La radiazione di corpo nero e una semplice misura della costante di Planck

Edoardo Milotti

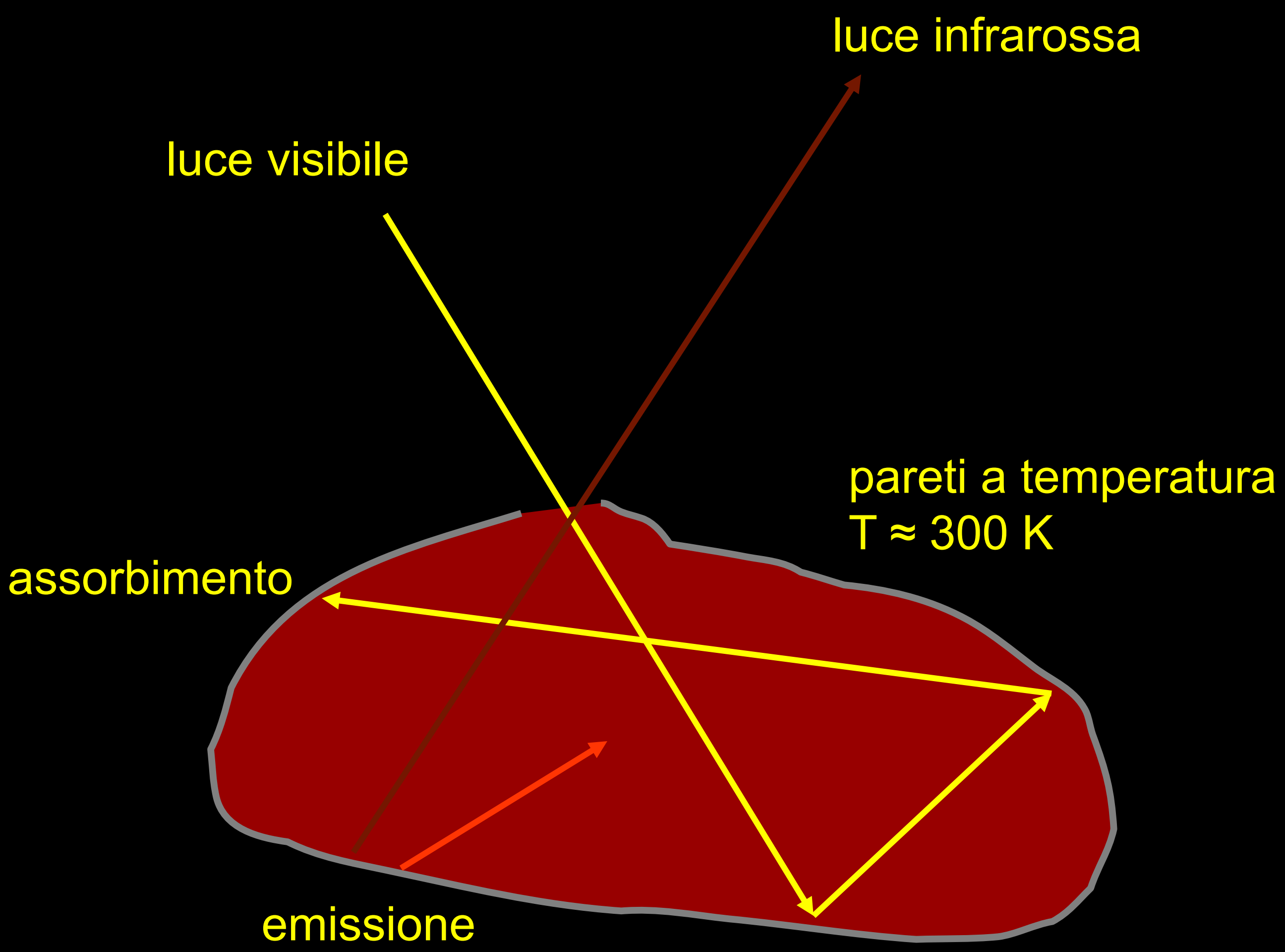
Metodi di Trattamento dei Segnali

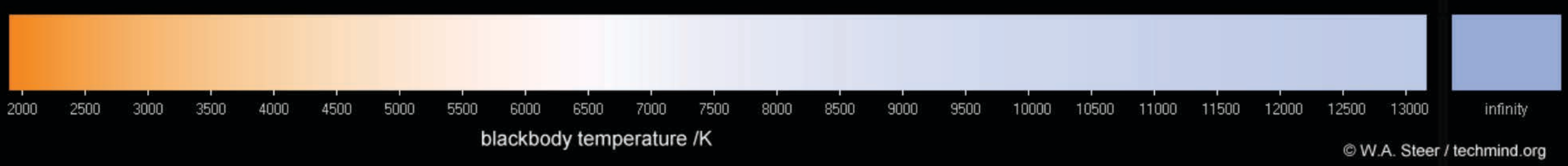
A. A. 2017-18

Il flusso lavico che scende dal cratere del vulcano Stromboli verso il mare (6 marzo 2007, foto di M. Fulle, http://www.swisseduc.ch/stromboli/).

foto dal sito http://www.powning.com/jake/home/j_homepg.shtml

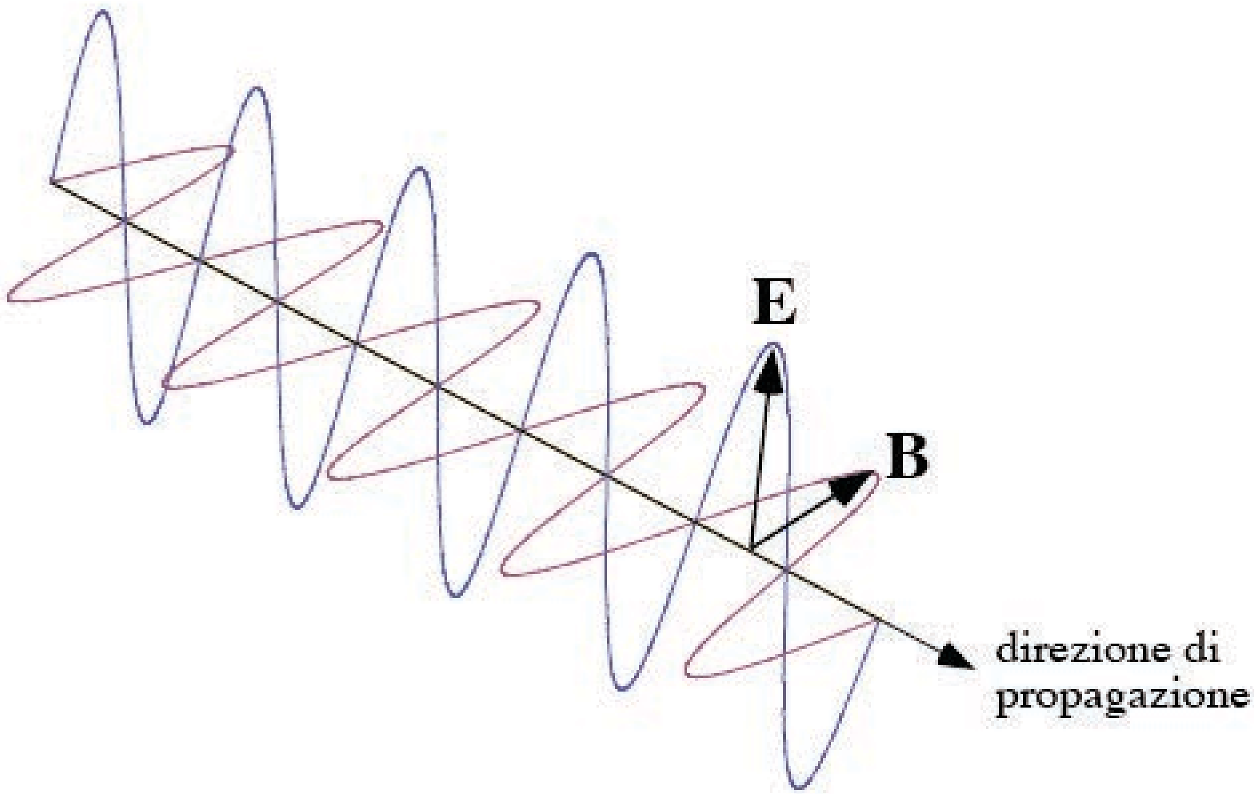
Corpo nero a temperatura ambiente



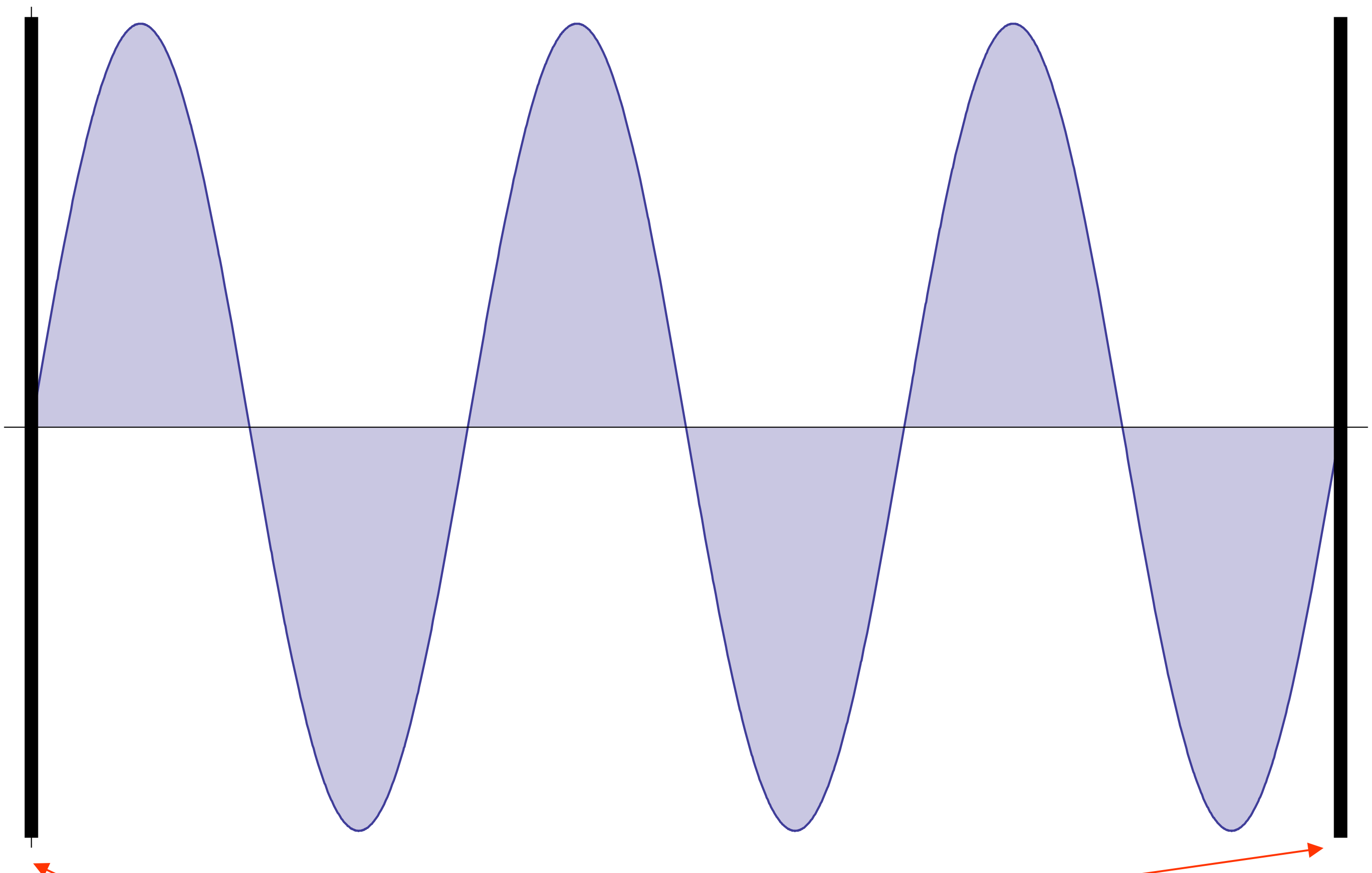


il colore di un corpo nero a diverse temperature

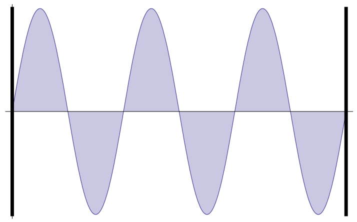
Onde elettromagnetiche



Onde elettromagnetiche in una cavità 1D



pareti della cavità



Ciò significa che la cavità può contenere solo un numero intero di mezze lunghezze d’onda, così che se *L* è la lunghezza della cavità, allora il campo stazionario contenuto nella cavità deve avere una lunghezza d’onda tale che

$$L = n\lambda/2$$

dove *n* è un intero > 0

le frequenze permesse del campo elettrico sono date da

$$\nu = n \frac{c}{2L} = n\nu_0$$

e il numero di semionde all'interno della cavità è dato da

$$n = \frac{2L}{c}\nu$$

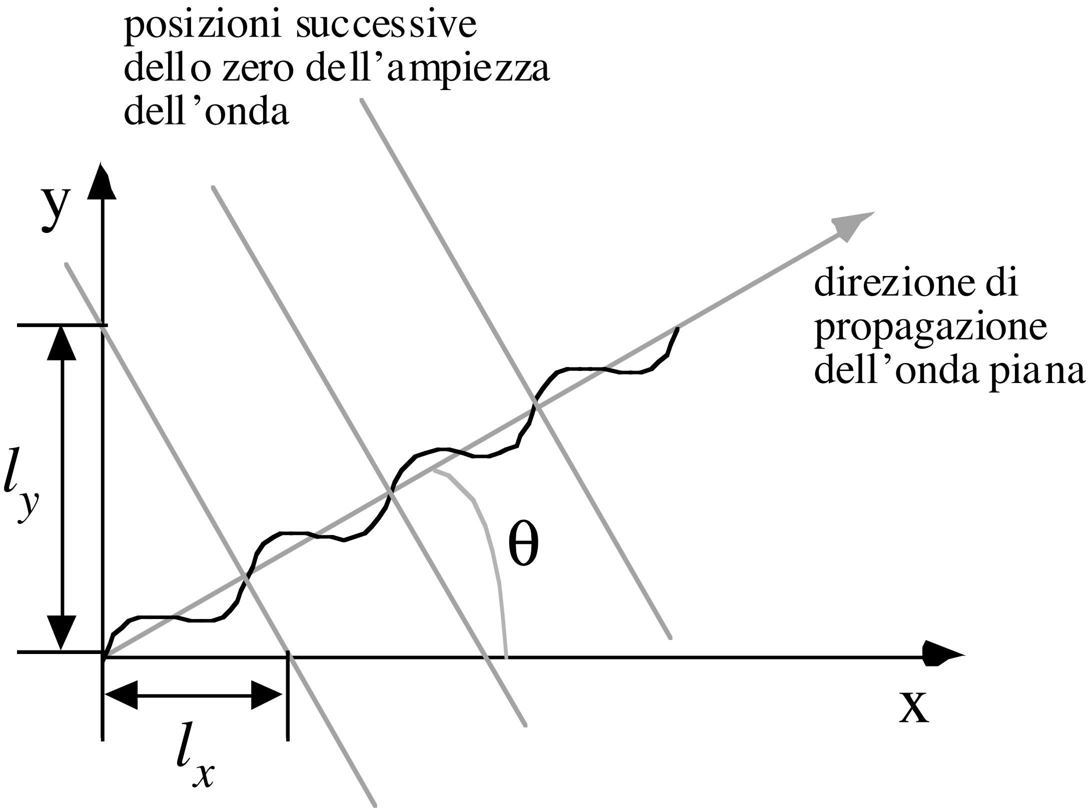
equispaziato in frequenza

Le onde elettromagnetiche possono essere assimilate a oscillatori: ci sono due gradi di libertà, elettrico e magnetico, e tenendo conto anche della polarizzazione ogni frequenza contribuisce con 2kT all'energia media totale, quindi l'energia totale è

$$U = \sum_{n=1}^{n=\infty} 2kT \rightarrow \infty$$

È forse sbagliata l'approx. 1D ??? Proviamo a fare il calcolo in 3D !!!

Premessa al calcolo in 3D



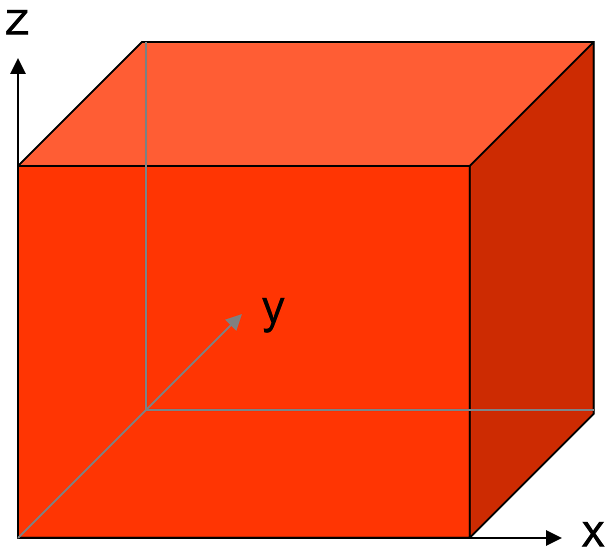
$l_x = \lambda / \cos\theta$ periodo in direzione *x*

$l_y = \lambda / \sin\theta$ periodo in direzione *y*

$$\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

consideriamo ora una scatola con lati L_x, L_y, L_z

la condizione di periodicità deve valere separatamente per ciascuna direzione



$$\frac{2L_x}{l_x} = n_x; \quad \frac{2L_y}{l_y} = n_y; \quad \frac{2L_z}{l_z} = n_z;$$

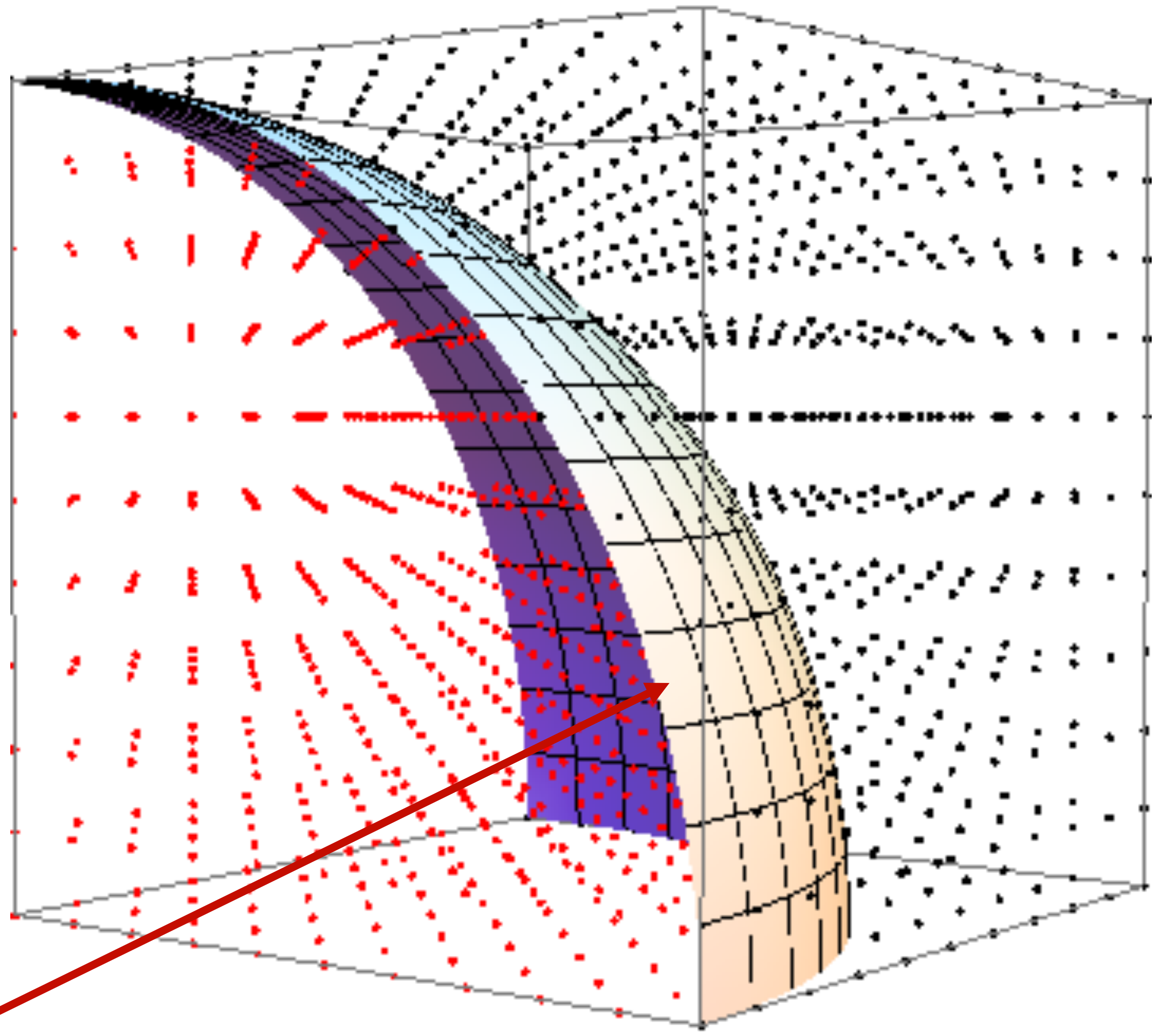
$$n_x \geq 0; \quad n_y \geq 0; \quad n_z \geq 0;$$

$$\frac{2L_x}{l_x} = n_x; \qquad \frac{2L_y}{l_y} = n_y; \qquad \frac{2L_z}{l_z} = n_z;$$

$$\frac{1}{l_x} = \frac{n_x}{2L_x}; \qquad \frac{1}{l_y} = \frac{n_y}{2L_y}; \qquad \frac{1}{l_y} = \frac{n_z}{2L_z}; \qquad\qquad \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} + \frac{1}{l_z^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} = \frac{4}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2}$$

conteggio del numero dei modi di oscillazione permessi: sono quelli contenuti nell'ottante di ellissoide con assi



questo guscio contiene i modi di oscillazione permessi

Volume dell'ottante di ellissoide in cui gli indici *n* non sono negativi

$$N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8\nu^3 L_x L_y L_z}{c^2} = \frac{4\pi V}{3c^3}\nu^3$$

(V = volume della cavità)

Quindi

$$dN = \frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Δn=1 per ciascun indice, allora il volume occupato da ciascun modo nello spazio dei modi è $(\Delta n)^3=1$, allora

$$dN = \frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

è anche il numero di modi nell'intervallo di frequenza $\nu,\nu+d\nu$ e quindi la *densità di energia* è

energia media di singolo modo

$$u(\nu)d\nu = 2kT\frac{dN}{V} = 2kT\frac{4\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$$

$$= \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 d\nu$$

eq. di Rayleigh e Jeans

La densità di energia

$$u(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2$$

diverge alle alte frequenze, quindi il passaggio a 3D non ha risolto il problema.

Sperimentalmente non si osserva nessuna divergenza.

Come si può fare?

... e se il teorema di equipartizione in realtà non fosse sempre valido?

Il teorema si deriva classicamente facendo l’ipotesi che l’energia sia una quantità continua.

... e se l’energia fosse in realtà una quantità discreta?

Supponiamo ora che gli “oscillatori elettromagnetici” che entrano nel calcolo possano avere solo energie discretizzate

$$\varepsilon_n = nh\nu$$

Se il sistema è in equilibrio a temperatura T la sua energia media vale ($\beta = 1/kT$ è la temperatura inversa)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} = \frac{-\frac{d}{d\beta}\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}}$$

$$= -\frac{d}{d\beta}\ln\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta\varepsilon_n} = -\frac{d}{d\beta}\ln\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\beta h\nu}$$

$$= -\frac{d}{d\beta}\ln\frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}$$

$$= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$ energia media

se $\beta h\nu = h\nu / kT << 1$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \approx \frac{h\nu}{1 + \beta h\nu - 1} = kT$$

e quindi ad alta temperatura si ritrova l'energia media di un singolo oscillatore

Nuova formula per la densità di energia

energia media di singolo modo

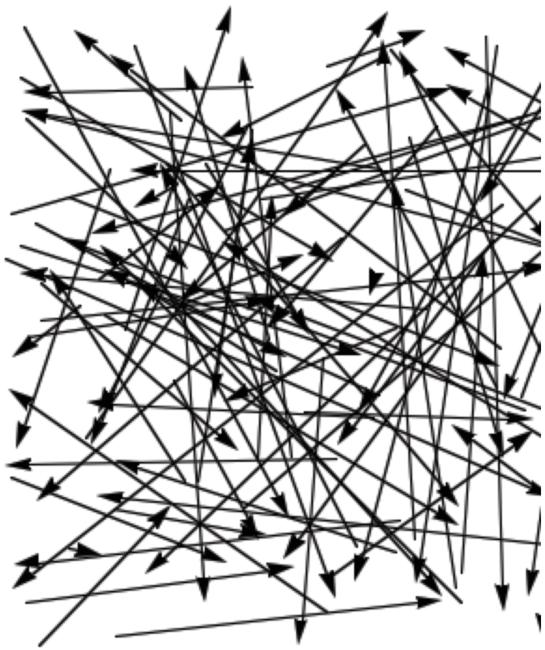
$$u(\nu)d\nu = 2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{dN}{V} = 2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{4\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

La costante *h* introdotta da Planck è una delle costanti fondamentali della fisica, e vale circa $6.6 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Potenza irraggiata da una cavità a temperatura T

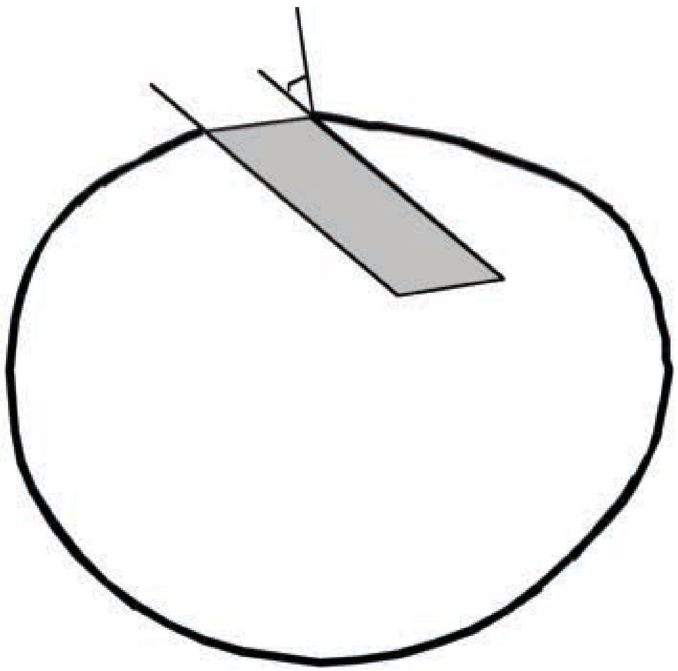
1. frazione della radiazione all'interno della cavità che si muove in una direzione che copre l'angolo solido dΩ



tutte le direzioni sono equivalenti, quindi

$$dP = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

2. la radiazione che riesce ad uscire da un foro di sezione A con angolo di uscita nel tempo è data dal calcolo seguente:



altezza del cilindro = $c\Delta t \cos\theta$

volume del cilindro = $Ac\Delta t \cos\theta$

energia contenuta nel cilindro e che si muove in direzione (θ,φ)

$$Ac\Delta t \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} u(\nu) d\nu$$

quindi l'irradianza (potenza irradiata per unità di superficie) è

$$I(\Omega,\nu)d\nu d\Omega = \frac{1}{A\Delta t}\cdot\left(A\cdot c\Delta t\cos\theta\cdot\frac{d\Omega}{4\pi}\cdot u(\nu)d\nu\right)$$

$$= c\cos\theta\cdot\frac{d\Omega}{4\pi}\cdot u(\nu)d\nu$$

Integrando sugli angoli di uscita si ottiene l'irradianza in funzione della frequenza

in seguito all'integrazione sugli angoli resta solo la dipendenza dalla frequenza

$$I(\nu)d\nu = \int_{\Omega/2} \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot cu(\nu)d\nu = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\theta d(\cos\theta) \cdot cu(\nu)d\nu$$

$$= \frac{c}{4}u(\nu)d\nu$$

ovviamente si integra solo su metà dell'angolo solido totale ...

Integrando su tutte le frequenze si trova l'irradianza del corpo nero

$$I = \frac{c}{4}\int_0^{+\infty} u(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}d\nu$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2}\cdot\frac{1}{(\beta h)^4}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx$$

si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

quindi

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \approx 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-4}$$

costante di Stefan-Boltzmann

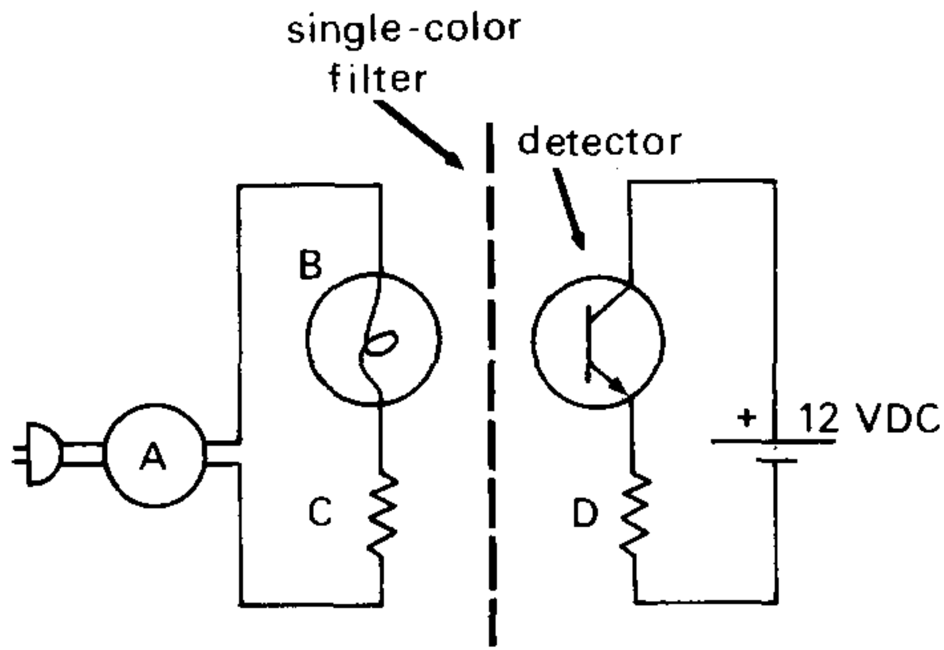


Fig. 1. Planck's constant experiment. Variac (*A*) delivers two different powers to filament (*B*). These powers and their corresponding two photocurrents through the detector[5] are determined with a roving ac/dc voltmeter, applied across *B*, *C*, and *D*.

$$I_\nu(T) = \frac{N\nu^3}{\exp[h\nu/kT] - 1},$$

$$P_j = A\sigma T_j^4 \quad j = 1, 2;$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_\nu(T_1)}{I_\nu(T_2)} = \frac{\exp[h\nu/kT_2] - 1}{\exp[h\nu/kT_1] - 1}.$$

$$P_j = A\sigma T_j^4 \quad j = 1, 2;$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_\nu(T_1)}{I_\nu(T_2)} = \frac{\exp[h\nu/kT_2] - 1}{\exp[h\nu/kT_1] - 1}.$$

$$\exp[h\nu/kT] \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad h \approx \frac{15c^2}{2\pi^5 A\nu^4} \frac{P_1 P_2}{(P_1^{1/4} - P_2^{1/4})^4} \log^4 \frac{I_1}{I_2}.$$