

Note del corso di  
Metodi di trattamento del segnale.

*Edoardo Milotti*

**A.A. 2014-2015**

*Nota Bene*: libri e dispense sono – purtroppo – sempre soggetti ad errori ed omissioni e sarò grato a coloro che vorranno segnalarmi eventuali problemi in questo testo.

### ***Informazioni generali e date di esame***

Per ulteriori informazioni sul corso è possibile consultare la pagina web

<http://www.ts.infn.it/~milotti/Didattica/Segnali/index.html>

che io cerco di mantenere sempre aggiornata.

Edoardo Milotti, ottobre 2014.

## 1. Introduzione

La tecnologia di trasmissione dell'informazione ha assunto una enorme importanza negli ultimi anni grazie agli enormi sviluppi nel campo delle reti di calcolatori, della telefonia cellulare, delle nuove tecniche di trasmissione dati, e delle tecnologie elettroottiche. Molti di questi argomenti sono tradizionalmente appannaggio dei corsi di ingegneria, ma essi hanno grande rilievo anche nella formazione dei fisici, che utilizzano spesso in condizioni estreme strumentazioni avanzate che fanno uso di queste tecnologie. Inoltre non si deve trascurare il fatto che la matematica che si utilizza per analizzare i segnali ha molto in comune con quella che si utilizza in meccanica quantistica.

In questo corso vengono affrontati alcuni importanti temi nell'ambito dell'analisi dei segnali, ma sicuramente non tutti: il tempo ridotto impone di fare una scelta di alcuni argomenti che sono prioritari nella formazione di un fisico, trascurandone altri – spesso anch'essi molto importanti – come le tecniche di progettazione dei filtri, sia attivi che passivi. Una discussione finale con una lista di ciò che manca cerca di compensare queste carenze (così che lo studente sappia almeno in che direzione andare se vuole completare la sua formazione in questo campo). Informazioni aggiuntive si possono trovare anche consultando i links nella pagina web

<http://www.ts.infn.it/~milotti/Didattica/Segnali/index.html>

che cerco di mantenere costantemente aggiornata.

Iniziamo questo corso con le trasformate di Fourier, che forniscono la metodologia matematica più importante per trattare segnali di qualsiasi tipo. Oltre a queste ci sono altre trasformate in uso comune, che però sono collegate tutte in un modo o nell'altro ai metodi di Fourier.

Il motivo fisico per cui i metodi di Fourier sono tanto importanti è che in quasi tutti i canali di trasmissione vale il principio di sovrapposizione, e questo comporta l'applicabilità di trasformate come quelle di Fourier.

## 2. Le serie di Fourier

### 2.1 Le radici storiche delle serie di Fourier

Fourier introdusse i concetti fondamentali sui cui si basano le serie di Fourier lavorando sul problema della propagazione del calore. In questa sezione analizziamo brevemente gli aspetti importanti dei calcoli di Fourier.

Il flusso termico obbedisce alla legge di Fick:

$$\mathbf{J} = -K\nabla T \tag{2.1}$$

(questo flusso è la quantità di calore che fluisce per unità di tempo e per unità di superficie), dove  $K$  è la conducibilità termica. Le tabelle che seguono mostrano i valori di conducibilità termica per alcune sostanze selezionate (leghe metalliche e isolanti comuni).

**THERMAL CONDUCTIVITY OF ALLOYS AS A FUNCTION OF TEMPERATURE**

This table lists the thermal conductivity of selected alloys at various temperatures. The indicated compositions refer to weight percent. Since the thermal conductivity is sensitive to exact composition and processing history, especially at low temperatures, these values should be considered approximate.

**REFERENCES**

1. Powell, R. L., and Childs, G. E., in *American Institute of Physics Handbook, 3rd Edition*, Gray, D. E., Ed., McGraw-Hill, New York, 1972.
2. Ho, C. Y., et al., *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 7, 959, 1978.

Thermal conductivity in W/m K

Alloy	4 K	20 K	77 K	194 K	273 K	373 K	573 K	973 K
<b>Aluminum:</b> 1100	50	240	270	220	220			
2024	3.2	17	56	95	130			
3003	11	58	140	150	160			
5052	4.8	25	77	120	140			
5083, 5086	3	17	55	95	120			
Duralumin	5.5	30	91	140	160	180		
<b>Bismuth:</b> Rose metal		5.5	8.3	14	16			
Wood's metal	4	17	23					
<b>Copper:</b> electrolytic tough pitch	330	1300	550	400	390	380	370	350
free cutting, leaded	200	800	460	380	380			
phosphorus, deoxidized	7.5	42	120	190	220			
brass, leaded	2.3	12	39	70	120			
bronze, 68% Cu; 32% Zn	2.3	16	48	92	110			
beryllium	2	17	36	70	90	113	172	
german silver	0.75	7.5	17	20	23	25	30	40
silicon bronze A		3.4	11	23	30			
manganin	0.48	3.2	14	17	22			
constantan	0.9	8.6	17	19	22			
<b>Ferrous:</b> commercial pure iron	15	72	106	82	76	66	54	34
plain carbon steel(AISI 1020)	13	20	58	65	65			
plain carbon steel(AISI 1095)		8.5	31	41	45			
3% Ni; 0.7% Cr; 0.6% Mo		6	22		33	35	36	30
4% Si					20	24	28	26
stainless steel	0.3	2	8	13	14	16	19	25
27% Ni; 15% Cr		1.7	55		11	12	16	21

**THERMAL CONDUCTIVITY OF CERAMICS AND OTHER INSULATING MATERIALS (continued)**

Material	Dens. g/cm <sup>3</sup>	t °C	Ther. cond. W/m K	Material	Dens. g/cm <sup>3</sup>	t °C	Ther. cond. W/m K
<b>Rock:</b>				Uranium dioxide		100	9.8
basalt		20	2			400	5.5
chalk		20	0.92			1000	3.4
granite	2.8	20	2.2	<b>Wood:</b>			
limestone	2	20	1	balsa, ⊥	0.11	30	0.04
sandstone	2.2	20	1.3	fir, ⊥	0.54	20	0.14
slate, ⊥		95	1.4	fir,	0.54	20	0.35
slate,		95	2.5	oak		20	0.16
<b>Rubber:</b>				plywood		20	0.11
sponge	0.2	20	0.05	pine, ⊥	0.45	60	0.11
92 percent		25	0.16	pine,	0.45	60	0.26
Sand, dry	1.5	20	0.33	walnut, ⊥	0.65	20	0.14
Sawdust	0.2	30	0.06	Wool	0.09	30	0.04
Shellac		20	0.23	Zinc oxide		200	17
Silica aerogel	0.1	-200 to 20	0.003			800	5.3
Snow	0.25	0	0.16	Zirconia (ZrO <sub>2</sub> )		100	2
Steel wool	0.1	55	0.09			400	2
Thoria (ThO <sub>2</sub> )		100	10			1500	2.5
		400	5.8	Zirconia + silica		200	5.6
		1500	2.4			600	4.6
Titanium dioxide		100	6.5			1500	3.7
		400	3.8				
		1200	3.3				

Inoltre deve valere l'equazione di continuità per il calore – che corrisponde alla conservazione dell'energia:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \mathbf{J} \cdot dV \quad (2.2)$$

dove  $U$  è la densità di energia interna (termica) nel volume  $V$  delimitato dalla superficie  $S$ , e quindi, visto che questo vale indipendentemente dalla regione considerata,

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \mathbf{J} \quad (2.3)$$

Ricordiamo ora che una variazione di energia interna dovuta esclusivamente ad un trasferimento di calore (senza lavoro) è data da  $\Delta U = C\Delta T$ , dove  $C$  è la capacità termica a volume costante per unità di volume, e quindi

$$-C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \mathbf{J} = -K\nabla^2 T \quad (2.4)$$

o anche

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \quad (2.5)$$

che è l'*equazione del calore*, dove  $D = K/C$  è la *costante di diffusione* (l'equazione del calore è una particolare equazione di diffusione, che a sua volta è un caso particolare dell'equazione di Fokker-Planck).

Nella tabella che segue possiamo individuare la capacità termica del carbonato di calcio – il componente principale del calcare. Questo ci serve per il calcolo della costante di diffusione del calore nei suoli calcarei.

Quindi:

- Densità del calcare  $\approx 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- Peso molecolare ( $\text{CaCO}_3$ )  $\approx 100 \text{ u.a.}$
- Capacità termica  $C \approx 80 \text{ J mole}^{-1} \text{ K}^{-1} = 0.8 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 2.16 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$
- Conducibilità termica  $K \approx 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

da cui si ricava

$$D = K/C \approx 0.46 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

**HEAT CAPACITY OF SELECTED SOLIDS**

This table gives the molar heat capacity at constant pressure of representative metals, semiconductors, and other crystalline solids as a function of temperature in the range 200 to 600 K.

**REFERENCES**

1. Chase, M. W., et al., *JANAF Thermochemical Tables, 3rd ed.*, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 14, Suppl. 1, 1985.
2. Garvin, D., Parker, V. B., and White, H. J., *CODATA Thermodynamic Tables*, Hemisphere Press, New York, 1987.
3. DIPPR Database of Pure Compound Properties, Design Institute for Physical Properties Data, American Institute of Chemical Engineers, New York, 1987.

Name	$C_p$ in J/mol K						
	200 K	250 K	300 K	350 K	400 K	500 K	600 K
Aluminum	21.33	23.08	24.25	25.11	25.78	26.84	27.89
Aluminum oxide	51.12	67.05	79.45	88.91	96.14	106.17	112.55
Anthracene	138.6	173.9	210.7	248.8	288.4		
Benzoic acid	102.7	123.5	147.4	172.0			
Beryllium	9.98	13.58	16.46	18.53	19.95	21.94	23.34
Biphenyl	131.0	162.5	197.2				
Boron	5.99	8.82	11.40	13.65	15.69	18.72	20.78
Calcium	24.54	25.41	25.94	26.32	26.87	28.49	30.38
Calcium carbonate	66.50	75.66	83.82	91.51	96.97	104.52	109.86
Calcium oxide	33.64	38.59	42.18	45.07	46.98	49.33	50.72
Cesium chloride	50.13	51.34	52.48	53.58	54.68	56.90	59.10
Chromium	19.86	22.30	23.47	24.39	25.23	26.63	27.72
Cobalt	22.23	23.98	24.83	25.68	26.53	28.20	29.66
Copper	22.63	23.77	24.48	24.95	25.33	25.91	26.48
Copper oxide	34.80		42.41	44.95	46.78	49.19	50.83
Copper sulfate	77.01	89.25	99.25	107.65	114.93	127.19	136.31
Germanium			23.25	23.85	24.31	24.96	25.45
Gold			25.41	25.37	25.51	26.06	26.65
Graphite	5.01	6.82	8.58	10.24	11.81	14.62	16.84
Hexachlorobenzene	167.7	183.6	202.4				

La temperatura  $T$  è una funzione dello spazio e del tempo; se supponiamo che sia  $T = T(z,t)$  e in particolare che la deviazione dalla temperatura media in posizione  $z = 0$  sia  $\Delta T(0,t) = T_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , allora possiamo supporre che la stessa dipendenza temporale valga per ogni  $z$ , e sia

$$\Delta T(z,t) = \tau(z) \cos(\omega t + \varphi) \tag{2.6}$$

Poiché l'equazione differenziale (5) è lineare e vale quindi il principio di sovrapposizione, prendiamo l'estensione complessa, che è una combinazione lineare di soluzioni reali dell'equazione differenziale

$$\Delta \hat{T}(z,t) = \hat{\tau}(z) e^{i\omega t} \tag{2.7}$$

e sostituendo nell'equazione del calore, otteniamo un'equazione differenziale ordinaria per la sola parte spaziale

$$i\omega \hat{\tau} = D \frac{d^2 \hat{\tau}}{dz^2} \tag{2.8}$$

Equazioni differenziali di questo tipo (lineari a coefficienti costanti) hanno genericamente soluzioni che sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali, e quindi noi cerchiamo una soluzione di tipo esponenziale:

$$\hat{\tau}(z) = Ae^{\alpha z} \quad (2.9)$$

Sostituendo la soluzione di prova (9) nell'equazione (8) troviamo l'equazione algebrica  $i\omega = D\alpha^2$ , le cui soluzioni sono

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{i\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1+i) \quad (2.10)$$

La soluzione complessa è una sovrapposizione di due soluzioni (associate a parte reale e parte immaginaria). Prendendo solo la parte reale della soluzione troviamo

$$\tau(z) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z} \cos\left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z + \theta\right) \quad (2.11)$$

e ovviamente solo la soluzione con il segno meno ha senso fisico, e inoltre, essendo  $\tau(0) = T_0$ , la soluzione completa è

$$\Delta T(z,t) = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.12)$$

In generale la variazione di temperatura proviene da due contributi, uno diurno e uno annuale, così che si ha

$$\Delta T(0,t) = T_D \cos(\omega_D t + \varphi_D) + T_A \cos(\omega_A t + \varphi_A) \quad (2.13)$$

e quindi dal principio di sovrapposizione, che vale per la linearità dell'equazione del calore, si trova

$$\Delta T(z,t) = T_D e^{-\sqrt{\frac{\omega_D}{2D}} z} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega_D}{2D}} z\right) \cos(\omega_D t + \varphi_D) + T_A e^{-\sqrt{\frac{\omega_A}{2D}} z} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega_A}{2D}} z\right) \cos(\omega_A t + \varphi_A) \quad (2.14)$$

In altre parole, la soluzione è una sovrapposizione di funzioni trigonometriche. Generalizzando questa idea si passa alle serie di Fourier.

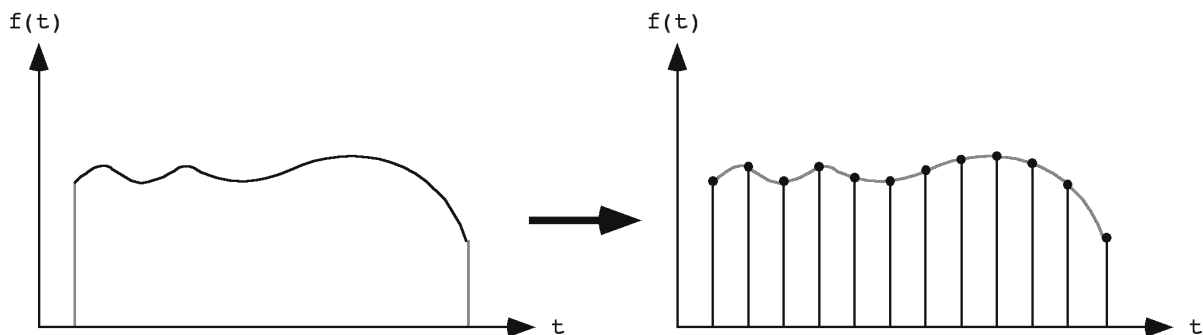
Dal punto di vista pratico, la soluzione trovata spiega per quale motivo la temperatura del suolo tenda a diventare approssimativamente costante all'aumentare della profondità. Dalla formula (2.14) si vede che la lunghezza di decadimento è  $\lambda = \sqrt{2D/\omega}$ : poiché la frequenza angolare diurna vale circa  $73 \mu\text{radianti/s}$ , e quella annuale vale

circa 0.2  $\mu$ radianti/s – utilizzando la costante di diffusione per suoli calcarei calcolata in precedenza – si trova che  $\lambda_D \approx 11$  cm e  $\lambda_A \approx 2.2$  m, e quindi le oscillazioni diurne decadono molto velocemente, ad una profondità di un metro sono praticamente scomparse, mentre ad una profondità di una decina di metri spariscono anche le oscillazioni annuali.

## 2.2 Prodotto scalare tra funzioni definite su un intervallo

In questa sezione studiamo alcune semplici proprietà degli integrali che contengono funzioni trigonometriche. Si tratta di una discussione a carattere matematico, in cui però il rigore viene messo da parte a vantaggio dell'intuizione. La stessa trattazione fatta da un matematico dovrebbe, ad esempio includere una grande quantità di importanti dettagli sulla convergenza sia delle somme che degli integrali che compaiono nella teoria. A parziale giustificazione di questa mancanza di rigore si può dire che in realtà un fisico sperimentale può spesso trascurare le questioni di convergenza, perché i suoi dati sono sempre finiti e in numero finito.<sup>1</sup>

Si considerino dunque le funzioni definite su un intervallo: proprio come si fa con l'analisi delle oscillazioni di una corda elastica, si può discretizzare l'intervallo, e supporre che le funzioni siano definite solo su un insieme discreto di punti, come illustrato dalle figure che seguono



Ciò significa che nel caso discreto la funzione può essere descritta da un vettore, cioè dall'insieme dei valori che assume nei punti del dominio discreto. Inoltre tanto più è fine la suddivisione dell'intervallo, allora tanto migliore è la descrizione e tanto più grande deve essere la dimensione del vettore che descrive la funzione: quando passiamo al limite continuo il vettore deve avere dimensione infinita.

Che significato assume l'operazione di integrazione in questo contesto? Supponiamo ora di suddividere un certo intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali di lunghezza  $\Delta = \frac{b-a}{n}$ , allora l'integrale di una funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[a, b]$  può venir definito dal limite

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1, n} f(t_k) \Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1, n} f(t_k) \quad (2.15)$$

<sup>1</sup>Una versione estrema di questo atteggiamento – dal punto di vista di un ingegnere – si può trovare nell'articolo di Armin Zemanian *Infinite Electrical Networks: A Reprise*, IEEE Trans. Circ. Sys. **35** (1988) 1346



dove  $t_k$  è la coordinata di un punto all'interno del  $k$ -esimo intervallino, e  $t_1 = a$ ,  $t_n = b$ , e allora per una coppia di funzioni  $f$  e  $g$

$$\int_a^b f^*(t)g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n-1} \sum_{k=1,n} f^*(t_k)g(t_k) \quad (2.16)$$

Però se  $\mathbf{f} = \{f(t_k)\}$  e  $\mathbf{g} = \{g(t_k)\}$  sono due vettori di uno spazio lineare (complesso) di dimensione  $n$ , la somma

$$\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g} = \sum_{k=1,n} f_k^* g_k = \sum_{k=1,n} f^*(t_k)g(t_k) \quad (2.17)$$

è la definizione "naturale" di prodotto scalare<sup>2</sup>, quindi l'integrale

$$\int_a^b f^*(t)g(t) dt \quad (2.18)$$

è un prodotto scalare in uno spazio vettoriale di dimensione infinita sul corpo complesso.

*Domande:*

- come si fa a dimostrare che l'insieme delle funzioni definite su un intervallo è uno spazio vettoriale?
- che aspetto assume il prodotto matrice per vettore passando al limite continuo?

### 2.3 Proprietà di ortogonalità delle funzioni trigonometriche.

Osserviamo ora che se  $T$  è il periodo di un seno o di un coseno, allora l'integrale fatto su un periodo si annulla, cioè  $\int_a^{a+T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = 0$  e  $\int_a^{a+T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = 0$ ; partendo da questa semplice osservazione è facile dimostrare che se  $n$  e  $m$  sono due numeri interi allora

$$\int_0^T \sin(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = 0 \quad (2.19)$$

$$\int_0^T \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{m,n} \quad (2.20)$$

$$\int_0^T \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{m,n} \quad (2.21)$$

Per questo motivo si dice che le funzioni  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$ ,  $\sin(2\omega t)$ ,  $\cos(2\omega t)$ ,  $\sin(3\omega t)$ ,  $\cos(3\omega t)$ , ... sono ortogonali tra loro.

---

<sup>2</sup>con questa definizione di prodotto scalare la quantità  $\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{f}$  è un numero reale, e quindi si può definire facilmente uno spazio metrico.

## 2.4 Sviluppo di una funzione periodica in serie di Fourier.

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie sappiamo che un sistema di  $n$  equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti ha  $n$  soluzioni linearmente indipendenti. Nel caso della corda vibrante sappiamo che si approssima il problema continuo con un insieme di  $N$  oscillatori indipendenti: in questo caso ci sono  $2N$  soluzioni di base (perché il moto di ciascun oscillatore è descritto da un'equazione differenziale di secondo ordine), ma tenendo conto delle condizioni al contorno solo  $N$  soluzioni di base sono ammissibili, e la soluzione generale si scrive come sovrapposizione di queste  $N$  soluzioni di base. In generale però si deve tener conto di tutte le  $2N$  soluzioni di base, e quindi la forma di una corda vibrante di lunghezza finita e discretizzata si ottiene come somma di  $2N$  soluzioni di base. Passare al limite continuo significa far tendere  $N$  all'infinito, e quindi ci sono infinite soluzioni di base, e la forma della corda vibrante tra  $z = 0$  e  $z = L$  è data dalla somma:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} [\alpha_n e^{ik_n z} + \beta_n e^{-ik_n z}] = \sum_{n=1}^{n=\infty} [A_n \sin(k_n z) + B_n \cos(k_n z)] \quad (2.22)$$

con  $k_n L = \pi n$  (lo studente spieghi perché) e quindi  $k_n = \frac{\pi}{L} n = kn$ . Seni e coseni hanno tutti valore medio nullo, e quindi per ottenere delle forme d'onda con valore medio diverso da zero si deve aggiungere ancora una costante. Perciò tutte le funzioni "fisicamente sensate" che descrivono la forma della corda vibrante possono venire scritte come somme di questo tipo:

$$f(z) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [A_n \sin(nkz) + B_n \cos(nkz)] \quad (2.23)$$

Nel seguito faremo spesso riferimento a funzioni del tempo, piuttosto che a funzioni dello spazio, e scriveremo

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t)] \quad (2.24)$$

Per trovare i coefficienti  $A$  e  $B$  si utilizzano le relazioni di ortogonalità viste sopra. Ad esempio

$$\int_0^T f(t) \sin(m\omega t) dt = \int_0^T \left( \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t)] \right) \sin(m\omega t) dt = \frac{T}{2} A_m \quad (2.25)$$

In questo modo si trovano anche gli altri coefficienti, e il risultato finale è il seguente:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \geq 1) \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \geq 1) \\ B_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.5 Forma complessa dello sviluppo in serie di Fourier.

La somma (2.24) si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t)] \\
 &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{A_n}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) + \frac{B_n}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) \right] \\
 &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \left( \frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} \right) e^{in\omega t} + \left( -\frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} \right) e^{-in\omega t} \right]
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Adesso definiamo dei nuovi coefficienti  $C_0 = \frac{B_0}{2}$ ,  $C_n = \frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2}$  e  $C_{-n} = -\frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2}$ , allora la somma (2.27) diventa:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [C_n e^{in\omega t} + C_{-n} e^{-in\omega t}] = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega t} \tag{2.28}$$

Utilizzando le formule (2.26) si trova anche che

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} = \frac{1}{T} \left( \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt - i \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \right) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \\
 C_{-n} &= -\frac{A_n}{2i} + \frac{B_n}{2} = \frac{1}{T} \left( \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt + i \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \right) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega t} dt \\
 C_0 &= \frac{B_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

e dunque, in generale,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega t} \\
 C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

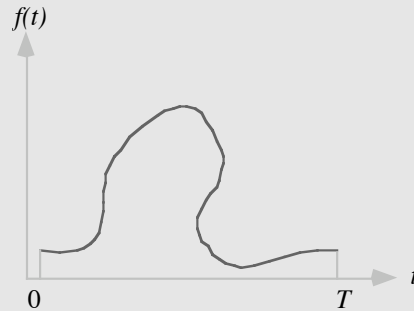
Si noti che se  $f(t)$  è una funzione reale, e quindi coincide con il suo complesso coniugato, allora si può scrivere

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega t} = f^*(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega t} \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n^* e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_{-n}^* e^{in\omega t} \tag{2.31}$$

e quindi  $C_{-n}^* = C_n$ .

*Esercizio:* dimostrare che se  $C_{-n}^* = C_n$ , allora  $f(t)$  è reale, e quindi che  $f(t)$  è reale se e solo se  $C_{-n}^* = C_n$ .

*Domanda:* la funzione mostrata nella figura seguente può essere rappresentata da una serie di Fourier?



Si dimostra in modo piuttosto semplice che la serie di Fourier converge alla funzione periodica che si vuole rappresentare (nel senso che la distanza quadratica integrata si annulla quando  $n \rightarrow \infty$ ), e quindi una funzione periodica è univocamente determinata dai suoi coefficienti di Fourier. Per questo motivo si può rappresentare una funzione indifferentemente come funzione del tempo, oppure identificarla per mezzo dei suoi coefficienti di Fourier. Nel primo caso si parla di rappresentazione nel *dominio del tempo*, nel secondo di rappresentazione nel *dominio della frequenza*.

### 2.6 Esempio: sviluppo in serie di Fourier di un'onda quadra.

Si consideri adesso la funzione definita da:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T/2 \\ -1 & -T/2 \leq t < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

allora i coefficienti  $B$  sono tutti nulli perché questa è una funzione dispari, mentre il coseno è una funzione pari, e i coefficienti  $A$  sono dati da

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \left( - \int_{-T/2}^0 \sin(n\omega t) dt + \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt \right) = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \cdot \left( \cos(n\omega t) \Big|_{-T/2}^0 - \cos(n\omega t) \Big|_0^{T/2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned} \quad (2.33)$$

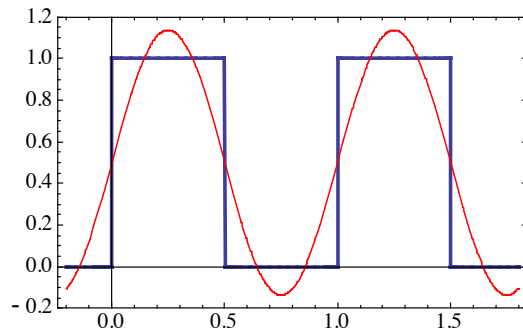
La formula (2.33) mostra che se  $n$  è pari allora  $A$  si annulla, e sopravvivono dunque solo i coefficienti con indice dispari, per cui si può scrivere:

$$A_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)} \quad (2.34)$$

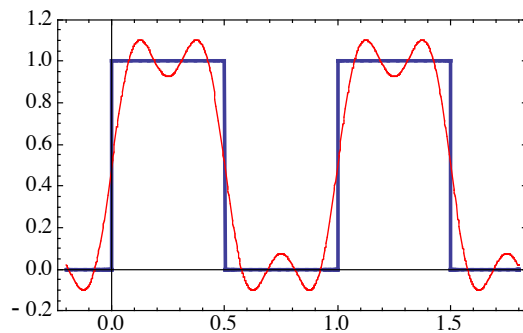
e infine

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)\omega t) \quad (2.35)$$

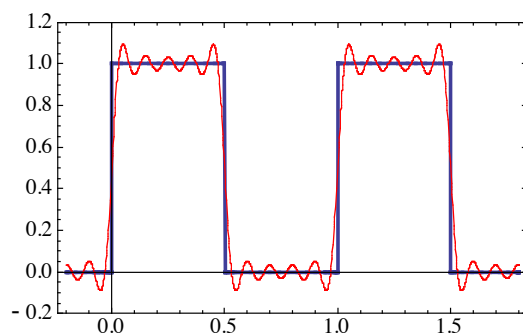
Le figure che seguono mostrano come l'onda quadra venga approssimata da una serie di Fourier troncata. Ecco anzitutto l'onda quadra sovrapposta alla prima armonica:



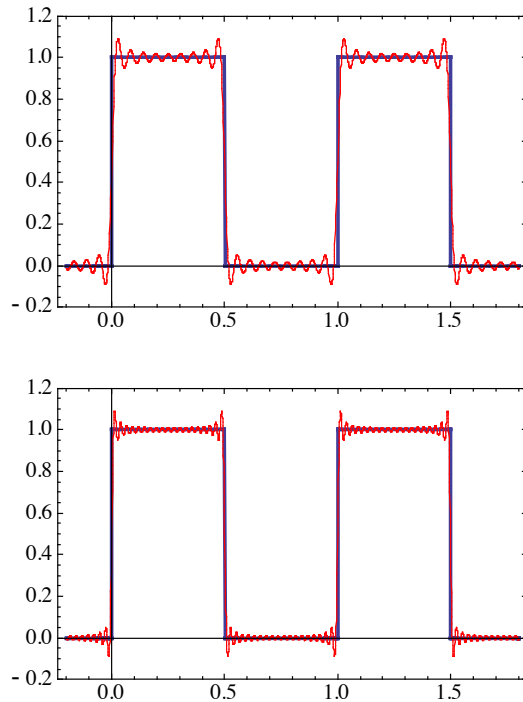
Nella figura seguente si vede la somma di prima e terza armonica



Questa figura mostra la somma delle prime cinque armoniche non nulle (e quindi fino alla nona armonica)



In queste due ultime figure infine si vedono le somme delle prime dieci e delle prime venti armoniche



Si noti che l'oscillazione attorno al valore vero della funzione è più elevata nei pressi della discontinuità: questo accade sempre nelle vicinanze delle discontinuità, ed è il cosiddetto *fenomeno di Gibbs*.

*Esercizio svolto:* si calcolino i coefficienti di Fourier dell'onda rettangolare, in forma complessa.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < aT \\ 0 & aT \leq t < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

La funzione (2.36) è un'onda rettangolare con un *duty cycle* uguale ad  $a$  – il *duty cycle* è la frazione del tempo in cui quest'onda rettangolare è diversa da 0. I coefficienti di Fourier sono facilmente calcolabili:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^{aT} e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{-1}{in\omega} e^{-in\omega t} \Big|_0^{aT} = \frac{1 - e^{-in\omega aT}}{in\omega T} \quad (2.37)$$

Inoltre  $\omega T = 2\pi$  e quindi

$$C_n = \frac{1 - e^{-2\pi i n a}}{2\pi i n} = \frac{1}{\pi n} e^{-\pi i n a} \frac{e^{\pi i n a} - e^{-\pi i n a}}{2i} = \frac{1}{\pi n} e^{-\pi i n a} \sin(\pi n a) \quad (2.38)$$

*Esercizi:*

1. si trovi lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione periodica con periodo  $2\pi$ :

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x < \pi$$

2. si trovi lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione periodica con periodo  $2\pi$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

3. si utilizzi il risultato del punto 1. per dimostrare la formula di Eulero:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

4. si utilizzi la formula trovata nell'esercizio precedente per calcolare  $\pi$ . Quanti termini si devono prendere perché il valore di  $\pi$  calcolato in questo modo sia corretto fino alla 3 cifra decimale?

5. si trovi lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione periodica con periodo  $2\pi$ :

$$f(x) = x^4, \quad -\pi \leq x < \pi$$

e si utilizzi questo sviluppo per trovare una formula simile a quella dell'esercizio 3. Si utilizzi questo risultato per calcolare  $\pi$  e si mostri che in questo caso la convergenza è molto più veloce di quella trovata nell'esercizio 4.

### 3. Le trasformate di Fourier.

Riprendiamo ora la coppia di formule che definiscono la serie di Fourier a coefficienti complessi e che permettono di calcolare i coefficienti stessi:

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \\ C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \end{cases} \quad (3.1)$$

L'integrale ha i limiti spostati rispetto a quelli della formula (2.30) ma questo non fa alcuna differenza a causa della periodicità dell'integrando, e inoltre  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  è la frequenza fondamentale per l'espansione in serie di Fourier. Ora prendiamo la somma, e trasformiamola come segue:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (TC_n) e^{in\omega_0 t} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (TC_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \quad (3.2)$$

dove  $\omega_n = n \cdot \omega_0$ , e  $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Al crescere di  $T$  la variabile  $\omega_n$  tende a diventare una variabile continua  $\omega$ , e la differenza tra due frequenze successive  $\Delta\omega_n$  tende a diventare un infinitesimo. Allo stesso tempo

anche la funzione  $TC_n$  diventa una funzione  $F(\omega)$  della variabile continua  $\omega$ , e quindi la coppia di equazioni (3.1) si trasforma in

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases} \quad (3.3)$$

La funzione  $F(\omega)$  è detta *trasformata di Fourier* della  $f(t)$ , mentre la  $f(t)$  stessa è detta *antitrasformata di Fourier* della  $F(\omega)$ . La trasformata di Fourier ha parecchie proprietà interessanti:

1. Linearità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) + g(t)) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.4)$$

2. Scaling

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t/\tau) e^{-i\omega t} dt = |\tau| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega\tau t} dt = |\tau| F(\omega\tau) \quad (3.5)$$

3. Traslazione dell'origine nel dominio del tempo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega\tau} F(\omega) \quad (3.6)$$

4. Traslazione dell'origine nel dominio della frequenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) e^{i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0) \quad (3.7)$$

5. Simmetria della trasformata se  $f(t)$  è reale

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt = F(-\omega) \quad (3.8)$$

Talvolta la trasformata di Fourier viene scritta esplicitamente in termini di parte reale e parte immaginaria;

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (3.9)$$

e le due componenti sono dette *trasformata coseno* e *trasformata seno*. Si noti che se la funzione  $f(t)$  è pari, allora il secondo integrale si annulla e si ottiene

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (3.10)$$

e la trasformata è anch'essa una funzione reale.



### 3.1 Teorema di convoluzione.

Il teorema che segue è una proprietà particolarmente importante della trasformata di Fourier. Definiamo anzitutto la convoluzione di due funzioni:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')dt' \quad (3.11)$$

allora se  $F$  e  $G$  sono le trasformate di Fourier di  $f$  e  $g$ , la trasformata di Fourier della convoluzione è data da:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')dt' \right\} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')e^{-i\omega t} e^{-i\omega(t-t')} \\ &= F(\omega) \cdot G(\omega) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Quindi la trasformata di una convoluzione è uguale al prodotto delle trasformate. È facile inoltre dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega) \quad (3.13)$$

*Esercizio:* si dimostri la formula (3.13)

### 3.2 La funzione delta di Dirac $\delta(x)$ .

Torniamo ora per un attimo alla rappresentazione discretizzata delle funzioni che è stata utilizzata nel paragrafo

2.1: un integrale della forma  $g(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$  diventa, in seguito alla discretizzazione,

$$g_m = g(x_m) = \int_a^b K(x_m,y)f(y)dy \approx \sum_n K(x_m,y_n)f(y_n)\Delta \quad (3.14)$$

dove  $\Delta$  è il passo di discretizzazione. Perciò, facendo delle ovvie posizioni, si ottiene

$$g_m = \sum_n K_{m,n}f_n\Delta \quad (3.15)$$

e l'integrale  $g(x)$  si riduce quindi alla moltiplicazione di una matrice per un vettore. Possiamo far anche il ragionamento inverso, e chiederci qual è la funzione  $K(x,y)$  che è proporzionale ad una delta di Kronecker

$K_{m,n} = \frac{1}{\Delta}\delta_{m,n}$ , così che  $g_m = f_m$ . La funzione richiesta è la cosiddetta funzione *delta di Dirac* che è definita da

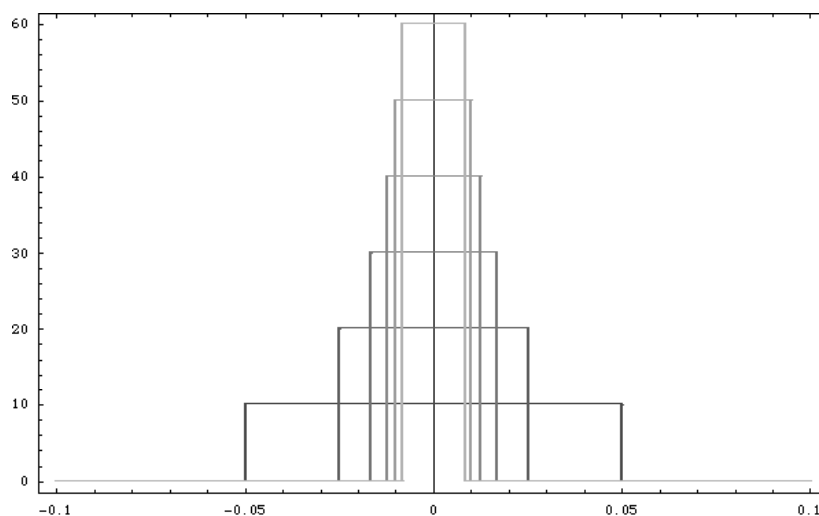
$$g(y) = \int_a^b \delta(x-y)f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin (a,b) \\ f(y) & \text{se } y \in (a,b) \end{cases} \quad (3.16)$$

Questa non è una vera funzione, è piuttosto un oggetto che in matematica si chiama *distribuzione* o *funzione generalizzata*, e possiede diverse rappresentazioni.

Si può arrivare alla funzione delta di Dirac anche in un altro modo: consideriamo la successione di funzioni

$$s_n(x) = \begin{cases} n & |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2n} \end{cases} \quad (3.17)$$

alcune delle quali sono mostrate nella figura seguente



ciascuna funzione corrisponde ad un breve impulso che ha area unitaria, e che diventa sempre più stretto ed alto al crescere di  $n$ . Consideriamo ora l'integrale

$$I_n(a,b) = \int_a^b f(x)s_n(x)dx \quad (3.18)$$

se la funzione  $f$  è continua e se l'intervallo  $(a,b)$  contiene lo 0, possiamo approssimare questo integrale nel modo seguente

$$I_n(a,b) = \int_a^b f(x)s_n(x)dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} f(x)s_n(x)dx \approx f(0) \int_{-1/2n}^{1/2n} s_n(x)dx = f(0) \quad (3.19)$$

quest'approssimazione è tanto migliore quanto più stretto è l'intervallo, e perciò possiamo scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(a,b) = f(0) \quad (3.20)$$

e quindi troviamo la seguente rappresentazione della funzione delta

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad (3.21)$$

questa rappresentazione non è unica (v. esercizio 4).

Supponiamo ora di prendere la trasformata di Fourier di una funzione e di antitrasformare il risultato, ciò che otteniamo alla fine deve essere uguale alla funzione di partenza, quindi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t') \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \right) \quad (3.22)$$

perciò

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} = \delta(t-t') \quad (3.23)$$

in questo modo abbiamo trovato una rappresentazione integrale della funzione delta di Dirac, ed allo stesso tempo abbiamo dimostrato che la funzione delta è la trasformata di Fourier della funzione costante  $f(t) = 1$ .

### 3.4 Esempio: trasformata di Fourier di un singolo impulso rettangolare

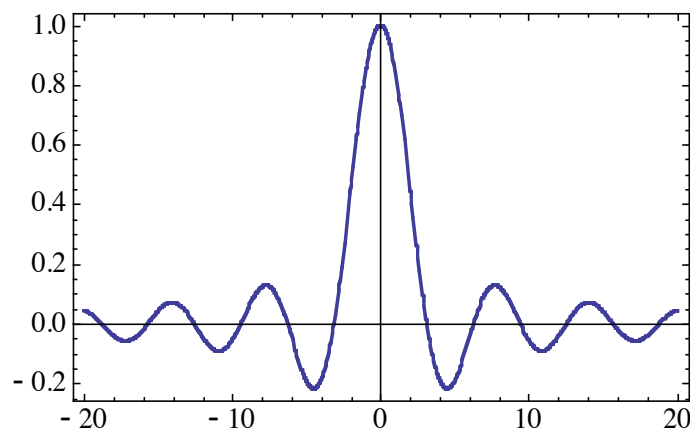
Consideriamo un singolo impulso rettangolare simmetrico rispetto l'origine nel dominio del tempo:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (3.24)$$

La sua trasformata di Fourier è data da

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}) = T \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} = T \cdot \text{sinc}(\omega T / 2) \quad (3.25)$$

dove è stata anche introdotta la funzione  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ . La figura seguente mostra il grafico della funzione  $\text{sinc}(x)$



*Esercizi*

1. Quali sono le proprietà di simmetria della trasformata se la funzione è:
  - a. puramente immaginaria ( $f(x) = ig(x)$ ;  $g(x) \in \mathbb{R}$ );
  - b. reale e pari ( $f(x) \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) = f(-x)$ );
  - c. reale e dispari ( $f(x) \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) = -f(-x)$ );
  - d. immaginaria e pari ( $f(x) = ig(x)$ ;  $g(x) \in \mathbb{R}$ ;  $g(x) = g(-x)$ );
  - e. immaginaria e dispari ( $f(x) = ig(x)$ ;  $g(x) \in \mathbb{R}$ ;  $g(x) = -g(-x)$ ).
2. Si trovi la trasformata di Fourier della funzione  $f(t) = e^{-\lambda|t|}$
3. Si trovi la trasformata di Fourier della funzione  $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2}$
4. Si trovi la trasformata di Fourier della funzione  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ e^{-t/\tau} \sin \omega t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$ .
5. Si scriva la funzione delta di Dirac come limite di una successione di Gaussiane
6. Si utilizzi la rappresentazione integrale della funzione delta per dimostrare che  $\delta(a(t-t')) = \frac{1}{|a|} \delta(t-t')$

**3.3 Significato delle frequenze negative**

Nelle formule delle sezioni precedenti abbiamo incontrato frequenze negative: tenuto conto di quello che è il solito significato intuitivo della frequenza, ci si può chiedere che cosa vogliano dire queste frequenze negative. La risposta è che a questo livello la frequenza è solo un simbolo matematico, non ha corrispondenza fisica, e che il significato fisico delle frequenze negative dipende da proprio dal tipo di formulazione dei modelli fisici.

Ad esempio, è noto che le soluzioni dell'equazione d'onda sono tutte del tipo  $f = f(z \pm ct)$ , e che il segno determina la direzione nella quale si propaga l'onda. Più in generale un segnale che si propaga in una dimensione spaziale può venire rappresentato dalla sua trasformata di Fourier doppia, e cioè sia spaziale che temporale:

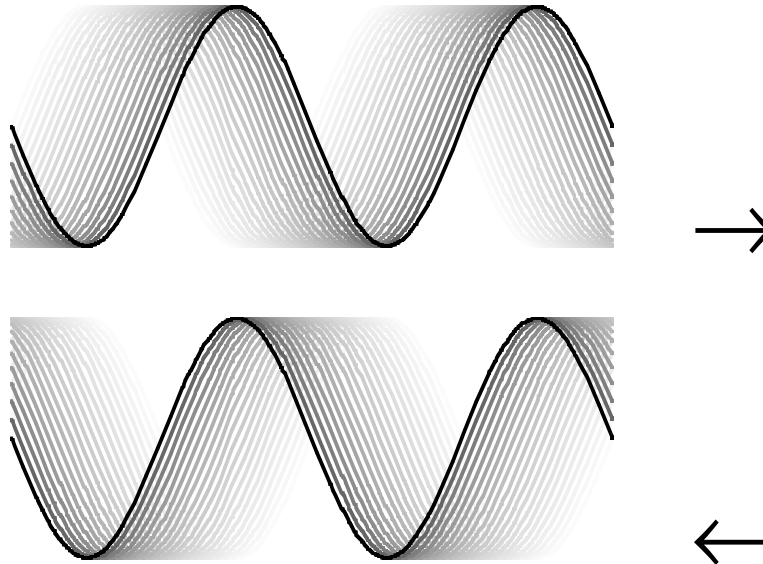
$$f(z,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F(k,\omega) e^{i(kz - \omega t)} \tag{3.26}$$

Fissiamo ora la nostra attenzione sulle componenti di Fourier con  $k$  fissato e positivo: esse sono

$$F(k,\omega) e^{i(kz \pm \omega t)} \tag{3.27}$$

e rappresentano quindi due componenti di Fourier che hanno lo stesso tipo di dipendenza sia temporale sia spaziale, ma che si propagano in direzione opposta. Questo tipo di interpretazione può essere esteso anche al dominio temporale, si può cioè dire che una delle due onde si propaga in avanti nel tempo, e l'altra all'indietro nel

tempo: questa interpretazione ha particolare rilievo nella fisica delle particelle, dove le "particelle" che si propagano all'indietro nel tempo sono le cosiddette *antiparticelle* (interpretazione di Stückelberg e Feynman). Le figure seguenti illustrano schematicamente l'idea della propagazione in avanti e di propagazione all'indietro di due componenti di Fourier (i diversi livelli di grigio si riferiscono a tempi diversi):



### 3.4 Teorema Hurwitz-Lyapunov, teorema di Parseval, modi normali e proprietà di equipartizione dell'energia.

Sia nel caso di oscillatori meccanici che nel caso di oscillatori elettrici, capita spesso che l'energia totale sia una funzione quadratica delle coordinate e degli impulsi generalizzati. Ad esempio nei circuiti elettrici puramente resistivi la potenza dissipata (istantanea) è data dalla formula  $W(t) = V(t) \cdot I(t) \approx V^2/R$ , e dunque l'energia totale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t) dt \approx \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt \quad (3.28)$$

Si noti che l'integrale (3.28) converge solo se il segnale  $V(t)$  ha durata finita.

Se consideriamo dei segnali periodici l'integrale esteso su tutto l'asse dei tempi non è definito oppure diverge, e quindi al posto dell'energia totale del segnale consideriamo la potenza media, e quindi l'integrale esteso ad un solo periodo. Se la potenza media è proporzionale a  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$ , dove  $f$  è una funzione periodica, ed utilizziamo

l'espansione in serie di Fourier a coefficienti complessi:  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$ , troviamo allora

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \right|^2 dt = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} C_n^* C_m \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-in\omega_0 t} e^{im\omega_0 t} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} C_n^* C_m \delta_{m,n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \quad (3.29)$$

(teorema di Hurwitz-Lyapunov), e quindi la potenza media è data dalla somma delle potenze medie associate a ciascuna componente di Fourier.

Nel caso di un segnale non-periodico l'energia totale associata al segnale è proporzionale a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ , e questo integrale si può manipolare proprio come nel caso discreto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right)^* d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.30)$$

questo è il famoso *teorema di Parseval*: ancora una volta l'energia totale è la somma delle energie associate alle singole componenti di Fourier<sup>3</sup>.

Se l'energia è una funzione quadratica delle coordinate e degli impulsi generalizzati, allora può essere scritta come somma delle energie associate alle singole componenti di Fourier, che sono effettivamente indipendenti una dall'altra, e contano ciascuna come un grado di libertà del sistema fisico che stiamo considerando. In particolare a questi gradi di libertà possiamo applicare il principio di equipartizione dell'energia e dire che ciascun grado di libertà porta con sé un'energia termica media uguale a  $\frac{1}{2}kT$ .

È chiaro che l'energia termica media totale diverge per infiniti gradi di libertà e questo diventa un problema assai serio, la cui soluzione richiede l'introduzione di principi quantistici.

### 3.5 Lo spettro di potenza di un segnale.

La quantità

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (3.31)$$

è detta spettro di potenza – o densità spettrale – del segnale  $f(t)$ . ed è proporzionale alla potenza media portata dal segnale alla frequenza  $\omega$ . L'operazione di limite nella definizione (3.31) serve ad evitare alcuni sgradevoli problemi di divergenza della densità spettrale.

Si noti che in prima approssimazione  $S(\omega) \approx |F(\omega)|^2 / T$ , dove  $T$  è l'effettiva durata del segnale.

<sup>3</sup> Il nome *teorema di Parseval* è quello normalmente utilizzato nella letteratura matematica. Nella letteratura fisica questo teorema è stato studiato da Rayleigh ed è noto anche con il nome di *teorema delle componenti di Fourier*, ed è utilizzato nella trattazione teorica della radiazione di corpo nero.

Possiamo ora applicare il teorema di convoluzione allo spettro di potenza per dimostrare un teorema che ha importanti applicazioni nell'analisi statistica dei segnali. Supponiamo che  $f(t)$  sia una funzione reale a media zero, e definiamo la funzione di autocorrelazione

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)f(t+\tau)dt \quad (3.32)$$

Se un segnale porta informazione allora il suo valore ad un certo istante deve essere correlato con il suo valore ad un istante successivo. D'altra parte se il segnale è "completamente casuale", allora i due valori sono del tutto scorrelati tra loro, e  $R(\tau) = \delta(\tau)$ .

Se si suppone che la  $f$  rappresenti un segnale fisico la  $f$  è necessariamente una funzione reale, e quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)f(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)e^{-i\omega(t+\tau)} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)e^{-i\omega(t+\tau)} d(t+\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{i\omega t} dt \int_{-T/2}^{+T/2} f(t')e^{-i\omega t'} dt' \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2 = S(\omega) \end{aligned} \quad (3.33)$$

perciò la trasformata di Fourier della funzione di correlazione è proprio la densità spettrale. Inversamente, la funzione di correlazione è l'antitrasformata della densità spettrale:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)f(t+\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.34)$$

Questa relazione tra densità spettrale e funzione di correlazione è nota con il nome di teorema di Wiener-Kintchin.

La funzione di correlazione definita sopra è chiamata spesso funzione di autocorrelazione, perché correla un segnale con se stesso. Nell'analisi dei segnali si utilizza spesso anche la funzione di correlazione tra segnali diversi (cross-correlation)<sup>4</sup>:

---

<sup>4</sup>qui si suppone che entrambi i segnali siano delle funzioni a valori reali a media nulla. Più in generale si definisce l'autocorrelazione per mezzo della formula

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (f(t) - \langle f \rangle)^* (f(t+\tau) - \langle f \rangle) dt$$

dove viene sottratto esplicitamente il valore medio  $\langle f \rangle$  e  $f$  è in generale una funzione a valori complessi. In modo simile si definisce anche la funzione di correlazione tra due segnali diversi  $f$  e  $g$ :

$$C(f, g; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (f(t) - \langle f \rangle)^* (g(t+\tau) - \langle g \rangle) dt$$

$$C(f, g; \tau) = \langle f(t)g(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)g(t + \tau) dt \quad (3.35)$$

Si noti che nel caso di un segnale reale  $F(\omega) = F^*(-\omega)$ , e poiché la densità spettrale è anch'essa una funzione reale, allora  $R(\tau) = R^*(-\tau)$ . Se il segnale  $f$  di cui si calcola l'autocorrelazione è reale, allora anche  $R$  è reale e quindi in questo caso  $R(\tau) = R(-\tau)$ , e  $R$  è una funzione pari (simmetrica rispetto l'origine: la misura della somiglianza del segnale con una copia spostata nel tempo di sé stesso è la stessa sia per  $\tau$  positivi, sia per  $\tau$  negativi).

### 3.6 Esempi di densità spettrali

- *Segnale di tipo sinusoidale*

$$f(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \quad (3.36)$$

la trasformata di Fourier di questo segnale è data da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt \right) = \pi A (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (3.37)$$

La densità spettrale è data invece dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt \right|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \left| \frac{2 \sin \left[ (\omega - \omega_0) \frac{T}{2} \right]}{(\omega - \omega_0)} + \frac{2 \sin \left[ (\omega + \omega_0) \frac{T}{2} \right]}{(\omega + \omega_0)} \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2 T}{4} \left| \text{sinc} \left[ (\omega - \omega_0) \frac{T}{2} \right] + \text{sinc} \left[ (\omega + \omega_0) \frac{T}{2} \right] \right|^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Al crescere di  $T$ , le funzioni sinc diventano sempre più strette, e i picchi corrispondenti diventano sempre più alti (a causa della moltiplicazione dell'ampiezza per  $T$ ), e si ottengono quindi due funzioni delta in posizione  $\pm \omega_0$ .

- *Oscillatore smorzato*

Questo segnale è definito dalla funzione seguente:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \varphi) & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

e la sua trasformata di Fourier è



$$F(\omega) = \int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\lambda t - i(\omega - \omega_0)t} + e^{-\lambda t - i(\omega + \omega_0)t} \right) dt = \frac{A}{2} \left( \frac{1}{\lambda + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\lambda + i(\omega + \omega_0)} \right) \quad (3.40)$$

e poiché la trasformata è una quantità finita, allora la densità spettrale definita dal limite (3.31) si annulla. Come può essere?

Il segnale (3.39) è significativamente diverso da zero solo in un intervallo ridotto, e quindi è ovvio che la sua potenza media, calcolata su un intervallo infinito, tenda a zero. Il calcolo della potenza media di un segnale del genere ha senso solo se si suppone che ci siano molti impulsi di questo tipo, che si ripetono con una frequenza media  $n$ .

Notiamo anzitutto che se l'impulso  $k$ -esimo parte al tempo  $t_k$ , allora possiamo applicare il teorema relativo alla traslazione dell'origine nel dominio del tempo, e si trova che la trasf. di Fourier calcolata precedentemente viene moltiplicata per un fattore di fase:

$$F(\omega) = \frac{A}{2} \left( \frac{1}{\lambda + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\lambda + i(\omega + \omega_0)} \right) e^{-i\omega t_k} \quad (3.41)$$

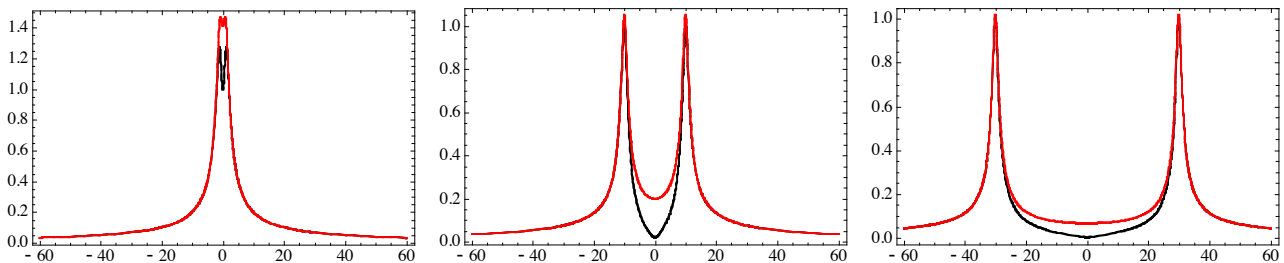
quindi si trova

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{nT}{T} \left| \frac{A}{2} \left( \frac{1}{\lambda + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\lambda + i(\omega + \omega_0)} \right) e^{-i\omega t_k} \right|^2 = \frac{nA^2}{4} \left| \frac{1}{\lambda + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\lambda + i(\omega + \omega_0)} \right|^2 \quad (3.42)$$

$$\approx \frac{nA^2}{4} \left( \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right)$$

dove l'ultima uguaglianza approssimata vale se  $\omega_0 \gg \lambda$ .

Le figure seguenti mostrano la densità spettrale per diversi valori del rapporto  $\omega_0/\lambda$  (1, 10 e 30): in queste figure la frequenza è misurata in unità di  $\lambda$  e la scala verticale è in unità arbitrarie. La curva nera è lo spettro esatto, mentre la curva rossa è la somma approssimata (ultima linea della formula (3.42)).



### 3.7 Definizione di decibel e valori di riferimento convenzionali per la potenza e l'ampiezza di un segnale (dBV, dBm, etc...).

Supponiamo di voler confrontare la potenza  $W$  di un segnale con la potenza  $W_0$  di un certo segnale di riferimento: è chiaro che l'operazione più ovvia per fare questo confronto è definire il rapporto  $W/W_0$ . C'è però un problema, questo rapporto copre normalmente molti ordini di grandezza, e quindi si preferisce usare il logaritmo in base 10 dello stesso rapporto. Questo logaritmo è il *bel*, ma ancora più importante è una quantità derivata, il *decibel*:

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{W}{W_0} \right) \quad (3.43)$$

Poiché nei circuiti elettrici la potenza è normalmente proporzionale al modulo quadro della tensione  $V$ , la (3.43) può venire riscritta nella forma

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{V^2}{V_0^2} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{V_0} \right) \quad (3.44)$$

Purtroppo la situazione è complicata da una grande quantità di altre quantità derivate, ad esempio

$$dBm = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{W}{1mWatt} \right) \quad (3.45)$$

$$dBV = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{\sqrt{\langle V^2 \rangle}}{1Volt} \right) \quad (3.46)$$

*Esercizi:*

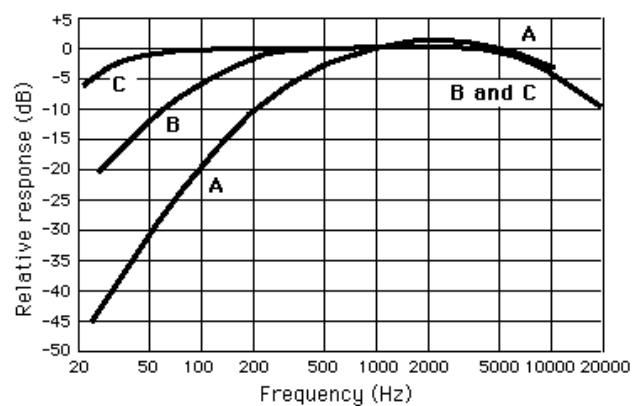
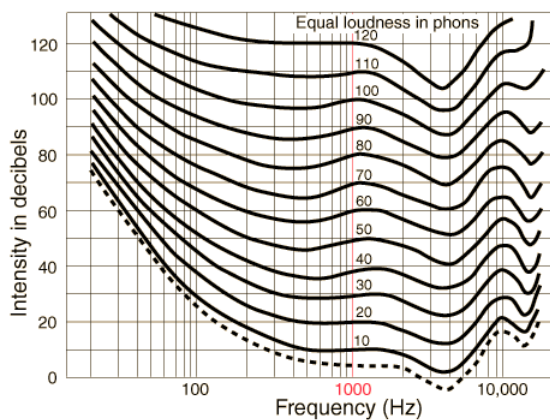
1. Esprimere in dB la differenza tra un segnale sinusoidale ed un altro che ha ampiezza doppia.
2. Esprimere in dB la differenza tra un segnale sinusoidale ed un altro che ha potenza doppia.
3. Esprimere in dB la differenza tra un segnale sinusoidale ed un altro che ha potenza a. dieci volte superiore; b. cento volte superiore; c. mille volte superiore.

I decibel sono normalmente utilizzati per la misura della potenza dei segnali, ad esempio in acustica. La figura seguente mostra un fonometro – un apparecchio per la misura della potenza sonora – prodotto dalla Hotek Technologies



I decibel sono misure relative ad un livello di riferimento: nel caso del suono il livello di riferimento è la *soglia di udibilità*, che corrisponde ad un'intensità sonora di  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>; la soglia del dolore corrisponde invece ad un'intensità sonora di 1 W/m<sup>2</sup>, e quindi le due soglie sono separate da 12 ordini di grandezza.

La figura che segue mostra a sinistra le curve di uguale sensibilità dell'orecchio: la scala in decibel indica la potenza sonora reale di un suono a frequenza fissa, e le curve corrispondono ad uguale sensazione sonora. Ad esempio un suono emesso con una frequenza di 1 KHz e un'intensità di 20 dB (sopra la soglia di udibilità, e quindi con un'intensità di  $10^{-10}$  W/m<sup>2</sup>), corrisponde a 20 phon; un suono emesso con una frequenza di 100 Hz e con un'intensità di 30 dB dà invece una sensazione sonora corrispondente a 10 phon.



Per adattare la risposta dei fonometri a questa risposta variabile dell'orecchio umano, ciascun fonometro può fare misure di intensità sonora utilizzando delle curve di risposta standard che sono mostrate nella figura a destra; di

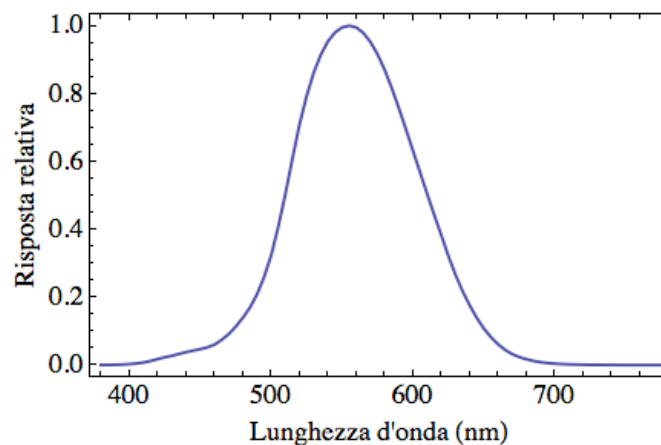
solito per fare misure che corrispondono alla risposta standard dell'orecchio umano si usa la curva A, e la misura viene fatta in dBA (decibel sopra la soglia di udibilità, pesati dalla curva di calibrazione A).

In generale, data una curva di risposta come quelle mostrate nella figura in alto a destra, si può calcolare la potenza pesata in questo modo: sia  $A(f)$  la funzione di risposta in funzione della frequenza, e sia  $S(f)$  la potenza del segnale, allora la potenza pesata è data da

$$S_A = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} A(f)S(f)df \tag{3.47}$$

dove l'integrale è fatto da una frequenza minima a una frequenza massima che sono associate al comportamento fisico del sistema in esame (per esempio, nel caso dell'orecchio umano queste frequenze potrebbero essere 20 Hz e 20KHz).

Concetti analoghi valgono anche in fotometria: la figura seguente mostra la curva di sensibilità dell'occhio umano (risposta relativa ad una data irradianza), secondo lo standard CIE 1988: questa curva viene usata per pesare l'irradianza (potenza per unità di superficie) e quindi stabilire la risposta dell'occhio umano ad un segnale luminoso.



I decibel vengono anche utilizzati per esprimere l'importante *rapporto segnale-rumore* (Signal-to-Noise Ratio, SNR). Il rapporto segnale rumore è definito come il rapporto tra la fluttuazione quadratica media del segnale divisa per la fluttuazione quadratica media dei disturbi (sia deterministici che casuali).

Fonte o descrizione del rumore	Livello del rumore (dBA)
Soglia del dolore	130
Martello che batte su una lamiera d'acciaio (a 50 cm)	114
Rivettatrice (a 10 m)	97
Fabbriche e negozi	50-75
Strada con molto traffico	68
Conversazione (a 1 m)	65
Stazione ferroviaria	55-65
Terminal di aeroporto	55-65
Stadio	55
Ufficio di grandi dimensioni	60-65
Ufficio in una fabbrica	60-63
Magazzino di grandi dimensioni	50-60
Magazzino di medie dimensioni	45-60
Ristorante	45-55
Ufficio di medie dimensioni	45-55
Automobile a 80 km/h	45-50
Garage	55
Piccolo magazzino	45-55
Hotel	42
Appartamento	42
Casa in una grande città	40
Casa in campagna	30
Teatro di prosa (vuoto) <sup>1</sup>	25-35
Sala da concerto (vuota) <sup>1</sup>	25-35
Chiesa (vuota) <sup>1</sup>	30
Aula scolastica (vuota) <sup>1</sup>	30
Studio radiofonico senza pubblico	20-25
Studio televisivo senza pubblico	25-35
Studio televisivo con pubblico	30-40
Palcoscenico	20-35
Studio di registrazione	20-30
Bisbiglio	15-20
Bisbiglio molto leggero (a 1 m)	10-15
Soglia di udibilità	0-5

Strumento	Potenza massima (watt)	Decibel sopra il livello di riferimento
Clarinetto	0.05	86
Viola da gamba	0.16	92
Pianoforte	0.27	94
Tromba	0.31	94
Trombone	6	107
Timpani	25	113

Tabelle di riferimento della potenza sonora, tratte da J. R. Pierce: *La scienza del suono*, Zanichelli (Bologna, 1988).

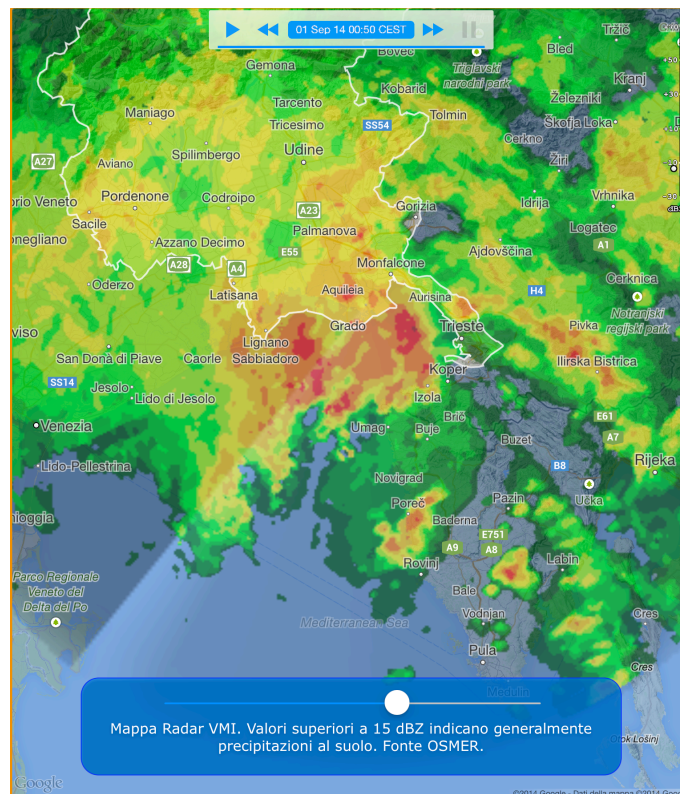
Infine, i decibel vengono utilizzati in tutti i casi dove è utile una scala logaritmica. Ad esempio, in meteorologia, vengono fatte misure di riflettività radar ( $Z$ ) che sono espresse in dBZ; la riflettività di riferimento  $Z_0$  è quella che di singole gocce con diametro di  $1 \text{ mm}^3$ , ed una densità di una goccia per  $\text{m}^3$ .

Si noti che la riflettività delle gocce in un piccolo volume di spazio è data dall'approssimazione

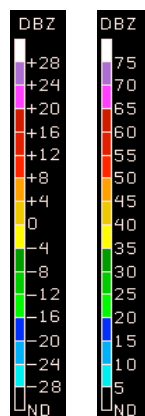
$$Z \propto \int_V N(D) D^6 dD \tag{3.48}$$

dove  $N(D)dD$  è il numero di gocce di diametro  $D$  nel volume  $V$ , e il fattore  $D^6$  viene dal calcolo della sezione d'urto di Rayleigh, che vale nel caso in cui la dimensione delle gocce sia molto più piccola della lunghezza d'onda delle microonde del radar (e questa è una condizione che si verifica in tutti i casi pratici).

I radar meteorologici possono operare in due condizioni standard, una ad alta sensibilità (*clear air mode*, in cui il radar rivela principalmente il particolato atmosferico, ed anche la neve), ed una a bassa sensibilità (*precipitation mode*, in cui il radar rivela la densità delle gocce di pioggia, che hanno un'alta riflettività e danno segnali forti). La mappa seguente mostra intense precipitazioni sul Friuli Venezia-Giulia il giorno 1 settembre 2014: l'immagine proviene dal radar dell'OSMER a Fossalon di Grado, il display è quello dell'app Meteo FVG



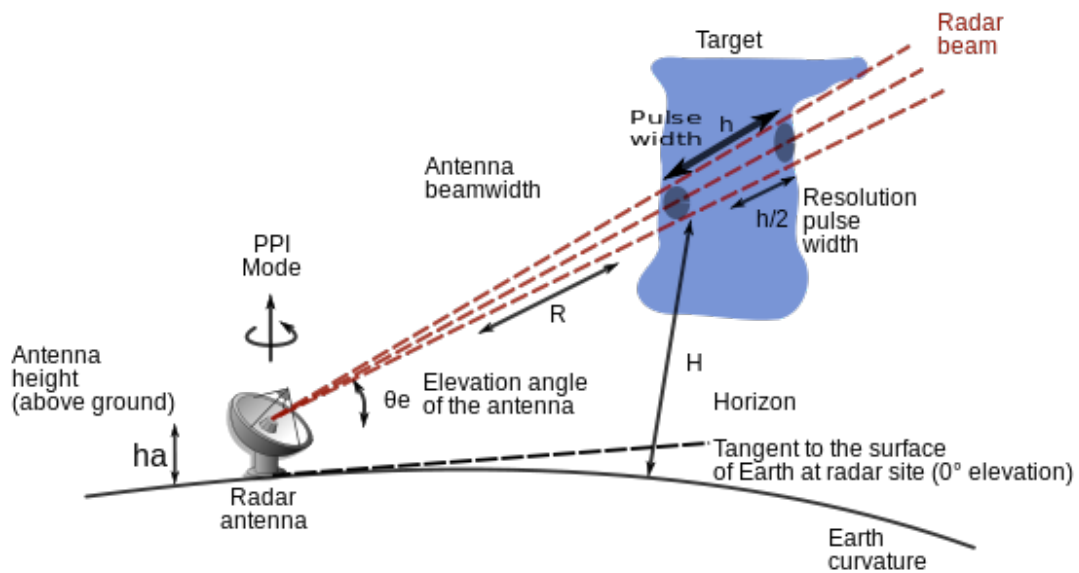
Il valore di dBZ viene mostrato con una scala colorata. Scale con colori standard sono ad esempio quelle del NOAA



A sinistra la scala usata per il clear air mode, a destra quella per il precipitation mode (fonte NOAA).

Valori di dBZ e precipitazioni (da Wikipedia)

dBZ	R (mm/h)	Intensity
5	0.07	Hardly Noticeable
10	0.15	Light Mist
15	0.3	Mist
20	0.6	Very Light
25	1.3	Light
30	2.7	Light to Moderate
35	5.6	Moderate Rain
40	11.53	Moderate Rain
45	23.7	Moderate to Heavy
50	48.6	Heavy
55	100	Very Heavy / Small Hail
60	205	Extreme / Moderate Hail
65	421	Extreme / Large Hail



Schema di funzionamento del radar meteorologico.

### Appendice: utilizzo delle trasformate di Fourier per la soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Un interessante utilizzo delle trasformate di Fourier è la soluzione di equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti.

Si noti innanzitutto che se prendiamo un segnale  $f(t)$  tale che  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$ , e se  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$  è la sua trasformata di Fourier, allora la trasformata di Fourier della derivata è

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega) \quad (3.48)$$

e in generale la derivata  $k$ -esima ha trasformata di Fourier  $G_k(\omega) = (i\omega)^k F(\omega)$ .

Allora, se consideriamo l'equazione di ordine  $n$ :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k} = f(t) \quad (3.49)$$

con  $X(\omega)$  trasformata di Fourier di  $x(t)$ , e  $F(\omega)$  trasformata di Fourier di  $f(t)$ , possiamo prendere la trasformata di Fourier dell'equazione e troviamo

$$\sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k X(\omega) = F(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k} \quad (3.50)$$

e infine

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{\sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.51)$$

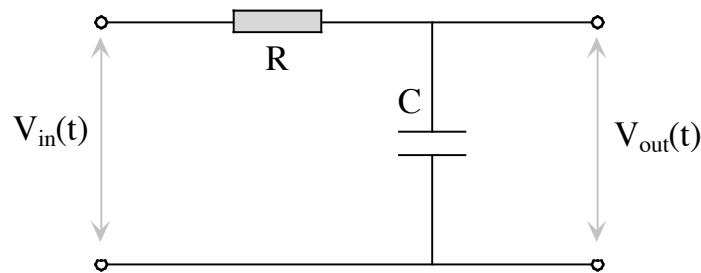


## 4. Filtri

I filtri sono dei meccanismi (analitici, numerici o fisici) attenuano o eliminano alcune parti dello spettro di un segnale. Cominciamo con un esempio pratico, il filtro RC, che analizziamo prima nel dominio della frequenza e quindi nel dominio del tempo.

### 4.1 Il filtro RC: analisi nel dominio della frequenza

Consideriamo il circuito mostrato in figura



e supponiamo che il generatore di tensione produca una differenza di potenziale  $V_{in}(t) = V_0 \cos \omega t$ , allora l'estensione complessa di questa differenza di potenziale è  $\hat{V}_{in}(t) = \hat{V}_0 e^{i\omega t}$  con  $\hat{V}_0 = V_0$  (la fase della tensione viene fissata a 0: questo è equivalente a scegliere un'origine opportuna per l'asse del tempo; si ricordi anche che nel formalismo AC solo la parte reale dell'estensione complessa ha significato fisico).

A causa della linearità del circuito, anche la corrente che circola nel circuito RC deve avere la stessa dipendenza temporale:  $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 e^{i\omega t}$ . Le espressioni  $\hat{V}_{in}(t) = \hat{V}_0 e^{i\omega t}$  e  $\hat{I}(t) = \hat{I}_0 e^{i\omega t}$  indicano anche che tensione e corrente sono rappresentate da una singola componente di Fourier.

L'equazione differenziale che descrive il circuito è

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt} \quad (4.1)$$

e quindi, sostituendo le espressioni complesse di tensione e corrente

$$i\omega \hat{V}_0 e^{i\omega t} = \frac{\hat{I}_0 e^{i\omega t}}{C} + R \cdot i\omega \hat{I}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \hat{V}_0 = \frac{\hat{I}_0}{i\omega C} + R \hat{I}_0 = \left( \frac{1}{i\omega C} + R \right) \hat{I}_0 \quad (4.2)$$

e quindi l'impedenza equivalente di capacità e resistenza in serie è  $Z = \left( \frac{1}{i\omega C} + R \right)$ . Perciò la corrente fornita dal generatore è data dall'espressione

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{V}_0}{Z} = \frac{\hat{V}_0}{\left( \frac{1}{i\omega C} + R \right)} = \frac{i\omega C \hat{V}_0}{(1 + i\omega RC)} \quad (4.3)$$

e quindi, tornando alla parte reale,

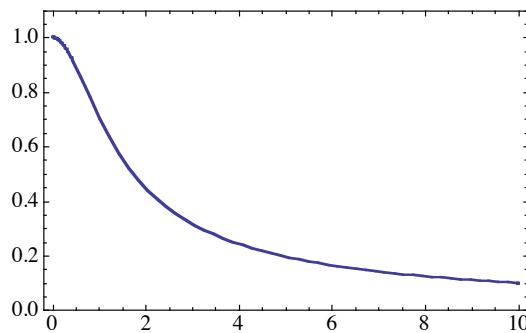
$$I(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\hat{V}_0 e^{i\omega t}}{\left( \frac{1}{i\omega C} + R \right)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{i\omega C V_0 e^{i\omega t}}{(1 + i\omega RC)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega C V_0 e^{i\omega t} e^{i(\pi/2 - \arctan \omega RC)}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \right] = \frac{\omega C V_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan \omega RC \right) \quad (4.4)$$

Possiamo allora calcolare altre due quantità:

- la tensione ai capi del condensatore è

$$\hat{V}_C = \frac{\hat{I}_0}{i\omega C} = \frac{1}{(1 + i\omega RC)} \hat{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \hat{V}_0 e^{-i \arctan \omega RC} \quad (4.5)$$

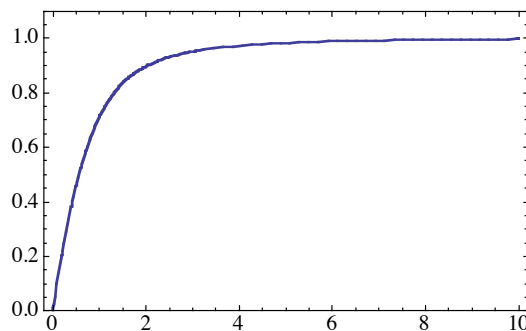
La figura che segue mostra l'andamento della funzione  $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$  in funzione della variabile adimensionale  $\omega RC$  (che però è proporzionale alla frequenza):



- la tensione ai capi della resistenza è

$$\hat{V}_R = R \hat{I}_0 = \frac{i\omega RC}{(1 + i\omega RC)} \hat{V}_0 = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \hat{V}_0 e^{-i(\arctan \omega RC - \pi/2)} \quad (4.6)$$

La figura che segue mostra l'andamento della funzione  $\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$  in funzione di  $\omega RC$ :



È particolarmente importante notare che la corrente che passa nel circuito è sfasata rispetto alla tensione prodotta dal generatore, e che lo sfasamento è espresso dal termine esponenziale  $e^{i(\pi/2 - \arctan \omega RC)}$ . Anche le altre tensioni che abbiamo analizzato sono sfasate rispetto alla tensione del generatore. Questa è una caratteristica importante del formalismo complesso: non basta l'intensità a caratterizzare il comportamento di una quantità, è necessario anche lo sfasamento.

La resistenza all'interno del circuito dissipa energia, e la potenza media dissipata è data da

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} |\hat{V}_R| |\hat{I}_0| \cos \varphi \quad (4.7)$$

dove  $\varphi$  indica lo sfasamento tra tensione ai capi della resistenza e corrente. D'altra parte questo sfasamento è nullo (la legge di Ohm implica che tensione e corrente sono proporzionali), e possiamo scrivere

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2R} |\hat{V}_R|^2 = \frac{1}{2R} \frac{\omega^2 R^2 C^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)} |\hat{V}_0|^2 = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \langle W \rangle_{\max} \quad (4.8)$$

dove  $\langle W \rangle_{\max}$  è la massima potenza che si può estrarre dal generatore in questa configurazione circuitale. Questo significa anche che la potenza restante (quella che si può prelevare collegando un circuito aggiuntivo in parallelo ai capi del condensatore) è data da

$$\langle W \rangle_C = \langle W \rangle_{\max} - \langle W \rangle = \left( 1 - \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) \langle W \rangle_{\max} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \langle W \rangle_{\max} \quad (4.9)$$

e quindi

$$\frac{\langle W \rangle_C}{\langle W \rangle_{\max}} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (4.10)$$

L'ultima formula mostra come si comporta il filtro RC nella configurazione passa-basso. Il *punto a -3dB* (quello che corrisponde ad un dimezzamento della potenza) si trova risolvendo l'equazione

$$\frac{\langle W \rangle_C}{\langle W \rangle_{\max}} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{2} \quad (4.11)$$

da cui si trova  $\omega_{1/2} = \pm \frac{1}{RC}$ .

Si consideri ora un segnale in tensione dato dalla sovrapposizione di molte componenti di Fourier:

$$V_{in}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.12)$$

e lo si filtra con un filtro RC passa basso come quello che abbiamo appena considerato, allora in corrispondenza alla componente di Fourier  $V(\omega)e^{i\omega t} d\omega/2\pi$ , il filtro fa passare in uscita una tensione con ampiezza modificata e sfasata:

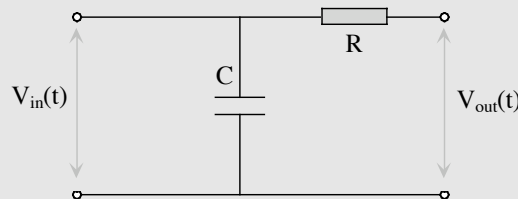
$$\frac{e^{i\varphi(\omega)}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} V(\omega)e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

Il segnale filtrato si ottiene sovrapponendo tutte le componenti di Fourier

$$V_{out}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\varphi(\omega)}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} V(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.14)$$

Si noti che il filtro introduce uno sfasamento dipendente dalla frequenza oltre ad un cambiamento di ampiezza: questa è una caratteristica generale di tutti i cosiddetti filtri causali (così chiamati perché realizzabili con sistemi fisici reali, come il circuito RC, che rispettano il principio di causalità).

*Esercizio:* Si consideri il circuito mostrato nella figura seguente e se ne discuta il comportamento in funzione della frequenza.



#### 4.2 Il filtro RC: analisi nel dominio del tempo

Le equazioni differenziali che regolano il comportamento del circuito nel dominio del tempo sono le seguenti:

$$\begin{cases} V_{in}(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \\ V_{out}(t) = \frac{Q(t)}{C} \end{cases} \quad (4.15)$$

quindi

$$V_{in}(t) = RC \frac{dV_{out}}{dt} + V_{out}(t) \quad (4.16)$$

A questo punto si può modificare l'equazione utilizzando i fattori esponenziali  $\exp\left(\pm \frac{t}{RC}\right)$ :

$$\frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC} V_{in}(t) = e^{\frac{t}{RC}} \frac{dV_{out}}{dt} + \frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC} V_{out}(t) = \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{t}{RC}} V_{out}(t) \right) \quad (4.17)$$

da cui si ottiene, integrando,

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{RC}} V_{out}(t) &= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{\frac{t'}{RC}} V_{in}(t') dt' \\ V_{out}(t) &= \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \int_{-\infty}^t e^{\frac{t'}{RC}} V_{in}(t') dt' = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{RC}} V_{in}(t') dt' = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') V_{in}(t') dt' = h * V_{in}(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

La tensione di uscita è la convoluzione della tensione di ingresso e della funzione

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{RC}} / RC & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Questo comportamento del filtro RC è un caso particolare della teoria dei sistemi lineari, che adesso analizziamo in modo più generale.

### 4.3 Sistemi lineari.

In generale un *sistema* è qualunque processo fisico accetti segnali in ingresso e produca segnali in uscita. Un sistema è dunque una specie di operatore  $S$  che agisce sui segnali e li modifica:  $y = S[x]$ .

Un sistema è detto *omogeneo* se  $S[\alpha x] = \alpha S[x]$ , ed è detto *additivo* se  $S[x_1 + x_2] = S[x_1] + S[x_2]$ . Un sistema che sia omogeneo ed additivo rispetta il principio di sovrapposizione, ed è detto *sistema lineare*.

Un sistema lineare la cui risposta sia invariante rispetto traslazioni dell'asse del tempo è detto *sistema lineare autonomo*: in questo caso  $y(t - \tau) = S[x(t - \tau)]$ . Inoltre un sistema è *rilassato* se ha smesso di rispondere agli stimoli passati. Infine un sistema è *causale* se la sua risposta dipende soltanto dal segnale di ingresso a tempi precedenti.

Se ora supponiamo di mandare in ingresso un singolo impulso del tipo  $V_i \delta(t - t')$  (un impulso ideale di durata infinitesima che si verifica al tempo  $t'$ ) troviamo che la risposta di un sistema lineare è  $V_i h(t - t')$ : quindi se consideriamo un segnale in ingresso come sovrapposizione di tanti impulsi elementari

$$V_{in}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(t') \delta(t - t') dt' \quad (4.20)$$

allora sostituendo le funzioni delta con la corrispondente risposta impulsiva si trova che la risposta globale del sistema è

$$V_{out}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(t')h(t-t')dt' \quad (4.21)$$

La funzione  $h$  è detta risposta impulsiva del sistema, e vediamo immediatamente che il sistema è causale se  $h(t) = 0$  per  $t < 0$ . Da quanto detto si vede che il filtro RC è un sistema lineare e che la sua funzione di risposta impulsiva è

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{RC}}/RC & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Nel caso di un sistema lineare la risposta del sistema è data dalla convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta impulsiva del sistema. Ricordando il teorema di convoluzione si trova che se il segnale di uscita è dato da

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(t-s)ds \quad (4.23)$$

e quindi la trasformata di Fourier del segnale di uscita è

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (4.24)$$

dove  $F$  e  $H$  sono rispettivamente le trasformate di Fourier del segnale di ingresso e della risposta impulsiva del sistema ( $H$  è detta anche *funzione di trasferimento* del sistema). Un sistema lineare agisce da filtro, nel senso che modifica la trasformata di Fourier e quindi la densità spettrale del segnale di ingresso.

Si può recuperare la trasformata di Fourier del segnale di ingresso da quella del segnale di uscita notando che

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{H(\omega)} \quad (4.25)$$

e quindi antitrasformando quest'ultima espressione si ottiene il segnale di ingresso

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{H(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.26)$$

È possibile misurare la funzione di trasferimento del sistema sollecitandolo con un impulso di breve durata. Supponiamo in prima approssimazione che questo impulso possa essere descritto da una funzione delta  $f(t) = A\delta(t)$ , allora

$$F(\omega) = A \quad (4.27)$$

e infine

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{A} G(\omega) \propto G(\omega) \quad (4.28)$$

In realtà non è possibile eccitare un sistema con un vero impulso della forma  $A\delta(t)$ , ma se  $f(t)$  è un singolo impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $T$  allora  $F(\omega) = A \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega / 2}$ , allora applicando al sistema un segnale di ingresso di questo tipo e misurando il segnale di uscita  $g(t)$  è possibile ricavare la risposta impulsiva da

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\omega G(\omega)}{2A \sin(\omega T / 2)} \quad (4.29)$$

e

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{F(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega G(\omega)}{2A \sin(\omega T / 2)} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.30)$$

*Domanda:* come si fa a trovare sperimentalmente la funzione di trasferimento di un sistema meccanico da utilizzare in ulteriori studi dello stesso sistema?

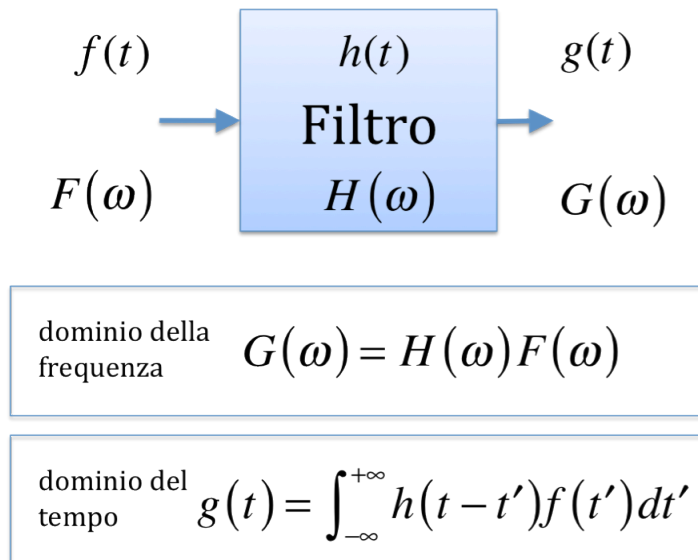
Spesso la funzione di trasferimento del sistema può essere rappresentata nella forma di un rapporto polinomiale: in questo caso gli zeri del numeratore (*zeri* della funzione di trasferimento) corrispondono alle frequenze che annullano la densità spettrale del segnale di uscita, mentre gli zeri del denominatore (*poli* della funzione di trasferimento) corrispondono a picchi della densità spettrale.

L'azione dei sistemi lineari corrisponde a quella dei filtri: i sistemi lineari sono dunque il modello matematico che descrive i *filtri analogici*.

Si noti che la condizione di realtà della funzione di risposta impulsiva implica che  $H^*(\omega) = H(-\omega)$ . Si noti anche che un filtro causale produce necessariamente uno sfasamento delle componenti di Fourier, infatti se lo sfasamento è nullo allora la funzione di trasferimento deve essere reale, e quindi  $h^*(t) = h(-t)$ , d'altra parte però la risposta impulsiva deve essere reale, quindi  $h(t) = h(-t)$ , e dunque la risposta impulsiva deve essere una funzione pari: questo però viola la causalità, e quindi le funzione di trasferimento di filtri causali sono necessariamente funzioni complesse che producono uno sfasamento variabile in funzione della frequenza.

#### 4.4 Classificazione dei filtri

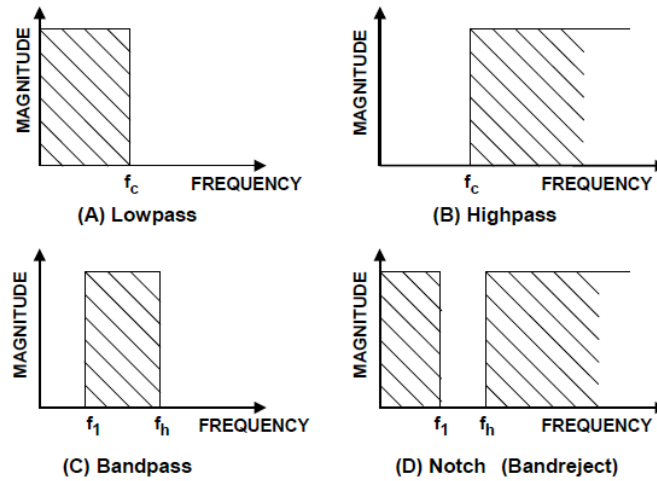
Lo schema di funzionamento generico dei filtri è mostrato nella figura seguente:



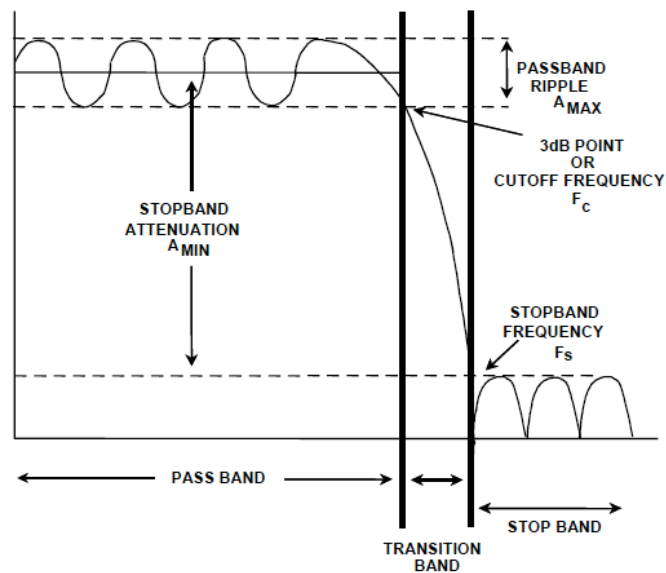
I filtri vengono classificati nel modo seguente:

- filtri analogici: filtri che operano sui segnali non campionati, e che agiscono sulla base della dinamica dei componenti dei filtri;
- filtri digitali: filtri che operano su segnali campionati, l'operazione del filtro è un'operazione numerica realizzata da una CPU;
- filtri passivi: filtri analogici, realizzati di solito con reti di componenti induttivi, capacitivi e resistivi;
- filtri attivi: filtri analogici, realizzati anche per mezzo di componenti attivi (transistor, amplificatori), che sono in grado di dare potenza ai segnali;
- filtri passa-basso: filtri che lasciano passare le componenti del segnale a bassa frequenza e attenuano le componenti ad alta frequenza;
- filtri passa-alto: filtri che lasciano passare le componenti del segnale ad alta frequenza e attenuano le componenti a bassa frequenza;
- filtri passa-banda: filtri che lasciano passare solo le componenti del segnale in una certa banda di frequenza(e);
- filtri notch: filtri che bloccano solo le componenti del segnale all'interno di una certa banda di frequenza.





Classificazione dei filtri più comuni; in questo caso viene mostrato il modulo della funzione di trasferimento, e in ogni caso le risposte mostrate sono quelle ideali.



Parametri che caratterizzano un filtro reale (in questo esempio, un filtro passa-basso).