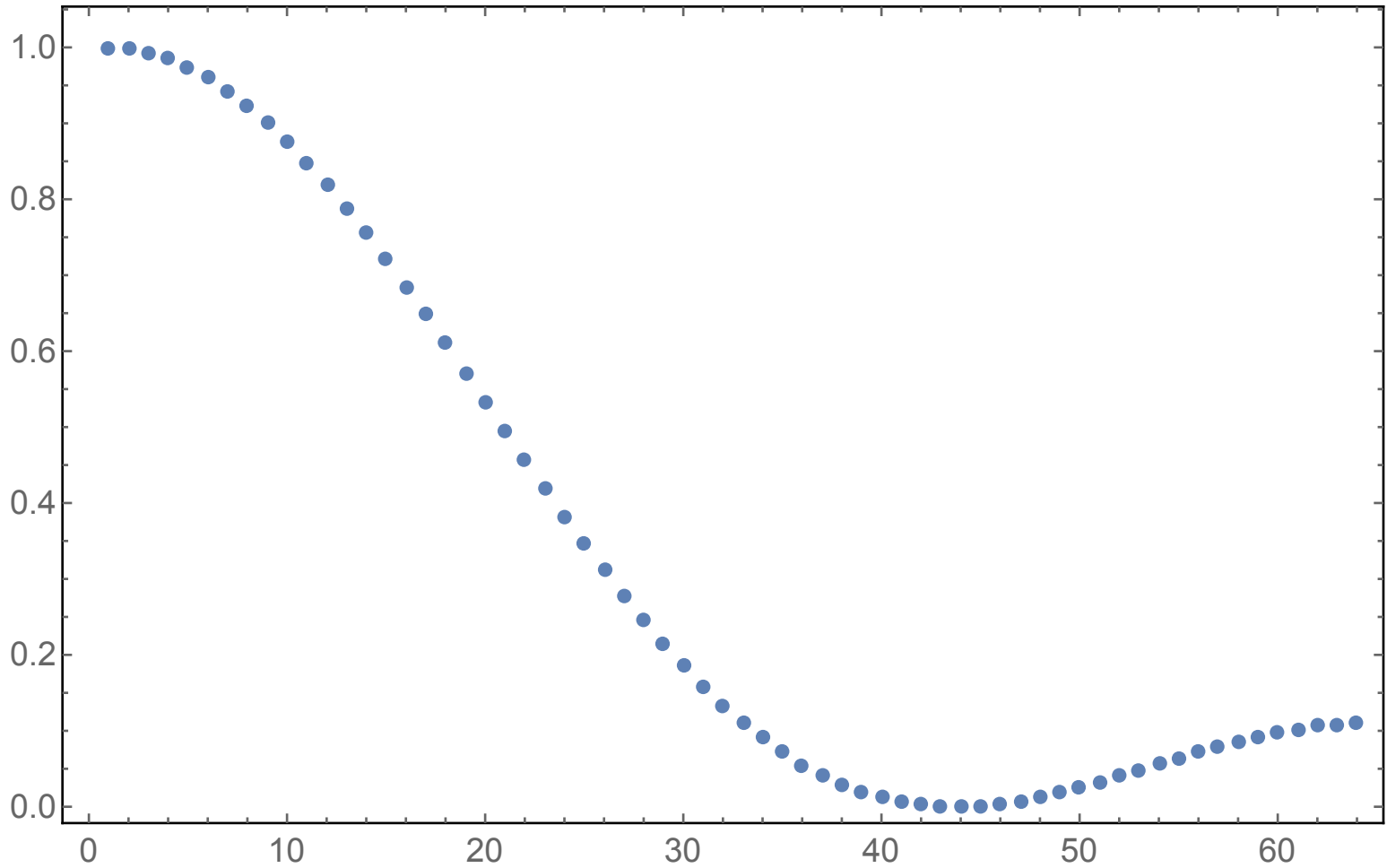
$$|H_k|^2 = \left|H\left(e^{-2\pi ik/N}\right)\right|^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi k}{N}\right)^2$$

$$\arg H_k = 0$$

H_k vs k



$$|H_k|^2 \text{ vs } k$$



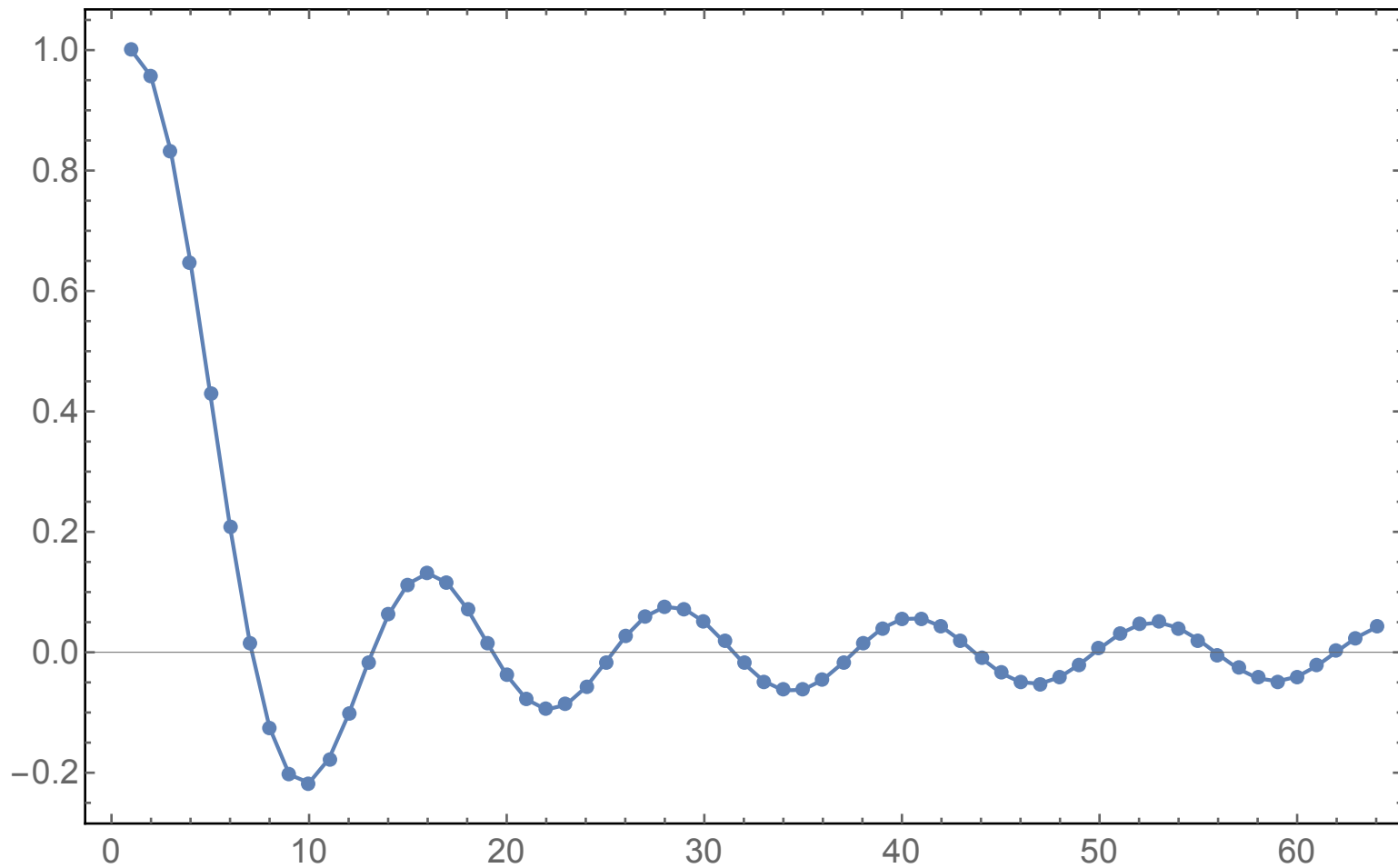
Filtro a sfasamento zero di ordine più alto

$$y_n = \sum_{l=-p}^p a_l x_{n-l} \quad (a_{-l} = a_l)$$

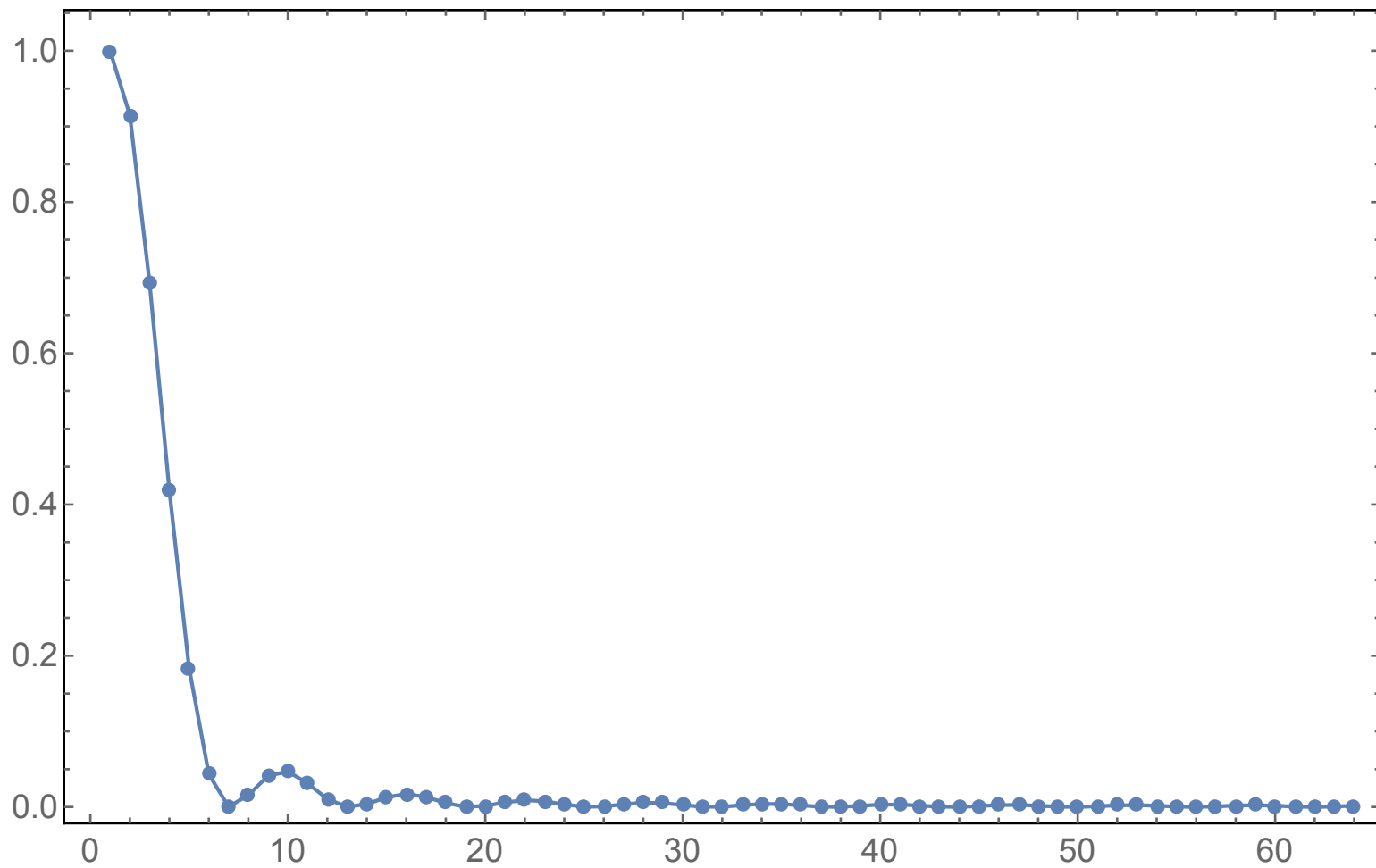
Anche in questo caso è facile calcolare la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} H_k &= H(e^{-2\pi i k/N}) = \sum_{l=-p}^p a_l e^{-2\pi i k l/N} \\ &= a_0 + 2 \sum_{l=1}^p a_l \cos(2\pi k l/N) \end{aligned}$$

H_k vs k

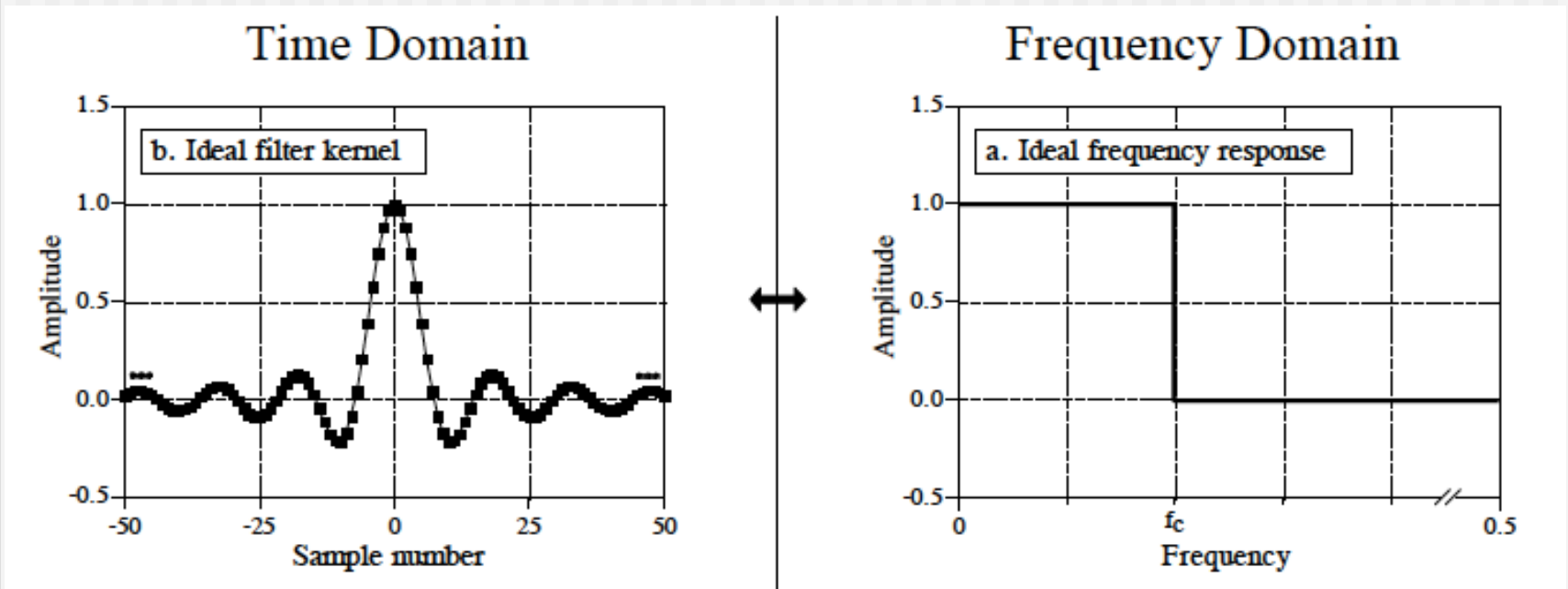


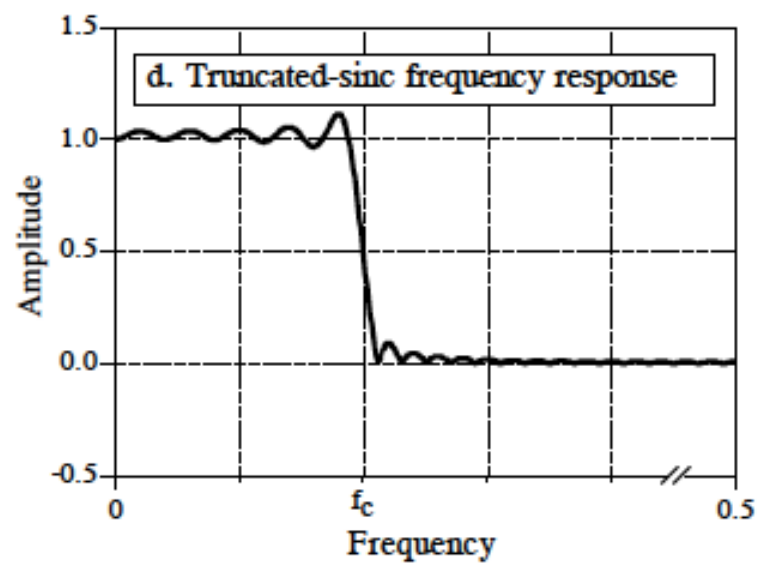
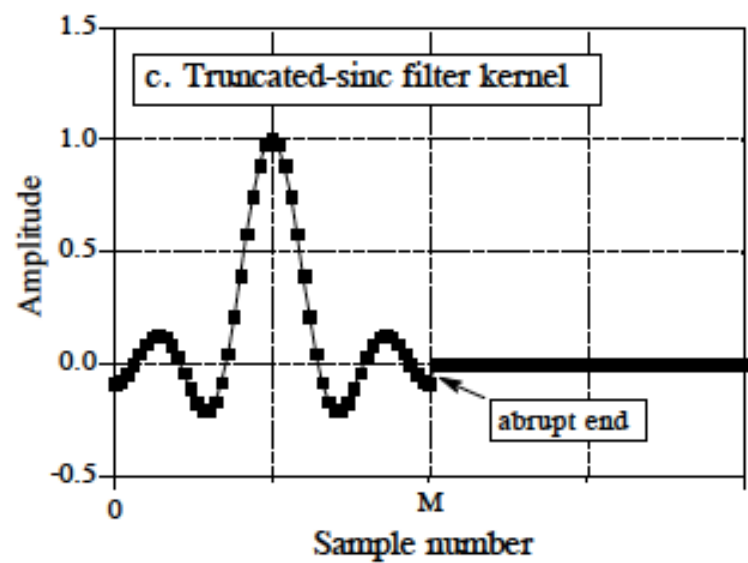
$|H_k|^2$ vs k



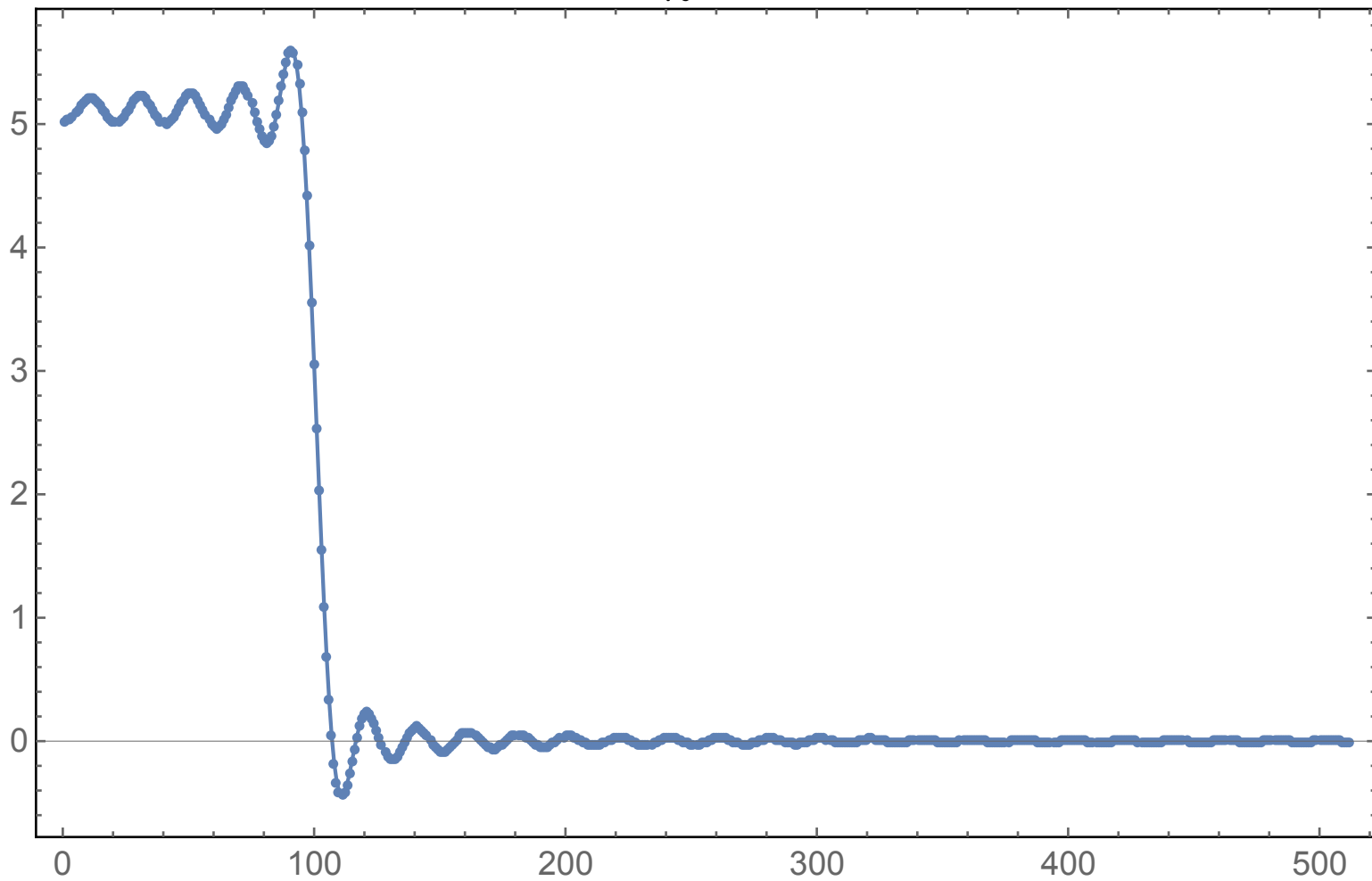
Windowed-sinc filter

$$a_l = \text{sinc}(2\pi l f_c)$$

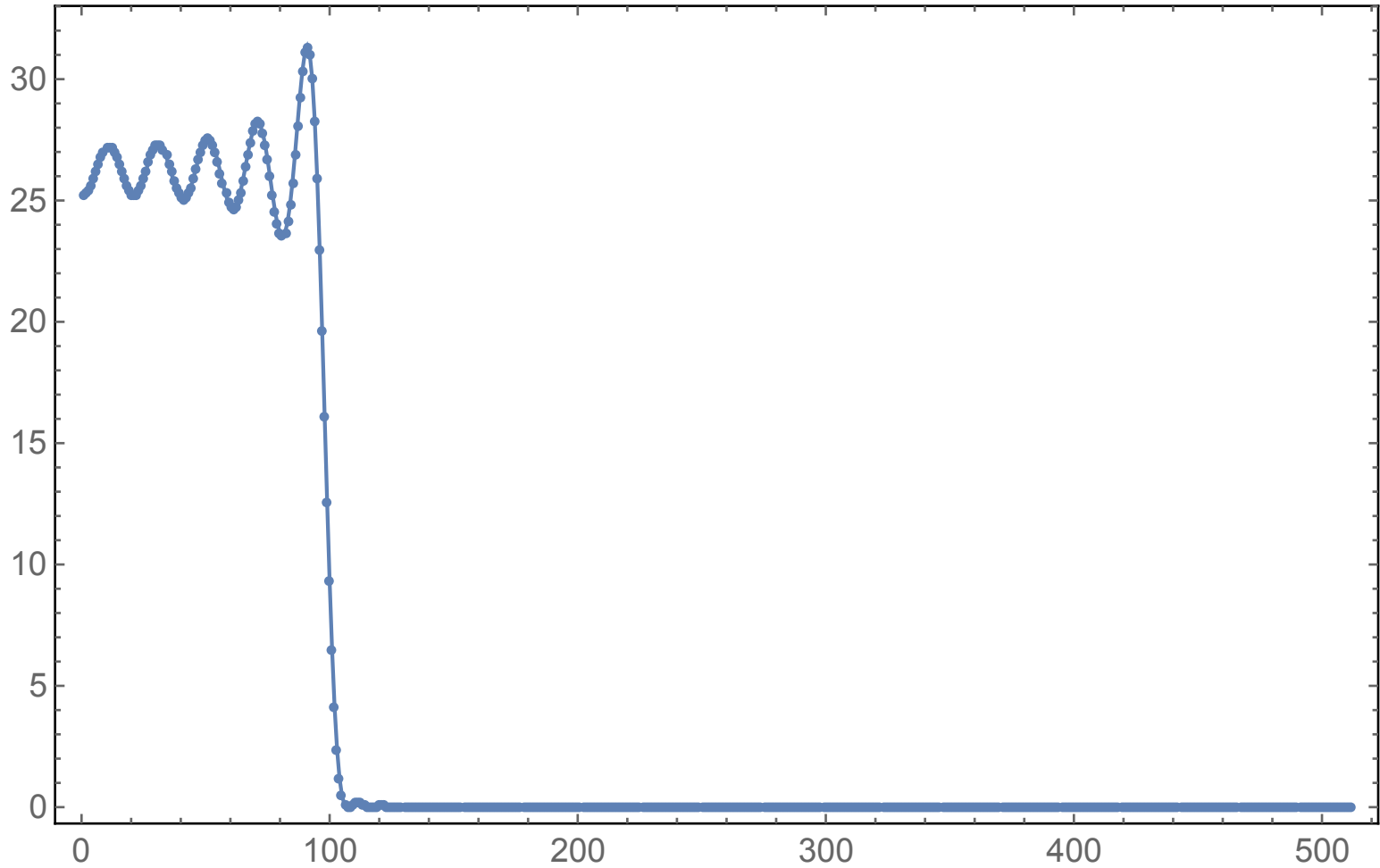


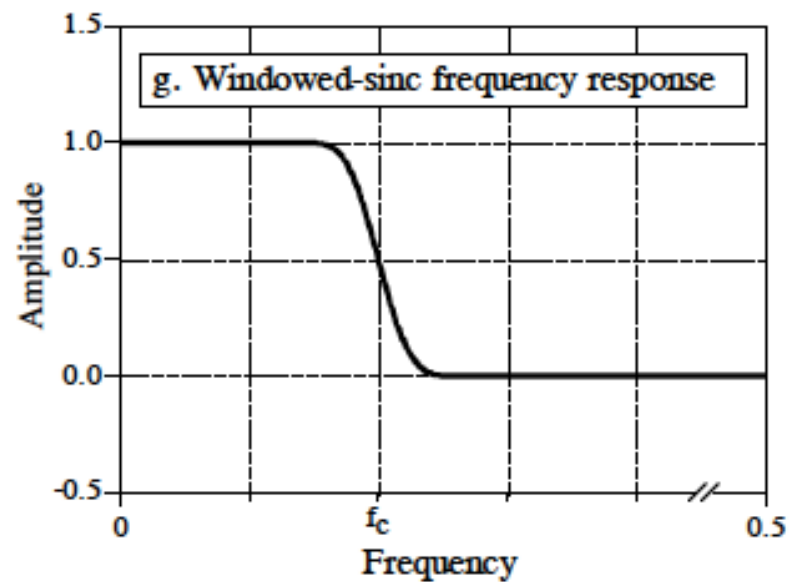
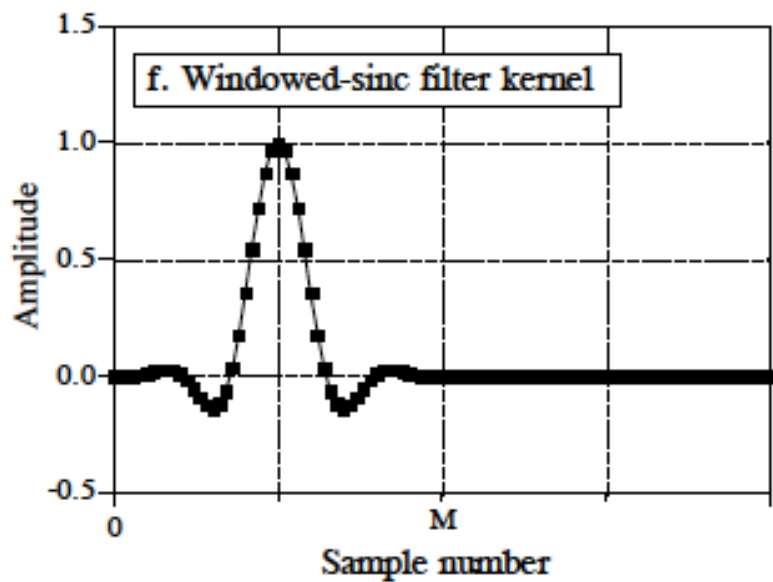
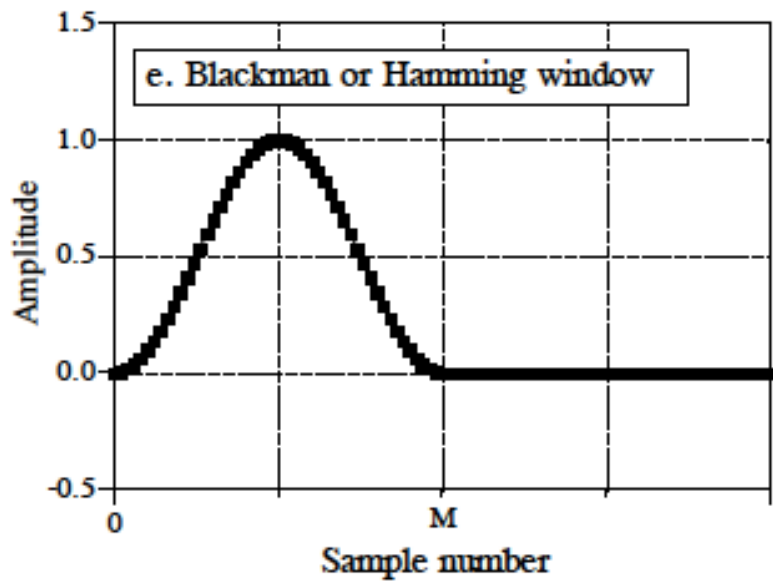


H_k vs k



$$|H_k|^2 \text{ vs } k$$





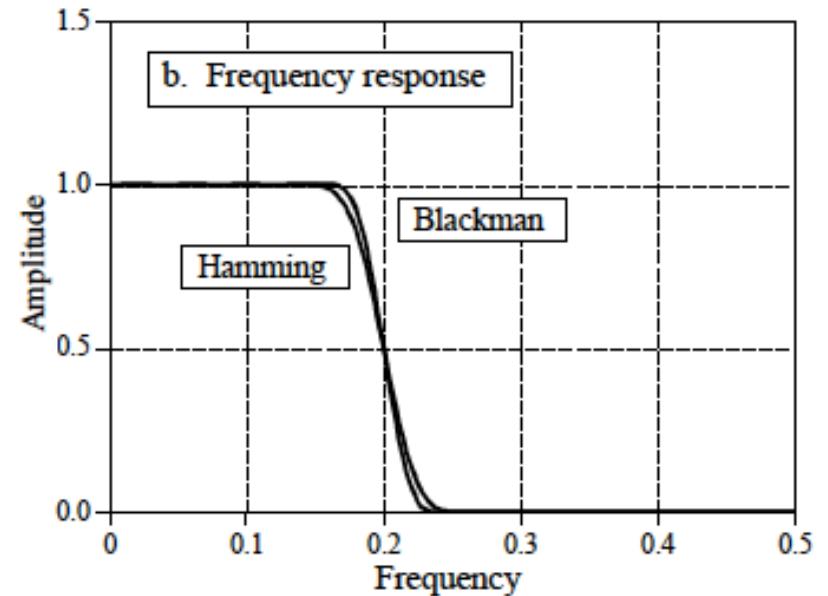
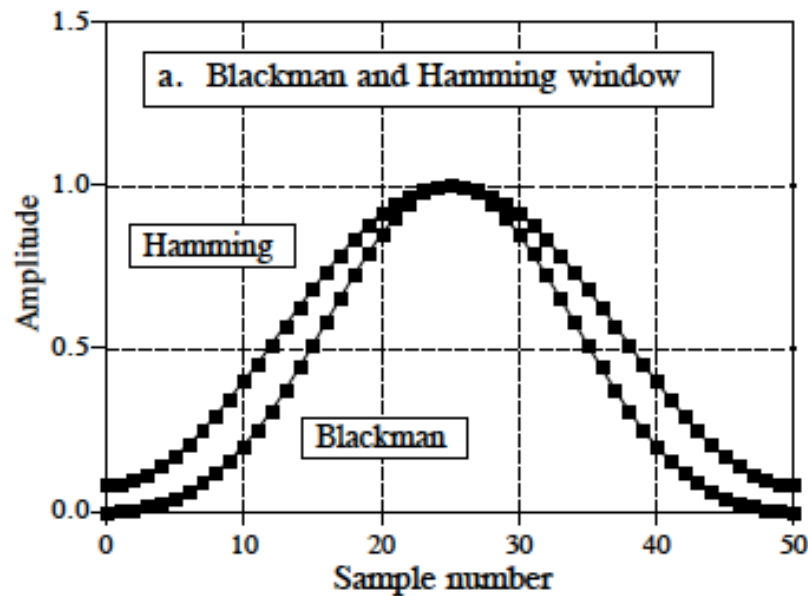
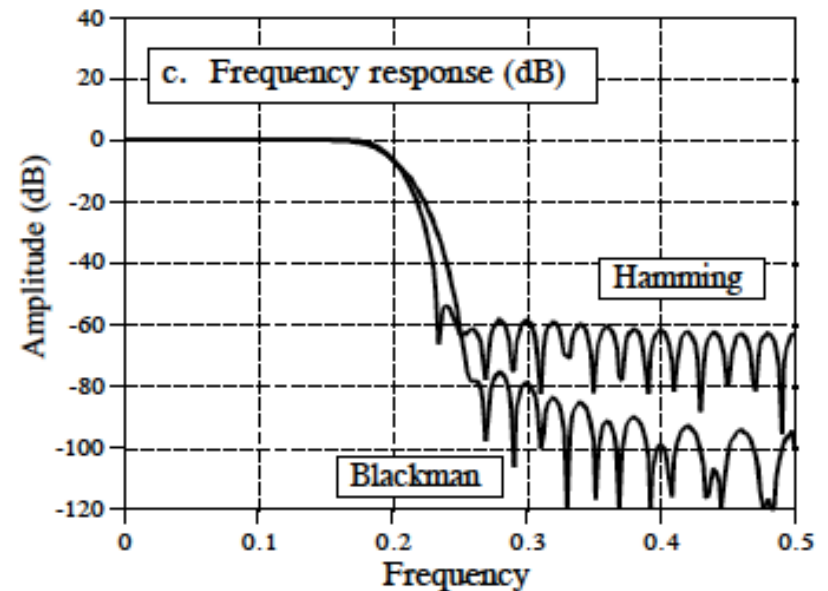


FIGURE 16-2

Characteristics of the Blackman and Hamming windows. The shapes of these two windows are shown in (a), and given by Eqs. 16-1 and 16-2. As shown in (b), the Hamming window results in about 20% faster roll-off than the Blackman window. However, the Blackman window has better stop-band attenuation (Blackman: 0.02%, Hamming: 0.2%), and a lower passband ripple (Blackman: 0.02% Hamming: 0.2%).



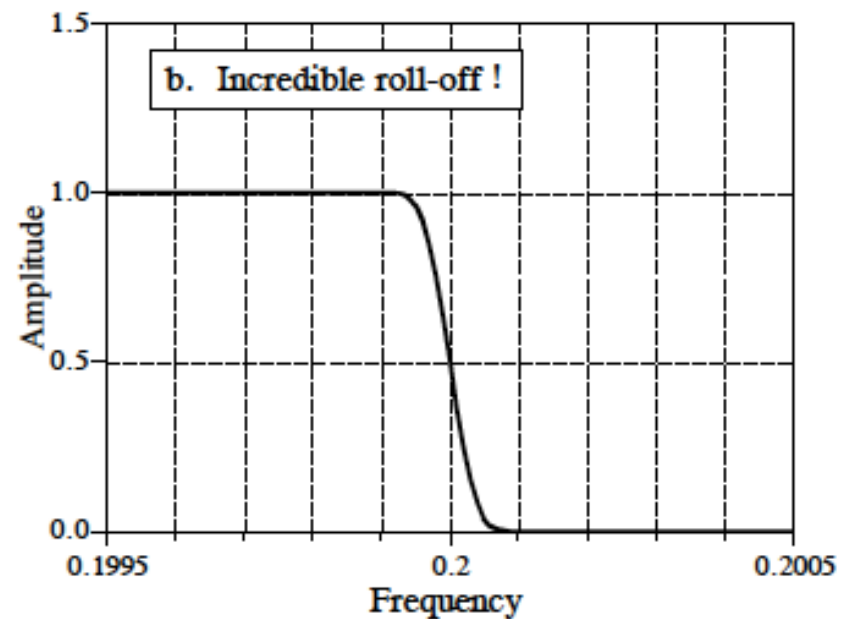
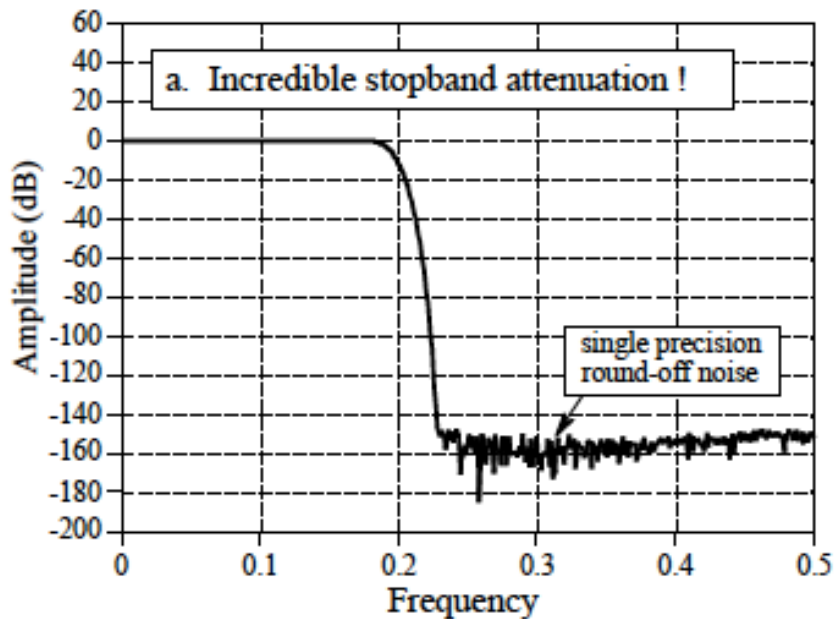


FIGURE 16-7

The incredible performance of the windowed-sinc filter. Figure (a) shows the frequency response of a windowed-sinc filter with increased stopband attenuation. This is achieved by convolving a windowed-sinc filter kernel with itself. Figure (b) shows the very rapid roll-off a 32,001 point windowed-sinc filter.

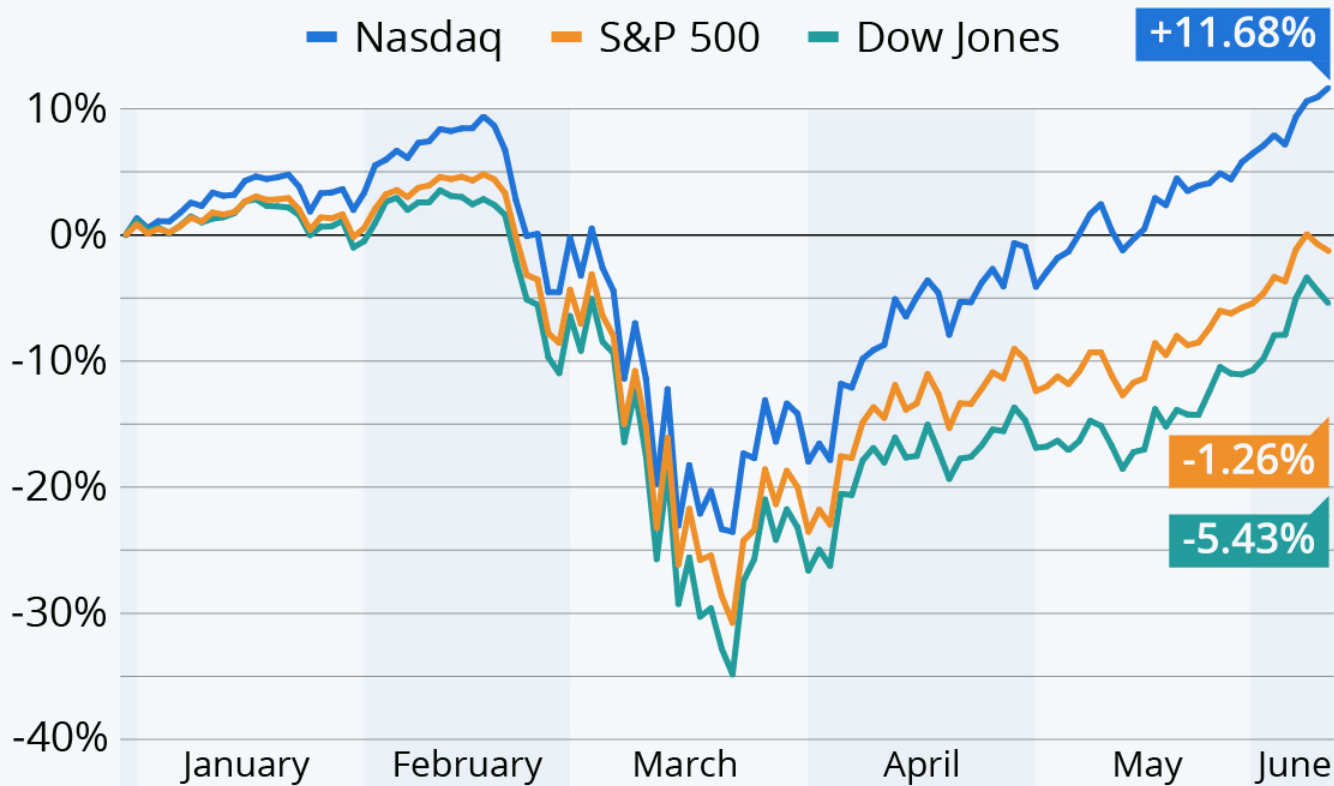
Applicabilità del formalismo delle serie temporali

Questo tipo di formalismo ha vasta applicabilità in campi diversi dall'analisi spettrale o dalla sintesi dei filtri digitali.

Ad esempio in economia molti processi vengono campionati con passi equispaziati in tempo e viene prodotta un'impressionante mole di dati che poi vengono di solito analizzati con metodi formalmente analoghi a quelli qui adottati.

Has the Stock Market Moved On From COVID-19?

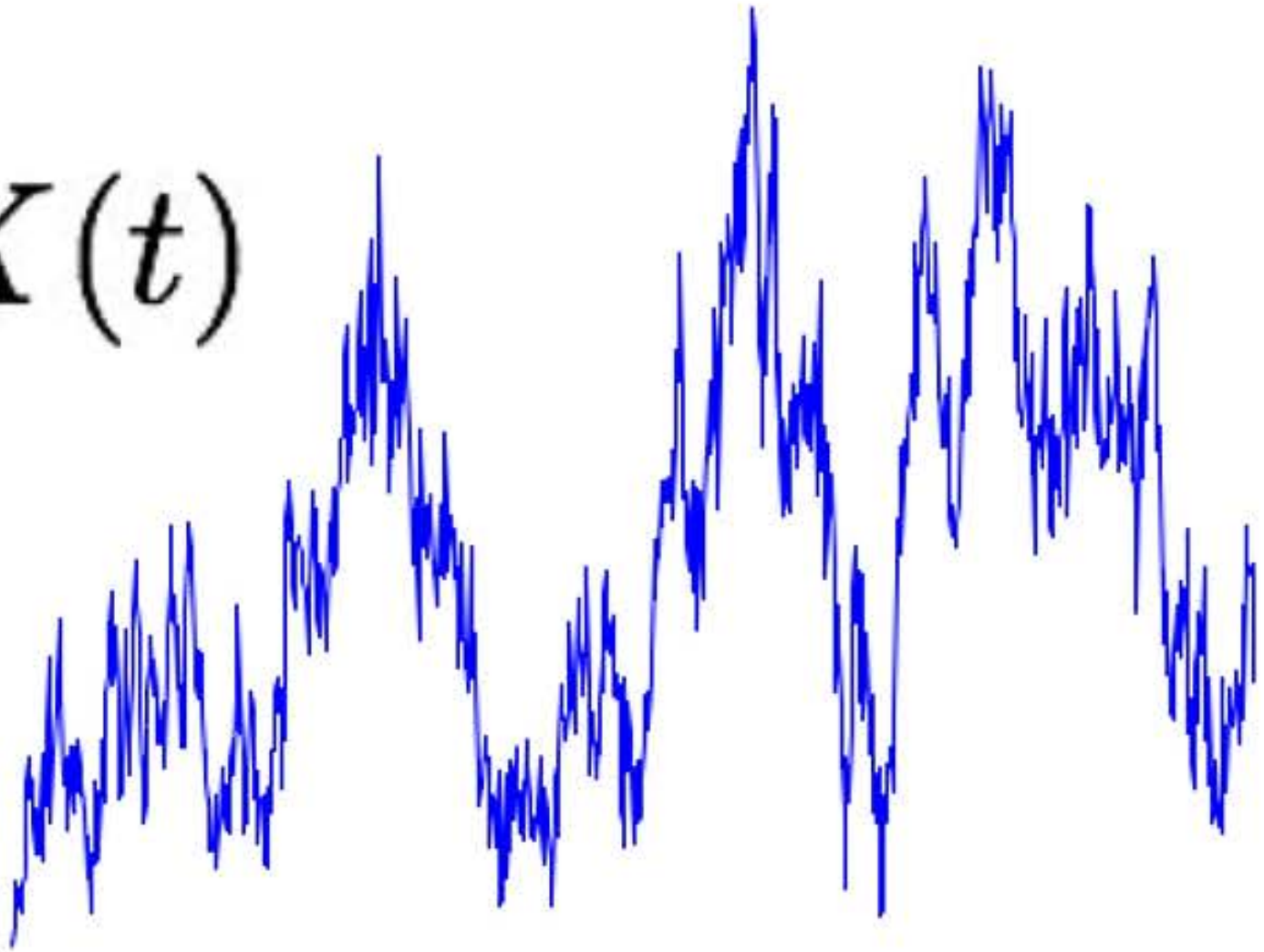
Year-to-date performance of major U.S. stock market indices as of June 10, 2020



Source: Yahoo! Finance



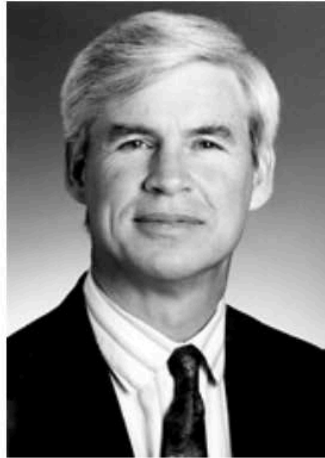
$X(t)$



Esempio di segnale nervoso (tratto da Blythe DAJ, Nikulin VV (2017) Long- range temporal correlations in neural narrowband time-series arise due to critical dynamics. PLoS ONE 12(5): e0175628. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0175628>)

Causalità di Granger

Uno dei concetti legati alle serie temporali economiche è quello della “causalità di Granger”, introdotto da C. Granger nel 1967.



Robert F. Engle III

Prize share: 1/2



Clive W.J. Granger

Prize share: 1/2

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2003 was divided equally between Robert F. Engle III *"for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)"* and Clive W.J. Granger *"for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration)"*.

L'idea è che se ci sono due processi X e Y in un universo U allora si calcolano le probabilità

$$P(Y|U); \quad P(Y|U - X); \quad P(X|U); \quad P(X|U - Y);$$

in modo da vedere se la presenza di uno o l'altro processo influenza la probabilità di ottenere la serie temporale dell'altro.

Esempio: due serie temporali dei processi e e c

$$e_n = \mu^{(e)} + \sum_{i=1}^L \alpha_i^{(e)} e_{n-i} + \sum_{i=1}^L \beta_i^{(e)} c_{n-i} + \varepsilon_n^{(e)}$$

$$c_n = \mu^{(c)} + \sum_{i=1}^L \beta_i^{(c)} c_{n-i} + \sum_{i=1}^L \alpha_i^{(c)} e_{n-i} + \varepsilon_n^{(c)}$$

un processo NON influenza l'altro se i coefficienti beta (nel primo caso) o alfa (nel secondo) sono nulli.

Nel 1988 Thurman e Fisher hanno applicato queste idee ad un problema molto importante e da lungo tempo irrisolto...

Amer. J. Agr. Econ.

Chickens, Eggs, and Causality, or Which Came First?

Walter N. Thurman and Mark E. Fisher

Time-series evidence from the United States indicates unidirectional causality from eggs to chickens.

Part 1: Did the Chicken Come First?

The following equation was estimated by OLS:

$$Eggs_t = \mu = \sum_{i=1}^L \alpha_i Eggs_{t-i} + \sum_{i=1}^L \beta_i Chickens_{t-i} + \epsilon_t;$$

$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_L = 0$ (chickens do not Granger cause eggs).

<u>$L = \text{no.}$</u> <u>of lags</u>	<u>F-</u> <u>statistic</u>	<u>P-value</u>	<u>R^2 of the</u> <u>regression</u>
1	.04	.85	.96
2	1.71	.19	.97
3	1.10	.36	.97
4	.79	.54	.97

Part 2: Did the Egg Come First?

The following equation was estimated by OLS:

$$Chickens_t = \mu + \sum_{i=1}^L \alpha_i Chickens_{t-i} + \sum_{i=1}^L \beta_i Eggs_{t-i};$$

$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_L = 0$ (eggs do not Granger cause chickens).

<u>$L = \text{no.}$ <u>of lags</u></u>	<u>F- statistic</u>	<u>P-value</u>	<u>R^2 of the regression</u>
1	1.23	.27	.73
2	10.36	.0002	.81
3	5.85	.0019	.81
4	4.71	.0032	.82

Data source: U.S. Department of Agriculture, 1983 and others.
Note: The data are annual, 1930–83.

The egg came first !!!

Suggestions for Future Research

The structural implications of our results are not yet clear. To draw them out fully will require collaboration between economists and poultry scientists. The potential here is great. As to other questions of temporal ordering, the chicken and egg question is only the most obvious application of causality testing. Other fruitful areas of research include the testing of “He who laughs last laughs best” and the multivariate “Pride goeth before destruction, and an haughty spirit before a fall.”