

# Introduzione alle linee di trasmissione

## Corso di Metodi di Trattamento del Segnale

*Edoardo Milotti*

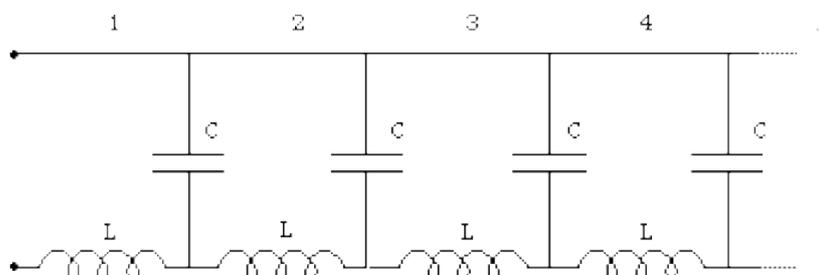
A.A. 2016-17

### Introduzione.

I segnali elettromagnetici che si utilizzano in elettronica si propagano lungo percorsi che vengono chiamati genericamente *linee di trasmissione*. Una linea di trasmissione può essere il doppino telefonico con cui si collega un telefono alla centrale, oppure il cavo coassiale che collega il televisore di casa all'antenna sul tetto, o ancora una fibra ottica che trasporta un segnale luminoso da un trasmettitore ad un ricevitore. Qui trattiamo la teoria elementare delle linee di trasmissione elettriche, i cui concetti si trasportano facilmente anche agli altri tipi di linee di trasmissione.

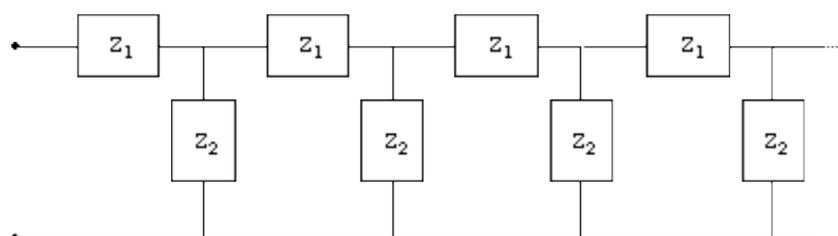
### Linee di trasmissione ad elementi discreti: analisi nel dominio della frequenza

Consideriamo la seguente rete semiinfinita ed analizziamola prima nel dominio della frequenza e quindi nel dominio del tempo:



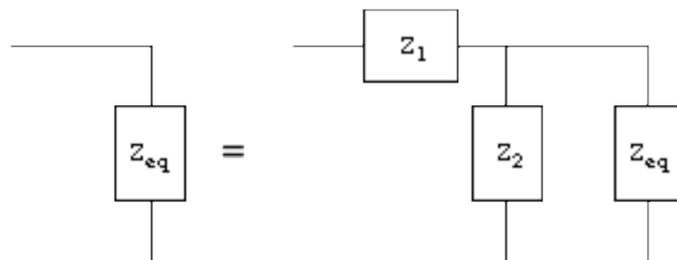
### Analisi nel dominio della frequenza

Per cominciare generalizziamo ancora un po', e consideriamo il seguente circuito semiinfinito:



dove  $Z_1$  e  $Z_2$  sono due impedenze, che nel caso della rete semiinfinita considerata nella prima figura valgono  $Z_1 = i\omega L$  e  $Z_2 = 1/i\omega C$ .

Allora un generatore di tensione posto all'estremità sinistra "vede" un'impedenza equivalente  $Z_{eq}$ , e poiché la rete è semiinfinita, aggiungere o togliere una sezione non cambia nulla perciò vale l'uguaglianza illustrata dalla figura seguente



e quindi

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_{eq}}{Z_2 + Z_{eq}}$$

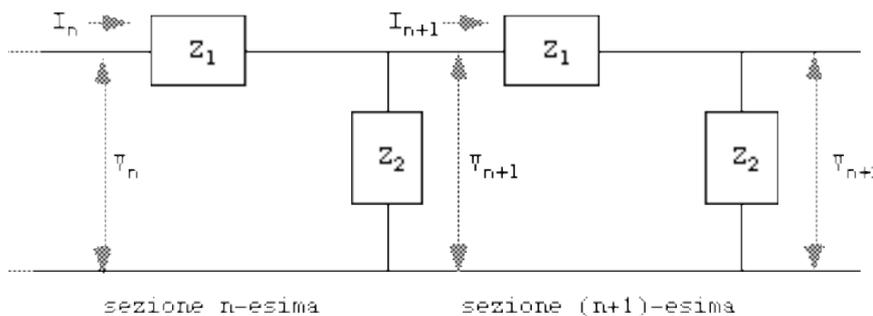
Questa è un'equazione quadratica che si risolve facilmente, e si ottiene

$$Z_{eq} = \frac{Z_1}{2} \pm \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2}$$

Si ottengono due valori per l'impedenza equivalente, ma solo uno di questi ha significato fisico, infatti se si fa tendere  $Z_2$  a 0, allora il ramo "in parallelo" diventa un cortocircuito, e l'impedenza totale deve valere  $Z_1$ . Ciò è possibile solo prendendo il segno +, quindi

$$Z_{eq} = \frac{Z_1}{2} + \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2}$$

Vediamo ora cosa succede alla tensione e alla corrente sezione per sezione. La figura seguente illustra i simboli utilizzati per indicare tensioni e correnti in ciascuna sezione:



L'equazione di Kirchhoff per la maglia corrispondente alla (n+1)-esima sezione è

$$V_n = I_n + Z_1 V_{n+1}$$

mentre l'equazione di Kirchhoff per le correnti è

$$I_n = \frac{V_{n+1}}{Z_2} + I_{n+1}$$

e inoltre, per definizione di impedenza equivalente

$$V_n = I_n Z_{eq}$$

Troviamo allora

$$V_{n+1} = V_n \left( 1 - \frac{Z_1}{Z_{eq}} \right) = \alpha V_n$$

e quindi

$$V_{n+1} = \alpha^n V_1$$

con

$$\alpha = \left( 1 - \frac{Z_1}{Z_{eq}} \right) = \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2} - Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2} + Z_1}$$

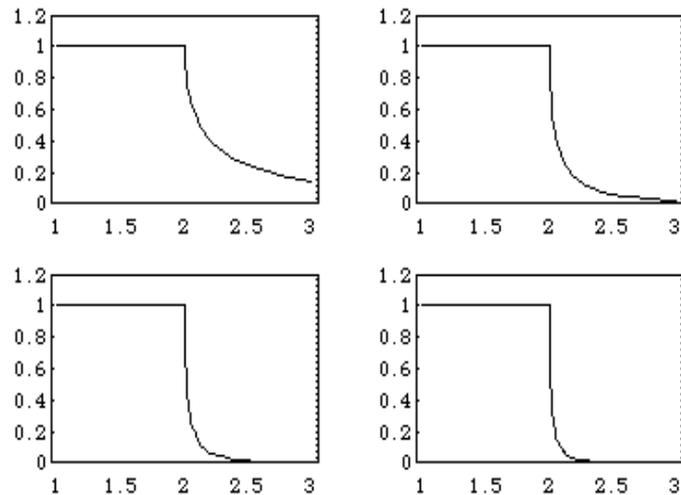
Se torniamo alla rete di induttanze e capacità mostrata all'inizio, otteniamo

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C} - i\omega L}{\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C} + i\omega L}$$

Ci sono due casi possibili: la radice  $\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C}$  è una quantità reale, oppure è una quantità immaginaria. Nel primo caso  $\alpha$  è il rapporto di due numeri complessi coniugati, e quindi ha modulo unitario, e possiamo scrivere  $\alpha = e^{i\varphi}$ , e quindi  $V_{n+1} = e^{in\varphi} V_1$ , cioè la tensione si mantiene costante in modulo in ciascuna sezione, e l'unico effetto di una sezione è quello di introdurre uno sfasamento. Se invece la radice è una quantità immaginaria, allora possiamo semplificare l'unità immaginaria, e otteniamo

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 - 4L/C} - \omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 - 4L/C} + \omega L} < 1$$

perciò la tensione diminuisce gradualmente. La figura seguente mostra la funzione  $|\alpha|^n$  dopo la prima, la seconda, la terza e la quarta sezione ( $n=1,2,3,4$ ), in funzione di  $\omega/\omega_0$  (con  $\omega_0 = 2/\sqrt{LC}$ ):

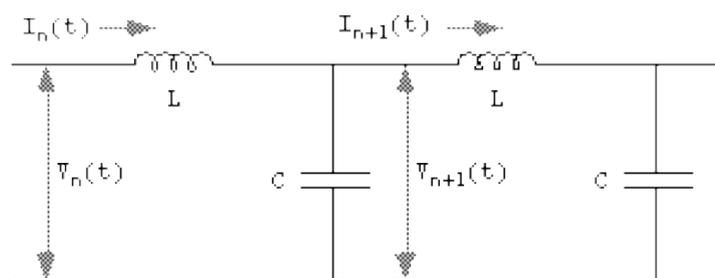


Come si vede questa rete si comporta come un filtro di caratteristiche sempre migliori quanto più aumenta il numero degli stadi.

**Domanda:** il comportamento di questa rete semiinfinita è stato analizzato utilizzando il formalismo complesso e la legge di Ohm generalizzata. Visto che il circuito non ha dissipazione (non ci sono resistenze), come mai un termine forzante non produce asintoticamente una divergenza nei risultati?

### Analisi nel dominio del tempo

Consideriamo ora le equazioni di Kirchhoff del circuito:



$$\begin{cases} V_n(t) = L \frac{dI_n}{dt} + V_{n+1}(t) \\ I_n(t) = I_{n+1}(t) + C \frac{dV_{n+1}}{dt} \end{cases}$$

Dalla seconda troviamo

$$I_n(t) - I_{n+1}(t) = C \frac{dV_{n+1}}{dt}$$

e quindi

$$\frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} = C \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2}$$

D'altra parte dalla prima si trova

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{1}{L} (V_n(t) - V_{n+1}(t))$$

e quindi, spostando l'indice di 1

$$\frac{dI_{n+1}}{dt} = \frac{1}{L} (V_{n+1}(t) - V_{n+2}(t))$$

Infine

$$C \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2} = \frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} = \frac{1}{L} (V_n(t) - 2V_{n+1}(t) + V_{n+2}(t))$$

Adesso supponiamo che l'indice  $n$  identifichi sezioni del circuito che sono in posizione  $x_n = n\Delta x$ , così che  $V_n(t) = V(x_n, t)$ , allora il termine nella parentesi a destra è un'approssimazione della derivata seconda rispetto la posizione<sup>1</sup>, così che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\Delta x^2}{LC} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Introducendo le induttanze e le capacità per unità di lunghezza,  $\mathcal{L} = L/\Delta x$  e  $\mathcal{C} = C/\Delta x$  si trova

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Questa è un'equazione d'onda unidimensionale: la velocità di fase è  $v = 1/\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}$ . Inoltre anche l'impedenza può essere caratterizzata in termini di queste quantità:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1}{2} + \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}{2} = \frac{i\omega L}{2} + \frac{\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C}}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$$

---

<sup>1</sup> Questo si vede facilmente dall'espansione in serie di Taylor

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

da cui si ottiene

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + \frac{d^2f}{dx^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^4)$$

e infine

$$\frac{d^2f}{dx^2} = f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x) + O(\Delta x^2)$$

### Analisi della linea in presenza di dissipazione

Le linee di trasmissione reali hanno sempre un po' di dissipazione resistiva. Trascuriamo la resistenza in parallelo con la capacità e consideriamo solo la resistenza in serie con l'induttanza. Allora le equazioni che descrivono il circuito sono

$$\begin{cases} V_n(t) = L \frac{dI_n}{dt} + RI_n + V_{n+1}(t) \\ I_n(t) = I_{n+1}(t) + C \frac{dV_{n+1}}{dt} \end{cases}$$

Dalla seconda troviamo, proprio come prima,

$$I_n(t) - I_{n+1}(t) = C \frac{dV_{n+1}}{dt}$$

e

$$\frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} = C \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2}$$

mentre dalla prima troviamo

$$V_n(t) = L \frac{dI_n}{dt} + RI_n + V_{n+1}(t)$$

e spostando l'indice di 1

$$V_{n+1}(t) = L \frac{dI_{n+1}}{dt} + RI_{n+1} + V_{n+2}(t)$$

Sottraendo quest'ultima equazione dalla precedente, troviamo

$$V_n(t) - V_{n+1}(t) = L \left( \frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} \right) + R(I_n - I_{n+1}) + V_{n+1}(t) - V_{n+2}(t)$$

e quindi – sostituendo le espressioni scritte sopra per le differenze delle correnti e delle loro derivate – otteniamo l'equazione

$$V_n(t) - V_{n+1}(t) = LC \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2} + RC \frac{dV_{n+1}}{dt} + V_{n+1}(t) - V_{n+2}(t)$$

e infine, introducendo la derivata seconda rispetto lo spazio

$$\Delta x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + RC \frac{\partial V}{\partial t}$$

Se ora introduciamo la induttanza, capacità e resistenza per unità di lunghezza, troviamo

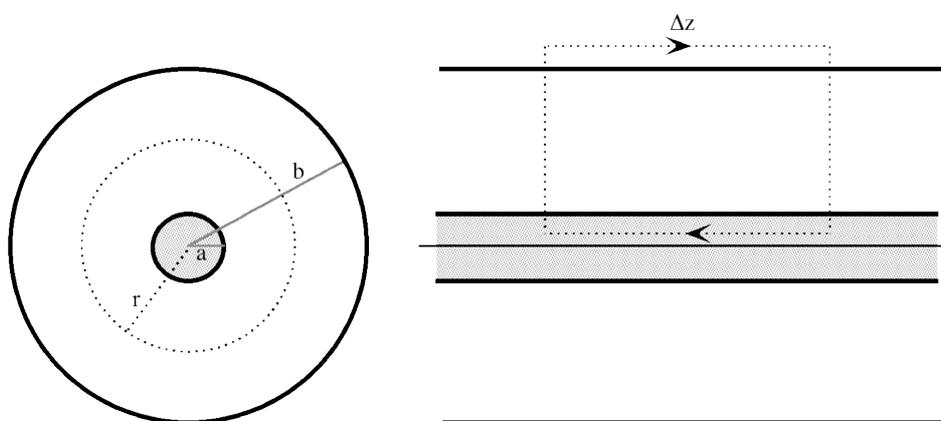
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \mathcal{L}\mathcal{C} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \mathcal{R}\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t}$$

che è l'equazione del telegrafista.

## Cavi coassiali

Prendiamo ora un importante caso pratico che si incontra molto frequentemente, quello delle linee di trasmissione realizzate con cavi coassiali. In questo caso è facile calcolare l'induttanza e la capacità distribuite e da queste tutte le proprietà della linea di trasmissione.

Una linea di trasmissione coassiale è costituita - nella sua forma più semplice - da due conduttori cilindrici coassiali separati da una regione di spazio vuoto, come nella figura qui sotto, in cui la linea di trasmissione è vista in sezione trasversale e longitudinale.



La capacità di un tratto di linea lungo  $\ell$  si trova dal teorema di Gauss: poiché il conduttore è globalmente neutro il campo è nullo dentro il conduttore interno e fuori dal conduttore esterno, per simmetria il campo elettrico è radiale, e se  $\lambda$  è la densità di carica lineare, allora il flusso del campo elettrico  $\mathbf{E}(r)$  attraverso un cilindro che ha lo stesso asse del cavo, altezza  $\Delta z$  e raggio  $r$  è dato da  $2\pi r \ell E(r)$ , quindi  $2\pi r \ell E(r) = \lambda \ell / \epsilon = \lambda \ell / \epsilon_r \epsilon_0$ , e il campo elettrico è  $E(r) = \lambda / 2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r$ . Integrando quest'ultima espressione si trova che la differenza di potenziale elettrico tra i due conduttori è data (in valore assoluto) da:

$$\Delta V = \int_a^b E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0} \ln \frac{b}{a} = \frac{Q / \Delta z}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

e quindi la capacità per unità di lunghezza è

$$c = \frac{Q}{\Delta V \Delta z} = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

Possiamo trovare in modo analogo l'induttanza per unità di lunghezza utilizzando la legge di induzione di Faraday: il campo magnetico dovuto ad una corrente  $I$  nella linea può essere diverso da zero solo tra i due conduttori (spiegare perché), e vale (in modulo)  $B(r) = \mu_r \mu_0 I / 2\pi r$  (da dove si ricava quest'ultima espressione?). Perciò il flusso del campo magnetico attraverso la superficie tratteggiata nella figura della sezione longitudinale della linea coassiale vale

$$\Phi = \int_a^b B(r) \Delta z dr = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi} \Delta z \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi} \Delta z \ln \frac{b}{a}$$

Conseguentemente, la forza elettromotrice indotta lungo il contorno della superficie tratteggiata è

$$f. e. m. = \frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \Delta z \ln \frac{b}{a} \right) \frac{dI}{dt}$$

e infine l'induttanza di questo tratto di linea è

$$L = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \Delta z \ln \frac{b}{a}$$

da cui si ottiene l'induttanza per unità di lunghezza

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Da questi risultati troviamo la velocità di fase

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

e l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione

$$Z_{eq} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 \ln \frac{b}{a}$$

dove  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$  è l'impedenza del vuoto, una quantità che si ritrova spesso in calcoli di questo tipo.

### Altre linee di trasmissione

Oltre ai cavi coassiali ci sono molte altre linee di trasmissione elettriche con sezioni diverse. La tabella seguente è tratta da S. Ramo, J. R. Whinnery e T. Van Duzen *Fields and Waves in Communication Electronics* (Wiley, 1993) e riporta i risultati relativi ad alcune linee di trasmissione di uso comune

				
			$p = \frac{s}{d}$ $q = \frac{s}{D}$	Formulas for $a \ll b$
Capacitance $C$ , farads/meter	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)}$	-----	$\frac{\epsilon b}{a}$
External inductance $L$ , henrys/meter	$\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)$	-----	$\mu \frac{a}{b}$
Conductance $G$ , siemens/meter	$\frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} = \frac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$	$\frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)} = \frac{\pi\omega\epsilon''}{\cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)}$	-----	$\frac{\sigma b}{a} = \frac{\omega\epsilon'' b}{a}$
Resistance $R$ , ohms/meter	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_i}\right)$	$\frac{2R_s}{\pi d} \left[ \frac{s/d}{\sqrt{(s/d)^2 - 1}} \right]$	$\frac{2R_{s2}}{\pi d} \left[ 1 + \frac{1+2p^2}{4p^4} (1-4q^2) \right] + \frac{8R_{s2}}{\pi D} q^2 \left[ 1+q^2 - \frac{1+4p^2}{8p^4} \right]$	$\frac{2R_s}{b}$
Internal inductance $L_i$ , henrys/meter (for high frequency)	$\frac{R}{\omega}$			
Characteristic impedance at high frequency $Z_0$ , ohms	$\frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$	$\frac{\eta}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)$	$\frac{\eta}{\pi} \left\{ \ln \left[ 2p \frac{(1-q^2)}{(1+q^2)} \right] - \frac{1+4p^2}{16p^4} (1-4q^2) \right\}$	$\eta \frac{a}{b}$
$Z_0$ for air dielectric	$60 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$	$120 \cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right) \cong 120 \ln\left(\frac{2s}{d}\right)$ if $s/d \gg 1$	$120 \left\{ \ln \left[ 2p \frac{(1-q^2)}{(1+q^2)} \right] - \frac{1+4p^2}{16p^4} (1-4q^2) \right\}$	$120\pi \frac{a}{b}$
Attenuation due to conductor $\alpha_c$	$\frac{R}{2Z_0}$			
Attenuation due to dielectric $\alpha_d$	$\frac{GZ_0}{2} = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)$			
Total attenuation dB/meter	$8.686(\alpha_c + \alpha_d)$			
Phase constant for low-loss lines $\beta$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon'} = \frac{2\pi}{\lambda}$			

All units above are mks.

$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' =$  permittivity, farads/meter

$\mu =$  permeability, henrys/meter

$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  ohms

} for the dielectric

$\epsilon'' =$  loss factor of dielectric  $= \sigma/\omega$

$R_s =$  skin effect surface resistivity of conductor, ohms

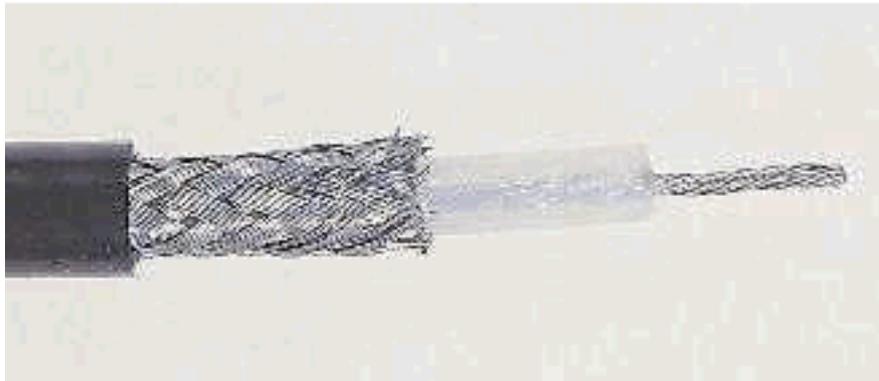
$\lambda =$  wavelength in dielectric

Formulas for shielded pair obtained from Green, Leibe, and Curtis, *Bell System Tech. Journ.*, 15, pp. 248-284 (April 1936).

Dal punto di vista numerico calcolare le caratteristiche di una linea di trasmissione con profilo arbitrario è relativamente semplice ed esiste un progetto di SourceForge (distribuito gratuitamente con licenza GNU): *ATLC - Arbitrary Transmission Line Calculator* (documentazione, download e altro all'indirizzo <http://atlc.sourceforge.net>)

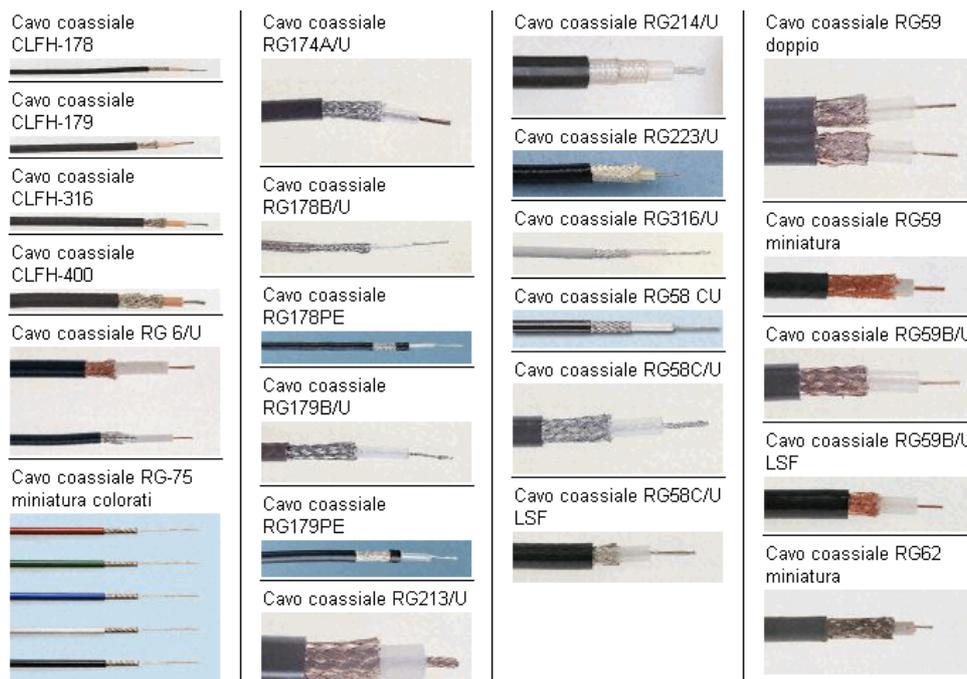
## Esempi di linee di trasmissione

Il mercato delle linee di trasmissione offre moltissime alternative. Un tipo di cavo coassiale molto comune è il cavo RG58/U: in questo caso la permeabilità dielettrica relativa del dielettrico è di 2.26 e i raggi sono  $a = 0.406$  mm e  $b = 1.48$  mm (Esercizio: si utilizzino questi valori per trovare l'impedenza caratteristica e la velocità di fase in questo tipo di cavo coassiale).



Un cavo coassiale RG58/CU, con conduttori in rame stagnato, isolato con polietilene (PET) e con guaina esterna in polivinilcloruro (PVC) nero.

La figura seguente mostra altri tipi di cavi coassiali (immagine tratta dal catalogo RS Components): i diversi cavi hanno differenti capacità distribuite e impedenze caratteristiche.



## Connettori

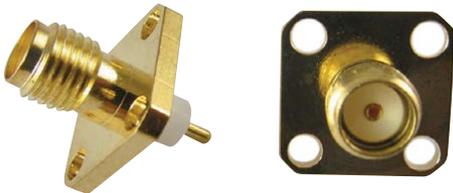
Le linee di trasmissione elettrica vanno utilizzate con connettori adeguati, tali da mantenere l'uniformità della linea di trasmissione (quindi, idealmente, con gli stessi valori di induttanza e capacità per unità di lunghezza). Le figure che seguono mostrano alcuni connettori comunemente usate ed alcune delle loro caratteristiche.



Connettori UHF di vecchio tipo.



Un connettore BNC, frequentemente usato nell'esperienza in fisica



Il connettore SMA è frequentemente usato per applicazioni in RF e microonde.



Anche i connettori MCX hanno frequenti applicazioni in RF.

# CONNECTOR FREQUENCIES: Coaxial Connectors

Coaxial Designations	Maximum Frequency	Visual Gauge
----------------------	-------------------	--------------



ITU BANDS	EU, NATO, US ECM BANDS	IEEE ALLOCATION BANDS	Maximum Frequency	Visual Gauge
4	VLF	3 kHz	100 km	
4	VLF	6 kHz	50 km	
4	VLF	9 kHz	33.3 km	
4	VLF	12 kHz	25 km	
4	VLF	15 kHz	20 km	
4	VLF	18 kHz	16.7 km	
4	VLF	21 kHz	14.3 km	
4	VLF	24 kHz	11.1 km	
4	VLF	27 kHz	10 km	
4	VLF	30 kHz	5 km	
4	VLF	60 kHz	5 km	
4	VLF	90 kHz	3.33 km	
4	VLF	120 kHz	2.5 km	
4	VLF	150 kHz	2 km	
4	VLF	180 kHz	1.67 km	
4	VLF	210 kHz	1.43 km	
4	VLF	240 kHz	1.25 km	
4	VLF	270 kHz	1.11 km	
4	VLF	300 kHz	1 km	
5	LF	600 kHz	500 m	
5	LF	900 kHz	333 m	
5	LF	1200 kHz	250 m	
5	LF	1500 kHz	200 m	
5	LF	1800 kHz	167 m	
5	LF	2100 kHz	143 m	
5	LF	2400 kHz	125 m	
5	LF	2700 kHz	111 m	
5	LF	3000 kHz	100 m	
6	MF	3000 kHz	100 m	
6	MF	6000 kHz	50 m	
6	MF	9000 kHz	33.3 m	
6	MF	12000 kHz	25 m	
6	MF	15000 kHz	20 m	
6	MF	18000 kHz	16.7 m	
6	MF	21000 kHz	14.3 m	
6	MF	24000 kHz	12.5 m	
6	MF	27000 kHz	11.1 m	
6	MF	30000 kHz	10 m	
7	HF	30 MHz	10 m	
7	HF	60 MHz	5 m	
7	HF	90 MHz	3.33 m	
7	HF	120 MHz	2.5 m	
7	HF	150 MHz	2 m	
7	HF	180 MHz	1.67 m	
7	HF	210 MHz	1.43 m	
7	HF	240 MHz	1.25 m	
7	HF	270 MHz	1.11 m	
7	HF	300 MHz	1 m	
8	VHF	300 MHz	1 m	
8	VHF	600 MHz	500 mm	
8	VHF	900 MHz	333 mm	
8	VHF	1200 MHz	250 mm	
8	VHF	1500 MHz	200 mm	
8	VHF	1800 MHz	167 mm	
8	VHF	2100 MHz	143 mm	
8	VHF	2400 MHz	125 mm	
8	VHF	2700 MHz	111 mm	
8	VHF	3000 MHz	100 mm	
9	UHF	3000 MHz	100 mm	
9	UHF	6000 MHz	50 mm	
9	UHF	9000 MHz	33.3 mm	
9	UHF	12000 MHz	25 mm	
9	UHF	15000 MHz	20 mm	
9	UHF	18000 MHz	16.7 mm	
9	UHF	21000 MHz	14.3 mm	
9	UHF	24000 MHz	12.5 mm	
9	UHF	27000 MHz	11.1 mm	
9	UHF	30000 MHz	10 mm	
10	SHF	30 GHz	10 mm	
10	SHF	60 GHz	5 mm	
10	SHF	90 GHz	3.33 mm	
10	SHF	120 GHz	2.5 mm	
10	SHF	150 GHz	2 mm	
10	SHF	180 GHz	1.67 mm	
10	SHF	210 GHz	1.43 mm	
10	SHF	240 GHz	1.25 mm	
10	SHF	270 GHz	1.11 mm	
10	SHF	300 GHz	1 mm	
11	EHF	300 GHz	1 mm	
11	EHF	600 GHz	500 μm	
11	EHF	900 GHz	333 μm	
11	EHF	1200 GHz	250 μm	
11	EHF	1500 GHz	200 μm	
11	EHF	1800 GHz	167 μm	
11	EHF	2100 GHz	143 μm	
11	EHF	2400 GHz	125 μm	
11	EHF	2700 GHz	111 μm	
11	EHF	3000 GHz	100 μm	
12	THF-FIR	3000 GHz	100 μm	
12	THF-FIR	6000 GHz	50 μm	
12	THF-FIR	9000 GHz	33.3 μm	
12	THF-FIR	12000 GHz	25 μm	
12	THF-FIR	15000 GHz	20 μm	
12	THF-FIR	18000 GHz	16.7 μm	
12	THF-FIR	21000 GHz	14.3 μm	
12	THF-FIR	24000 GHz	12.5 μm	
12	THF-FIR	27000 GHz	11.1 μm	
12	THF-FIR	30000 GHz	10 μm	

microwaves&rf microwaves&rf microwaves&rf microwaves&rf microwaves&rf microwaves&rf

Tabella riassuntiva delle caratteristiche di utilizzo dei connettori più comuni.

## Riflessione e trasmissione

Se la linea di trasmissione non è uniforme e ci sono delle interfacce tra spezzoni di linea con caratteristiche diverse – per esempio proprio a causa della presenza di connettori – allora si osserva che quando i segnali raggiungono le interfacce vengono in parte trasmessi ed in parte riflessi. Ci si può quindi chiedere quanta parte del segnale venga riflessa e quanta venga

trasmessa, ed in questa sezione calcoliamo appunto i coefficienti di riflessione e di trasmissione.

Abbiamo visto sopra che i segnali lungo una linea di trasmissione possono venire descritti da un'equazione d'onda unidimensionale, e quindi la tensione lungo la linea è data da funzioni del tipo  $V_{\pm}(x, t) = V(x \pm vt)$ , dove  $V_+(x, t)$  è un segnale che si muove in direzione di  $z$  crescente, mentre  $V_-(x, t)$  è un segnale che si muove in direzione di  $z$  decrescente. Supponiamo ora di lavorare con il formalismo delle tensioni alternate e di terminare la linea con un carico  $Z_L$ : in corrispondenza al carico possiamo scrivere che la somma delle tensioni dei segnali che si muovono in direzione positiva e in direzione negativa deve dare la tensione ai capi del carico. Inoltre la corrente totale dovuta alla somma della corrente in direzione positiva più la corrente in direzione negativa deve dare la corrente che fluisce nel carico. In simboli possiamo scrivere:

$$V_+ + V_- = V_L$$

$$I_+ + I_- = \frac{V_+}{Z_{eq}} - \frac{V_-}{Z_{eq}} = \frac{V_L}{Z_L}$$

dove il segno meno nella seconda equazione corrisponde alla direzione della corrente che fluisce in direzione negativa. Ora possiamo definire il coefficiente di riflessione come la frazione di ampiezza del segnale che torna indietro, e il coefficiente di trasmissione come la frazione di ampiezza del segnale che riesce a passare nel carico, vale a dire  $\mathcal{R} = V_-/V_+$ ,  $\mathcal{T} = V_L/V_+$ , e quindi, utilizzando le relazioni trovate sopra

$$\mathcal{T} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{eq}}$$

$$\mathcal{R} = \frac{Z_L - Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}}$$

Consideriamo ora due casi particolari: quello della linea terminata con un corto circuito e quello della linea terminata con un circuito aperto (casi in cui solo il coefficiente di riflessione ha significato fisico). Se la linea viene cortocircuitata, allora  $Z_L = 0$ , e quindi  $\mathcal{R} = -1$ , mentre se la linea è terminata con un circuito aperto, allora  $Z_L = \infty$ , e quindi  $\mathcal{R} = 1$ : questo vuol dire che quando c'è riflessione da un corto circuito il segnale viene invertito, mentre la riflessione da un circuito aperto mantiene il segno del segnale.

### Potenza assorbita

La corrente che fluisce in direzione positiva è  $V_+/Z_{eq}$ , mentre la corrente che fluisce in direzione negativa è  $V_-/Z_{eq}$ ; poiché l'impedenza caratteristica è una quantità reale, la potenza media dell'onda che viaggia in direzione positiva è  $|V_+|^2/2Z_{eq}$ , mentre la potenza media dell'onda che viaggia in direzione negativa è  $|V_-|^2/2Z_{eq}$ , quindi la potenza media assorbita dal carico è

$$|V_+|^2/2Z_{eq} - |V_-|^2/2Z_{eq}$$

La frazione di potenza assorbita dal carico rispetto la potenza incidente è dunque

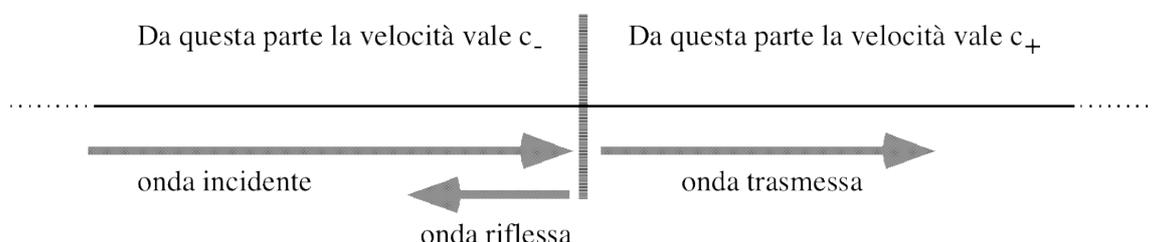
$$f = \frac{|V_+|^2/2Z_{eq} - |V_-|^2/2Z_{eq}}{|V_+|^2/2Z_{eq}} = 1 - \frac{|V_-|^2}{|V_+|^2} = 1 - |\mathcal{R}|^2$$

### Collegamenti con la teoria ondulatoria

Le idee introdotte nelle sezioni precedenti sono state sviluppate nel contesto limitato delle linee di trasmissione, ma hanno una valenza molto più generale: le linee di trasmissione che abbiamo analizzato sono infatti una versione classica unidimensionale di una teoria di campo. Vale dunque la pena di analizzare i coefficienti di riflessione e trasmissione in questo contesto più generale.

### Calcolo dei coefficienti di riflessione e trasmissione

Supponiamo che ci sia un'onda che si propaga verso l'interfaccia che divide i due mezzi, e supponiamo che essa abbia un'ampiezza massima uguale a 1, mentre l'onda trasmessa ha un'ampiezza  $\mathcal{T}$  e l'onda riflessa ha un'ampiezza  $\mathcal{R}$ .



Se l'espressione analitica dell'onda incidente è  $\Phi(t - x/c_-)$ , allora l'onda riflessa è  $\mathcal{R} \Phi(t + x/c_-)$ , e l'onda trasmessa è  $\mathcal{T} \Phi(t - x/c_+)$ , perciò – dal principio di sovrapposizione – la soluzione dell'equazione d'onda nella regione a sinistra dell'interfaccia è

$$\Phi\left(t - \frac{x}{c_-}\right) + \mathcal{R} \Phi\left(t + \frac{x}{c_-}\right)$$

mentre la soluzione nella regione a destra dell'interfaccia è semplicemente

$$\mathcal{T} \Phi(t - x/c_+)$$

Il coefficiente  $\mathcal{R}$  è il *coefficiente di riflessione*, mentre il coefficiente  $\mathcal{T}$  è il *coefficiente di trasmissione*. Quindi le condizioni all'interfaccia che si trova in  $z = 0$  (continuità dell'onda e della sua derivata) diventano

$$\begin{aligned} \Phi(t) + \mathcal{R} \Phi(t) &= \mathcal{T} \Phi(t) \\ \frac{1}{c_-} [-\Phi'(t) + \mathcal{R} \Phi'(t)] &= \frac{\mathcal{T}}{c_+} \Phi'(t) \end{aligned}$$

e da queste si ottiene, se  $\Phi$  e la sua derivata non sono identicamente nulle,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{2c_+}{c_+ + c_-} \\ \mathcal{R} &= \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} \end{aligned}$$

Se si considerano onde elettromagnetiche che si propagano in un mezzo trasparente, allora  $c_{\pm} = c/n_{\pm}$ , e si ottengono le famose formule per il coefficiente di riflessione e trasmissione della luce in corrispondenza ad un'interfaccia:

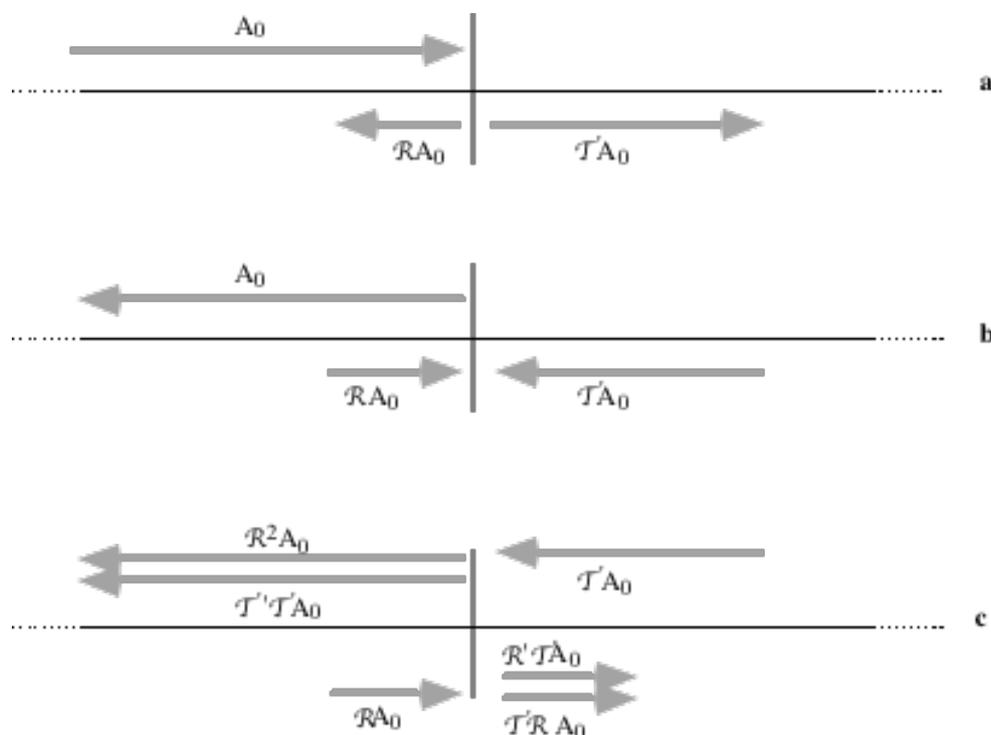
$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{2n_-}{n_- + n_+} \\ \mathcal{R} &= \frac{n_- - n_+}{n_- + n_+} \end{aligned}$$

Esercizio: si calcolino i coefficienti di riflessione e trasmissione per l'interfaccia aria-acqua (l'indice di rifrazione dell'acqua vale circa 1.33).

### **Relazioni di Stokes tra i coefficienti di riflessione e trasmissione**

È possibile ricavare delle relazioni tra coefficienti di riflessione e trasmissione che sono completamente indipendenti dalla descrizione dettagliata del processo fisico e sono legate solo alla possibilità di invertire le direzioni delle onde senza cambiare le loro caratteristiche fisiche e alla applicabilità del principio di sovrapposizione.

Si consideri la figura seguente:



La parte **a** illustra schematicamente la situazione fisica: un'onda di ampiezza  $A_0$  incide sulla superficie che separa due mezzi, in parte viene riflessa e in parte trasmessa. Ora immaginiamo di invertire la direzione in cui si muovono le onde: la situazione è quella schematizzata nella parte **b**. D'altra parte ora l'onda di ampiezza  $\mathcal{R}A_0$  in parte viene riflessa e in parte trasmessa, e lo stesso accade per l'onda di ampiezza  $\mathcal{T}'A_0$ . Tenendo conto del fatto che i coefficienti sono  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{T}$  per le onde che incidono da sinistra a destra e  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{T}'$  per le onde che incidono da destra a sinistra, e utilizzando il principio di sovrapposizione, si può ricostruire l'ampiezza dell'onda incidente, e si può annullare quella dell'onda non fisica (dovuta alla trasmissione dell'onda riflessa invertita e alla riflessione dell'onda trasmessa invertita, si veda la parte **c**)

$$\mathcal{R}^2 A_0 + \mathcal{T}'\mathcal{T} A_0 = A_0$$

$$\mathcal{R}'\mathcal{T} A_0 + \mathcal{T}\mathcal{R} A_0 = 0$$

da cui si ricavano le *relazioni di Stokes*:

$$\mathcal{T}'\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}^2$$

$$\mathcal{R}' = -\mathcal{R}$$