

Linee di Trasmissione

A. A. 2017-18

Edoardo Milotti

Dipartimento di Fisica, Università di Trieste, Trieste, Italy
e-mail: *milotti@units.it*

Contents

1	Linee di Trasmissione	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Linee di trasmissione ad elementi discreti: modi normali e relazione di dispersione	1
1.2.1	Analisi nel dominio della frequenza	2
1.2.2	Analisi nel dominio del tempo	5
1.3	Cavi coassiali	7
1.3.1	Altre linee di trasmissione	9
1.3.2	Esempi di linee di trasmissione	10
1.3.3	Connettori	11
1.4	Riflessione e trasmissione	13
1.4.1	Potenza assorbita	14
1.4.2	Collegamenti con la teoria ondulatoria	15
	Index	19

Chapter 1

Linee di Trasmissione

1.1 Introduzione

I segnali elettromagnetici che si utilizzano in elettronica si propagano lungo percorsi che vengono chiamati genericamente linee di trasmissione. Una linea di trasmissione può essere il doppino telefonico con cui si collega un telefono alla centrale, oppure il cavo coassiale che collega il televisore di casa all'antenna sul tetto, o ancora una fibra ottica che trasporta un segnale luminoso da un trasmettitore ad un ricevitore. Qui trattiamo la teoria elementare delle linee di trasmissione elettriche, i cui concetti si trasportano facilmente anche agli altri tipi di linee di trasmissione.

1.2 Linee di trasmissione ad elementi discreti: modi normali e relazione di dispersione

Le linee di trasmissione sono rappresentate da conduttori elettrici o fibre ottiche, e hanno quindi caratteristiche continue (ad esempio la capacità elettrica della linea deve essere distribuita su tutta la linea), ma per facilitare l'analisi supponiamo inizialmente di poter considerare delle sezioni discrete di linea con caratteristiche concentrate, come nella figura 1.1, dove viene rappresentata una rete semi-infinita. Iniziamo il nostro lavoro nel dominio della frequenza e lo proseguiremo poi nel dominio del tempo.

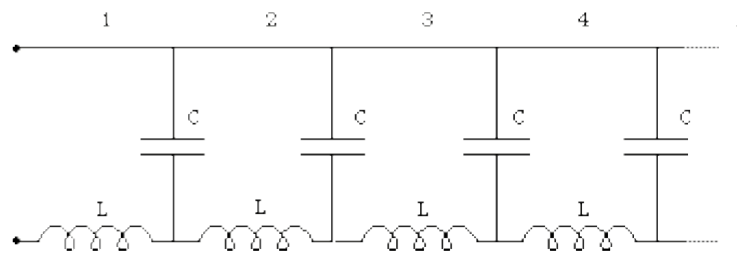


Figure 1.1: Linea di trasmissione discretizzata.

1.2.1 Analisi nel dominio della frequenza

Per cominciare generalizziamo ancora un po', e consideriamo il circuito (semiinfinito) in figura 1.2

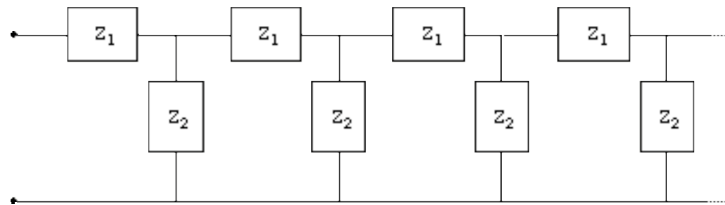


Figure 1.2: Rete semi-infinita di sezioni tutte uguali con impedenze concentrate.

Z_1 e Z_2 sono due impedenze, che nel caso della rete semiinfinita di figura 1.1 valgono $Z_1 = i\omega L$ e $Z_2 = 1/i\omega C$. Un generatore di tensione posto all'estremità sinistra "vede" un'impedenza equivalente Z_{eq} , e poiché la rete è semiinfinita, aggiungere o togliere una sezione non cambia nulla, perciò vale l'uguaglianza illustrata dalla figura 1.3:

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_{eq}}{Z_2 + Z_{eq}} \quad (1.1)$$

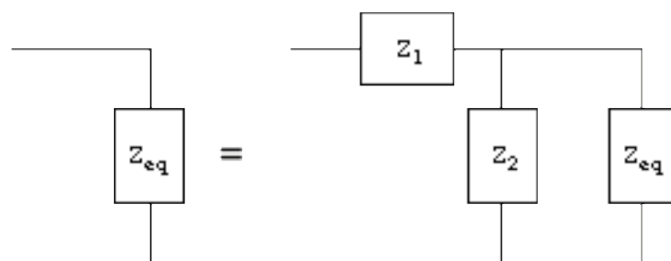


Figure 1.3: Poiché la rete è semi-infinita, aggiungere una sezione all’inizio non cambia l’impedenza totale della linea.

e quindi

$$Z_{eq}^2 - Z_1 Z_{eq} - Z_1 Z_2 = 0 \quad (1.2)$$

Quest’ultima è un’equazione quadratica le cui soluzioni sono

$$Z_{eq}^{(\pm)} = \frac{Z_1}{2} \pm \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2} \quad (1.3)$$

Si ottengono due valori per l’impedenza equivalente, ma solo uno di questi ha significato fisico, infatti se si fa tendere Z_2 a 0, allora il ramo in parallelo diventa un cortocircuito, e l’impedenza totale deve valere Z_1 . Ciò è possibile solo prendendo il segno +, quindi la soluzione è

$$Z_{eq} = \frac{Z_1}{2} + \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2} \quad (1.4)$$

Vediamo ora cosa succede alla tensione e alla corrente sezione per sezione. La figura 1.4 illustra i simboli utilizzati per indicare tensioni e correnti in ciascuna sezione.

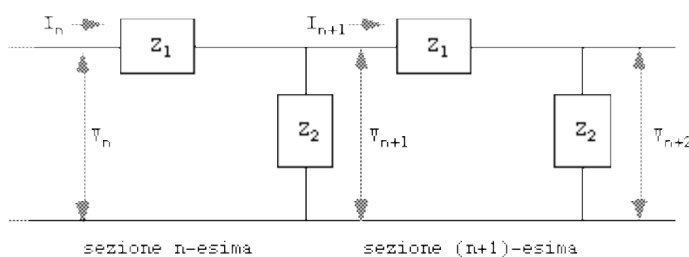


Figure 1.4: Tensioni e correnti all’interno della linea.

L'equazione di Kirchhoff per la maglia corrispondente alla $(n + 1)$ -esima sezione è

$$V_n = Z_1 I_n + V_{n+1}, \quad (1.5)$$

mentre l'equazione di Kirchhoff per le correnti è

$$I_n = \frac{V_{n+1}}{Z_2} + I_{n+1}, \quad (1.6)$$

e inoltre, per definizione di impedenza equivalente

$$V_n = Z_{\text{eq}} I_n. \quad (1.7)$$

Troviamo allora

$$V_{n+1} = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_{\text{eq}}}\right) V_n = \alpha V_n, \quad (1.8)$$

e infine

$$V_{n+1} = \alpha^n V_1, \quad (1.9)$$

dove

$$\alpha = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_{\text{eq}}}\right) = \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2} - Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2} + Z_1} \quad (1.10)$$

Se torniamo alla rete di induttanze e capacità mostrata all'inizio, otteniamo

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C} - i\omega L}{\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C} + i\omega L} \quad (1.11)$$

Ci sono due casi possibili: l'argomento $-\omega^2 L^2 + 4L/C$ è positivo o negativo e quindi la radice $\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C}$ è una quantità reale, oppure è puramente immaginaria. Nel primo caso $\omega < 2\sqrt{LC}$ e α è il rapporto di due numeri complessi coniugati, quindi ha modulo unitario, e possiamo scriverlo nella forma di uno sfasamento $\alpha = e^{i\varphi}$, così che $V_{n+1} = e^{in\varphi} V_1$. Questo significa che la tensione si mantiene costante in modulo in ciascuna sezione, e l'unico effetto è quello di introdurre uno sfasamento che dipende dal numero di sezione n . Se invece $\omega > 2\sqrt{LC}$ la radice è una quantità immaginaria, e possiamo semplificare l'espressione ottenendo una quantità puramente reale

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 - 4L/C} - \omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 - 4L/C} + \omega L} \leq 1 \quad (1.12)$$

perciò la tensione diminuisce gradualmente, sezione dopo sezione. La figura 1.5 mostra la funzione $|\alpha|^n$ dopo la prima, la seconda, la terza e la quarta sezione ($n = 1, 2, 3, 4$), in funzione di ω/ω_0 , dove $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (la frequenza di taglio della linea di trasmissione è $2\omega_0$, e quindi 2 nelle unità della figura).

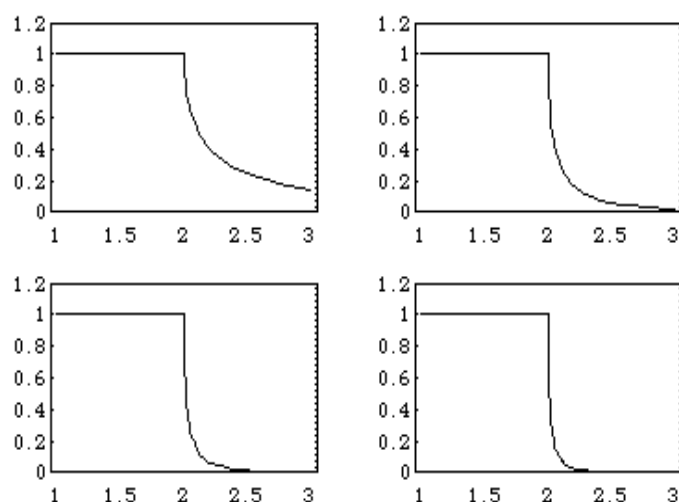


Figure 1.5: La funzione $|\alpha|^n$ dopo la prima, la seconda, la terza e la quarta sezione ($n = 1, 2, 3, 4$), in funzione di ω/ω_0 , dove $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (la frequenza di taglio della linea di trasmissione è $2\omega_0$, e quindi vale 2 nelle unità usate in figura).

Come si vede questa rete si comporta come un filtro di caratteristiche sempre migliori quanto più aumenta il numero degli stadi.

Domanda: il comportamento di questa rete semiinfinita è stato analizzato utilizzando il formalismo complesso e la legge di Ohm generalizzata. Visto che il circuito non ha dissipazione (non ci sono resistenze), come mai un termine forzante non produce asintoticamente una divergenza nei risultati?

1.2.2 Analisi nel dominio del tempo

Consideriamo ora le equazioni di Kirchhoff del circuito mostrato in figura 1.6:

$$\begin{cases} V_n(t) = L \frac{dI_n}{dt} + V_{n+1}(t) \\ I_n(t) = C \frac{dV_{n+1}}{dt} + I_{n+1}(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

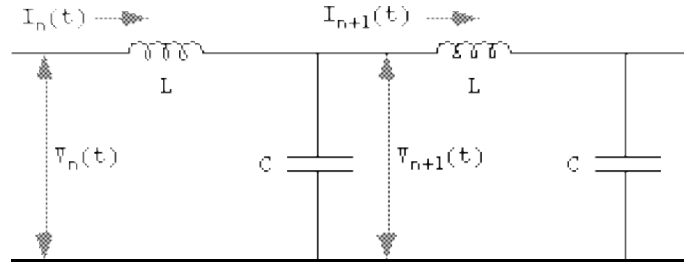


Figure 1.6: Notazione di tensioni e correnti per l'analisi nel dominio del tempo.

Derivando la seconda otteniamo

$$\frac{dI_n}{dt} = C \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2} + \frac{dI_{n+1}}{dt} \quad (1.14)$$

mentre dalla prima possiamo isolare la derivata della corrente

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{1}{L} (V_n(t) - V_{n+1}(t)) \quad (1.15)$$

e spostando gli indici di quest'ultima equazione troviamo anche

$$\frac{dI_{n+1}}{dt} = \frac{1}{L} (V_{n+1}(t) - V_{n+2}(t)) \quad (1.16)$$

Alla fine si ottiene, con opportuni spostamenti degli indici,

$$\frac{d^2V_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (V_{n-1}(t) - 2V_n(t) + V_{n+1}(t)) \quad (1.17)$$

Adesso andiamo al limite continuo, nel senso che prendiamo delle sezioni che sono spazialmente sempre più piccole, e assumiamo che l'induttanza e la capacità per sezione siano proporzionali alla lunghezza Δx della sezione, cioè $L = \mathcal{L}\Delta x$ e $C = \mathcal{C}\Delta x$, dove \mathcal{L} e \mathcal{C} sono densità di induttanza e capacità che non dipendono da Δx : più avanti dimostreremo in un caso semplice che è proprio così. Allora, riscrivendo l'ultima equazione del paragrafo precedente nella forma

$$\frac{d^2V_n}{dt^2} = \frac{\Delta x^2}{LC} \frac{(V_{n-1}(t) - 2V_n(t) + V_{n+1}(t))}{\Delta x^2} \quad (1.18)$$

osserviamo che andando al limite continuo¹, si ottiene l'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (1.19)$$

Come si vede la velocità di fase è $v = 1/\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}$ e l'impedenza caratteristica è

$$Z_{\text{eq}} = \frac{Z_1}{2} + \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}{2} = \frac{i\omega\mathcal{L}\Delta x}{2} + \frac{\sqrt{-\omega^2\mathcal{L}^2\Delta x^2 + 4\mathcal{L}/\mathcal{C}}}{2} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$$

Analisi della linea in presenza di dissipazione

Le linee di trasmissione reali hanno sempre un po' di dissipazione resistiva dovuta alla resistenza dei cavi conduttori (in serie con l'induttanza) e alla resistenza dell'isolante (in parallelo con la capacità). Trascuriamo la resistenza in parallelo con la capacità che ha normalmente un valore elevatissimo e quindi non comporta quasi dissipazione, e consideriamo solo la resistenza in serie con l'induttanza. Allora le equazioni che descrivono il circuito sono

$$\begin{cases} V_n(t) = RI_n + L \frac{dI_n}{dt} + V_{n+1}(t) \\ I_n(t) = C \frac{dV_{n+1}}{dt} + I_{n+1}(t) \end{cases} \quad (1.20)$$

da cui si ricavano le due equazioni

$$I_n(t) - I_{n+1}(t) = C \frac{dV_{n+1}}{dt}, \quad (1.21)$$

$$\frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} = C \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2}, \quad (1.22)$$

dalla seconda delle (1.20), e

$$V_n(t) - V_{n+1}(t) = R(I_n - I_{n+1}) + L \left(\frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} \right) + (V_{n+1}(t) - V_{n+2}(t)) \quad (1.23)$$

dalla prima delle (1.20). Quindi si trova

$$V_n(t) - V_{n+1}(t) = RC \frac{dV_{n+1}}{dt} + LC \frac{d^2V_{n+1}}{dt^2} + (V_{n+1}(t) - V_{n+2}(t)), \quad (1.24)$$

¹Questo si vede notando che per una funzione di x

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3),$$

quindi sommando le due espressioni con $\pm\Delta x$ e dividendo per Δx^2 , si trova

$$f''(x) = \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

e infine, passando al limite continuo con $\Delta x \rightarrow 0$ si ottiene

$$\Delta x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC \frac{\partial V}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (1.25)$$

o anche

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \mathcal{R}\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}\mathcal{C} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (1.26)$$

L'equazione (1.26) è l'equazione del telegrafista (telegrapher's equation).

1.3 Cavi coassiali

Prendiamo ora un importante caso pratico che si incontra molto frequentemente, quello delle linee di trasmissione realizzate con cavi coassiali. In questo caso è facile calcolare l'induttanza e la capacità distribuita e da queste tutte le proprietà della linea di trasmissione. Una linea di trasmissione coassiale è costituita – nella sua forma più semplice – da due cilindrici coassiali separati da una regione di spazio vuoto, come nella figura 1.7, in cui la linea di trasmissione è vista in sezione trasversale e longitudinale.

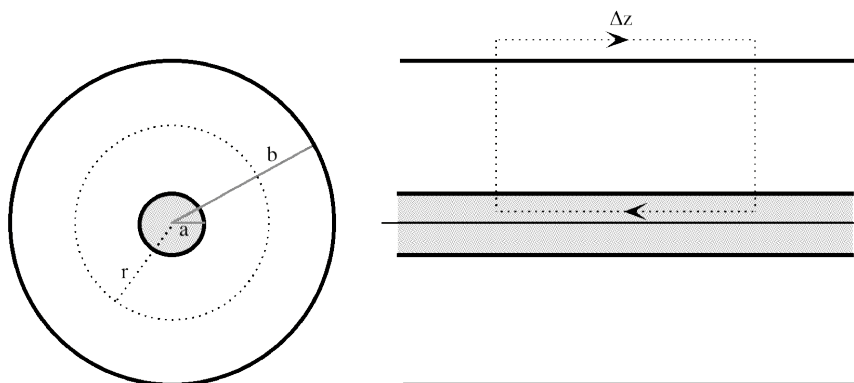


Figure 1.7: Linea di trasmissione coassiale rappresentato in sezione (a sinistra) e in sezione longitudinale (a destra). In questa figura e nel testo della sezione la coordinata longitudinale viene indicata – diversamente dal resto del testo – con la lettera z

La capacità di un tratto di linea di lunghezza Δz si trova dal teorema di Gauss: poiché il conduttore è globalmente neutro, il campo è nullo dentro il conduttore interno e fuori dal conduttore esterno; per simmetria, il campo elettrico è radiale; infine, se λ è la densità di carica lineare, allora il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso un cilindro che ha lo stesso asse del cavo, altezza Δz e raggio r è dato da $2\pi r \Delta z E(r)$. Quindi

$$2\pi r \Delta z E(r) = \frac{\lambda \Delta z}{\epsilon} = \frac{\lambda \Delta z}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.27)$$

e il campo elettrico è

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \quad (1.28)$$

Integrando quest'ultima espressione si trova che la differenza di potenziale elettrico tra i due conduttori è data (in valore assoluto) dall'espressione

$$\Delta V = \int_a^b E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{b}{a} = \frac{\Delta Q / \Delta z}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{b}{a} \quad (1.29)$$

dove $\Delta Q = \lambda \Delta z$ è la carica su ciascuna delle armature del condensatore cilindrico di lunghezza Δz , e perciò la capacità per unità di lunghezza è

$$C = \frac{1}{\Delta z} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln b/a} \quad (1.30)$$

Possiamo trovare in modo analogo l'induttanza per unità di lunghezza utilizzando la legge di induzione di Faraday: il campo magnetico dovuto ad una corrente I nella linea può essere diverso da zero solo tra i due conduttori e vale (in modulo)

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r} = \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r} \quad (1.31)$$

Perciò il flusso del campo magnetico attraverso la superficie tratteggiata nel lato destro della figura 1.7 vale

$$\Phi = \int_a^b B(r) \Delta z dr = \Delta z \frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\mu_r I \Delta z}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (1.32)$$

e per questo la forza elettromotrice indotta dalle variazioni della corrente vale

$$\text{f.e.m.} = \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\mu_0\mu_r \Delta z}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{dI}{dt} \quad (1.33)$$

Dall'ultima equazione si vede che l'induttanza associata al tratto di linea di trasmissione è uguale alla quantità in parentesi e quindi l'induttanza per unità di lunghezza è data da

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (1.34)$$

Da questi risultati troviamo la velocità di fase

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (1.35)$$

e l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione

$$Z_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2\pi} Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \quad (1.36)$$





dove

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

è l'impedenza caratteristica del vuoto, una quantità che si ritrova spesso in calcoli di questo tipo.

1.3.1 Altre linee di trasmissione

Oltre ai cavi coassiali ci sono molte altre linee di trasmissione elettriche con sezioni diverse. La tabella seguente è tratta da S. Ramo, J. R. Whinnery e T. Van Duzen *Fields and Waves in Communication Electronics* (Wiley, 1993) e riporta i risultati relativi ad alcune linee di trasmissione di uso comune

				
			$p = \frac{a}{d}$ $q = \frac{b}{D}$	Formulas for $a \ll b$
Capacitance C , farads/meter	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/a)}$	-----	$\frac{\epsilon b}{a}$
External inductance L , henrys/meter	$\frac{\mu}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(d/a)$	-----	$\mu \frac{a}{b}$
Conductance G , siemens/meter	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(r_2/r_1)} - \frac{2\pi\sigma\epsilon''}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/a)} - \frac{\pi\sigma\epsilon''}{\cosh^{-1}(d/a)}$	-----	$\frac{\sigma b}{a} - \frac{\sigma\epsilon'' b}{a}$
Resistance R , ohms/meter	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$	$\frac{2R_s}{\pi d} \left[\frac{a/d}{\sqrt{(a/d)^2 - 1}} \right]$	$\frac{2R_s}{\pi d} \left[1 + \frac{1 + 2p^2}{4p^2} (1 - 4q^2) \right] + \frac{R_s}{\pi D} q^2 \left[1 + q^2 - \frac{1 + 4p^2}{8p^2} \right]$	$\frac{2R_s}{b}$
Internal inductance L_i , henrys/meter (for high frequency)	$\frac{R}{\omega}$			
Characteristic impedance at high frequency Z_0 , ohms	$\frac{\pi}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$	$\frac{\pi}{\pi} \cosh^{-1}(d/a)$	$\frac{\pi}{\pi} \left\{ \ln \left[2p \frac{(1 - q^2)}{(1 + q^2)} \right] - \frac{1 + 4p^2}{16p^4} (1 - 4q^2) \right\}$	$\frac{a}{b}$
Z_0 for air dielectric	$60 \ln(r_2/r_1)$	$120 \cosh^{-1}(d/a) \approx 120 \ln(2d/a)$ if $a/d \gg 1$	$120 \left\{ \ln \left[2p \frac{(1 - q^2)}{(1 + q^2)} \right] - \frac{1 + 4p^2}{16p^4} (1 - 4q^2) \right\}$	$120 \frac{a}{b}$
Attenuation due to conductor α_c	$\frac{R}{2Z_0}$			
Attenuation due to dielectric α_d	$\frac{GZ_0}{2} = \frac{\sigma}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)$			
Total attenuation dB/meter	$8.686(\alpha_c + \alpha_d)$			
Phase constant for low-loss lines β	$\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$			

All units above are mks.
 $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ = permittivity, farads/meter
 μ = permeability, henrys/meter
 $\pi = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ohms
 ϵ'' = loss factor of dielectric = ϵ''/ϵ'
 R_s = skin effect surface resistivity of conductor, ohms
 λ = wavelength in dielectric

Formulas for shielded pair obtained from Green, Leibe, and Curtis, *Bell System Tech. Jour.*, 15, pp. 248-284 (April 1936).

Figure 1.8: .

Dal punto di vista numerico calcolare le caratteristiche di una linea di trasmissione con profilo arbitrario è relativamente semplice ed esiste un progetto di SourceForge (distribuito gratuitamente con licenza GNU): ATLC – Arbitrary Transmission Line Calculator (documentazione, download e altro all'indirizzo <http://atlc.sourceforge.net>)

1.3.2 Esempi di linee di trasmissione

Il mercato delle linee di trasmissione offre moltissime alternative. Un tipo di cavo coassiale molto comune è il cavo RG58/U: in questo caso la permeabilità dielettrica relativa del dielettrico è $\epsilon_r \approx 2.26$ e i raggi sono $a = 0.406$ mm e $b = 1.48$ mm (Esercizio: si utilizzino questi valori per trovare l'impedenza caratteristica e la velocità di fase in questo tipo di cavo coassiale).



Figure 1.9: Un cavo coassiale RG58/CU, con conduttori in rame stagnato, isolato con polietilene (PET) e con guaina esterna in polivinilcloruro (PVC) nero.

La figura 1.10 mostra altri tipi di cavi coassiali (immagine tratta dal catalogo RS Components): i diversi cavi hanno differenti capacità distribuite e impedenze caratteristiche.

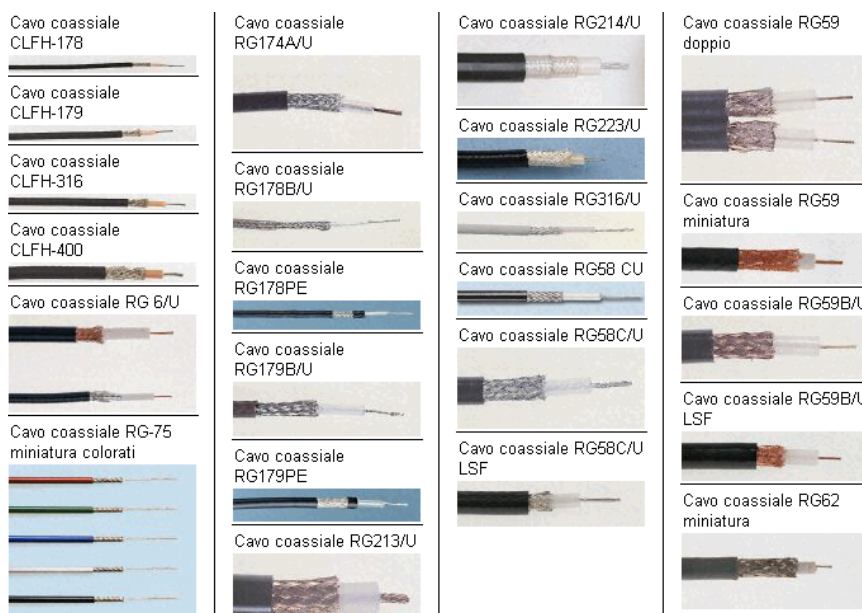


Figure 1.10: Diversi tipi di cavi coassiali (immagine tratta dal catalogo RS Components).

1.3.3 Connettori

Le linee di trasmissione elettrica vanno utilizzate con connettori adeguati, tali da mantenere l'uniformità della linea di trasmissione (quindi, idealmente, con gli stessi valori di induttanza e capacità per unità di lunghezza). Le figure che seguono mostrano alcuni connettori comunemente usate ed alcune delle loro caratteristiche.

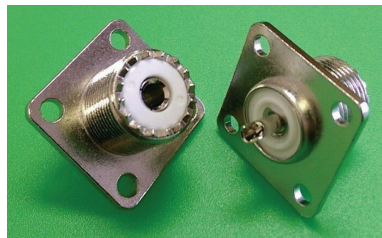


Figure 1.11: Connettori UHF di vecchio tipo.



Figure 1.12: Un connettore BNC, frequentemente usato nell'esperimentazione in fisica.

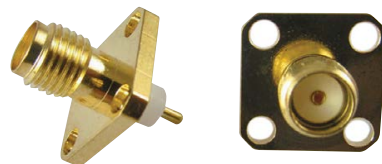


Figure 1.13: Il connettore SMA è frequentemente usato per applicazioni in RF e microonde.



Figure 1.14: Anche i connettori MCX hanno frequenti applicazioni in RF.

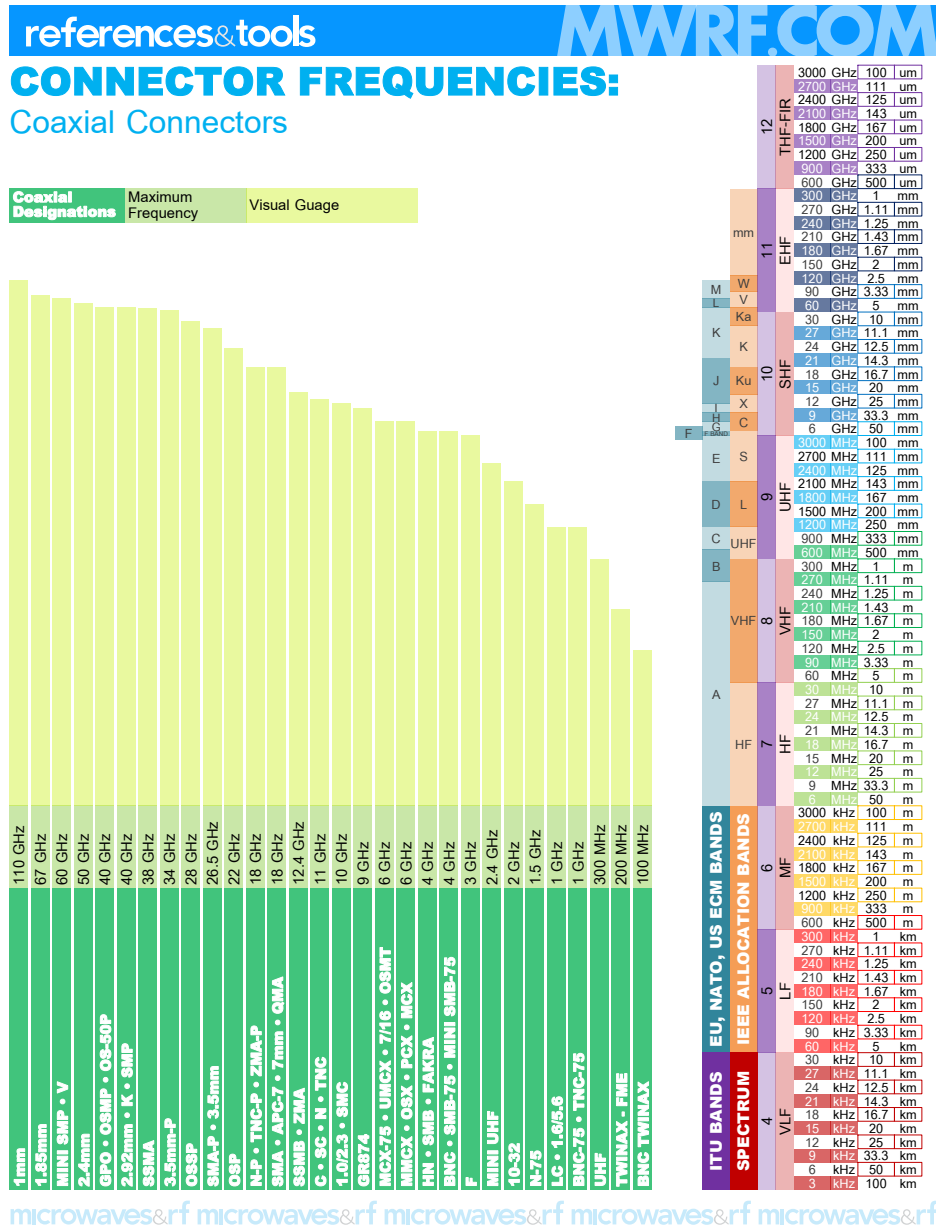


Figure 1.15: Figura riassuntiva delle caratteristiche di utilizzo dei connettori più comuni.

1.4 Riflessione e trasmissione

Se la linea di trasmissione non è uniforme e ci sono delle interfacce tra spezzoni di linea con caratteristiche diverse –per esempio proprio a causa della presenza

di connettori – allora si osserva che quando i segnali raggiungono le interfacce vengono in parte trasmessi ed in parte riflessi. Ci si può quindi chiedere quanta parte del segnale venga riflessa e quanta venga trasmessa, ed in questa sezione calcoliamo appunto i coefficienti di riflessione e di trasmissione.

Abbiamo visto sopra che i segnali lungo una linea di trasmissione possono venire descritti da un'equazione d'onda unidimensionale, e quindi la tensione lungo la linea è data da funzioni del tipo $V_{\pm}(x, t) = V(x \mp vt)$, dove V_+ è un segnale che si muove in direzione x crescente, mentre V_- è un segnale che si muove in direzione di x decrescente. Supponiamo ora di lavorare con il formalismo delle tensioni alternate e di terminare la linea con un carico Z_L : in corrispondenza al carico possiamo scrivere che la somma delle tensioni dei segnali che si muovono in direzione positiva e in direzione negativa deve dare la tensione ai capi del carico. Inoltre la corrente totale dovuta alla somma della corrente in direzione positiva più la corrente in direzione negativa deve dare la corrente che fluisce nel carico. In simboli possiamo scrivere:

$$V_+ + V_- = V_L \quad (1.37)$$

$$I_+ + I_- = \frac{V_+}{Z_{eq}} - \frac{V_-}{Z_{eq}} = \frac{V_L}{Z_L} \quad (1.38)$$

dove il segno meno nella seconda equazione corrisponde alla direzione della corrente che fluisce in direzione negativa. Ora possiamo definire il coefficiente di riflessione come la frazione di ampiezza del segnale che torna indietro, e il coefficiente di trasmissione come la frazione di ampiezza del segnale che riesce a passare nel carico, vale a dire $\mathcal{R} = V_-/V_+$, $\mathcal{T} = V_L/V_+$, e quindi, utilizzando le relazioni trovate sopra otteniamo

$$\mathcal{R} = \frac{Z_L - Z_{eq}}{Z_L + Z_{eq}} \quad (1.39)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{eq}} \quad (1.40)$$

Consideriamo ora due casi particolari: quello della linea terminata con un corto circuito e quello della linea terminata con un circuito aperto (casi in cui solo il coefficiente di riflessione ha significato fisico). Se la linea viene cortocircuitata, allora $Z_L = 0$, e quindi $\mathcal{R} = -1$, mentre se la linea è terminata con un circuito aperto, allora $Z_L = \infty$ e quindi $\mathcal{R} = 1$: questo vuol dire che quando c'è riflessione da un corto circuito il segnale viene invertito, mentre la riflessione da un circuito aperto mantiene il segno del segnale.

1.4.1 Potenza assorbita

La corrente che fluisce in direzione positiva è V_+/Z_{eq} , mentre la corrente che fluisce in direzione negativa è V_-/Z_{eq} ; poiché l'impedenza caratteristica è una

quantità reale, la potenza media dell'onda che viaggia in direzione positiva è $|V_+|^2/2Z_{\text{eq}}$, mentre la potenza media dell'onda che viaggia in direzione negativa è $|V_-|^2/2Z_{\text{eq}}$, quindi la potenza media assorbita dal carico è

$$|V_+|^2/2Z_{\text{eq}} - |V_-|^2/2Z_{\text{eq}} \quad (1.41)$$

La frazione di potenza assorbita dal carico rispetto la potenza incidente è dunque

$$f = \frac{|V_+|^2/2Z_{\text{eq}} - |V_-|^2/2Z_{\text{eq}}}{|V_+|^2/2Z_{\text{eq}}} = 1 - \frac{|V_-|^2}{|V_+|^2} = 1 - |\mathcal{R}|^2 \quad (1.42)$$

1.4.2 Collegamenti con la teoria ondulatoria

Le idee introdotte nelle sezioni precedenti sono state sviluppate nel contesto limitato delle linee di trasmissione, ma hanno una valenza molto più generale: le linee di trasmissione che abbiamo analizzato sono infatti una versione classica unidimensionale di una teoria di campo. Vale dunque la pena di analizzare i coefficienti di riflessione e trasmissione in questo contesto più generale.

Supponiamo che ci sia un'onda che si propaga verso l'interfaccia che divide i due mezzi come mostrato in figura 1.16, e supponiamo che essa abbia un'ampiezza massima uguale a 1, così che l'onda trasmessa ha ampiezza \mathcal{T} e l'onda riflessa ha ampiezza \mathcal{R} .

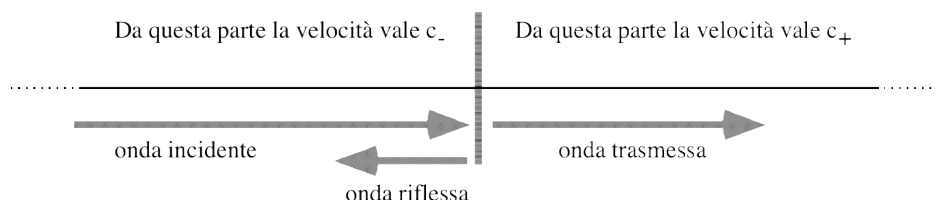


Figure 1.16: .

Se l'espressione analitica dell'onda incidente è $\Phi(t - x/c_-)$, allora l'onda riflessa è $\mathcal{R}\Phi(t + x/c_-)$, e l'onda trasmessa è $\mathcal{T}\Phi(t - x/c_+)$, perciò – dal principio di sovrapposizione – la soluzione dell'equazione d'onda nella regione a sinistra dell'interfaccia è

$$\Phi(t - x/c_-) + \mathcal{R}\Phi(t + x/c_-)$$

mentre la soluzione nella regione a destra dell'interfaccia è semplicemente

$$\mathcal{T}\Phi(t - x/c_+)$$

Considerazioni fisiche indicano che all'interfaccia tra i due mezzi (che poniamo in posizione $x = 0$) sia la funzione che la sua derivata debbano essere funzioni

continue (esercizio: si considerino diversi tipi di onde e si esplicitino le condizioni di continuità all'interfaccia), quindi, in $x = 0$

$$\Phi(t) + \mathcal{R}\Phi(t) = \mathcal{T}\Phi(t) \quad (1.43)$$

$$-\frac{1}{c_-}\Phi'(t) + \frac{1}{c_-}\mathcal{R}\Phi'(t) = \frac{1}{c_+}\mathcal{T}\Phi'(t) \quad (1.44)$$

e da queste si ottiene, assumendo che Φ e la sua derivata non siano identicamente nulle,

$$\mathcal{R} = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} \quad (1.45)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2c_+}{c_+ + c_-} \quad (1.46)$$

Se si considerano onde elettromagnetiche che si propagano in un mezzo trasparente, allora $c_{\pm}c/n_{\pm}$, e si ottengono le famose formule per il coefficiente di riflessione e trasmissione della luce in corrispondenza ad un'interfaccia:

$$\mathcal{R} = \frac{n_- - n_+}{n_- + n_+} \quad (1.47)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2n_-}{n_- + n_+} \quad (1.48)$$

Esercizio: si calcolino i coefficienti di riflessione e trasmissione per l'interfaccia aria-acqua (l'indice di rifrazione dell'acqua vale circa 1.33).

Relazioni di Stokes tra i coefficienti di riflessione e trasmissione

È possibile ricavare delle relazioni tra coefficienti di riflessione e trasmissione che sono completamente indipendenti dalla descrizione dettagliata del processo fisico e sono legate solo alla possibilità di invertire le direzioni delle onde senza cambiare le loro caratteristiche fisiche e alla applicabilità del principio di sovrapposizione. Si consideri ora la figura 1.17: la parte **a** illustra schematicamente la situazione fisica, un'onda di ampiezza A_0 incide sulla superficie che separa due mezzi, in parte viene riflessa e in parte trasmessa. Ora immaginiamo di invertire la direzione in cui si muovono le onde, la situazione è quella schematizzata nella parte **b**: in questo caso l'onda di ampiezza $\mathcal{R}A_0$ in parte viene riflessa e in parte trasmessa, e lo stesso accade per l'onda di ampiezza $\mathcal{T}A_0$. Tenendo conto del fatto che i coefficienti sono \mathcal{R} e \mathcal{T} per le onde che incidono da sinistra a destra e \mathcal{R}' e \mathcal{T}' per le onde che incidono da destra a sinistra, e utilizzando il principio di sovrapposizione, si può ricostruire l'ampiezza dell'onda incidente e annullare quella dell'onda non fisica (dovuta alla trasmissione dell'onda riflessa invertita e

alla riflessione dell'onda trasmessa invertita, si veda la parte c)

$$\mathcal{R}^2 A_0 + \mathcal{T}\mathcal{T}' A_0 = A_0 \quad (1.49)$$

$$\mathcal{T}\mathcal{R} A_0 + \mathcal{R}'\mathcal{T} A_0 = 0 \quad (1.50)$$

da cui si ricavano le *relazioni di Stokes*:

$$\mathcal{R}^2 + \mathcal{T}\mathcal{T}' = 1 \quad (1.51)$$

$$\mathcal{R} = -\mathcal{R}' \quad (1.52)$$

Si noti che l'assunzione di invarianza per inversione temporale vale solo se non c'è assorbimento.

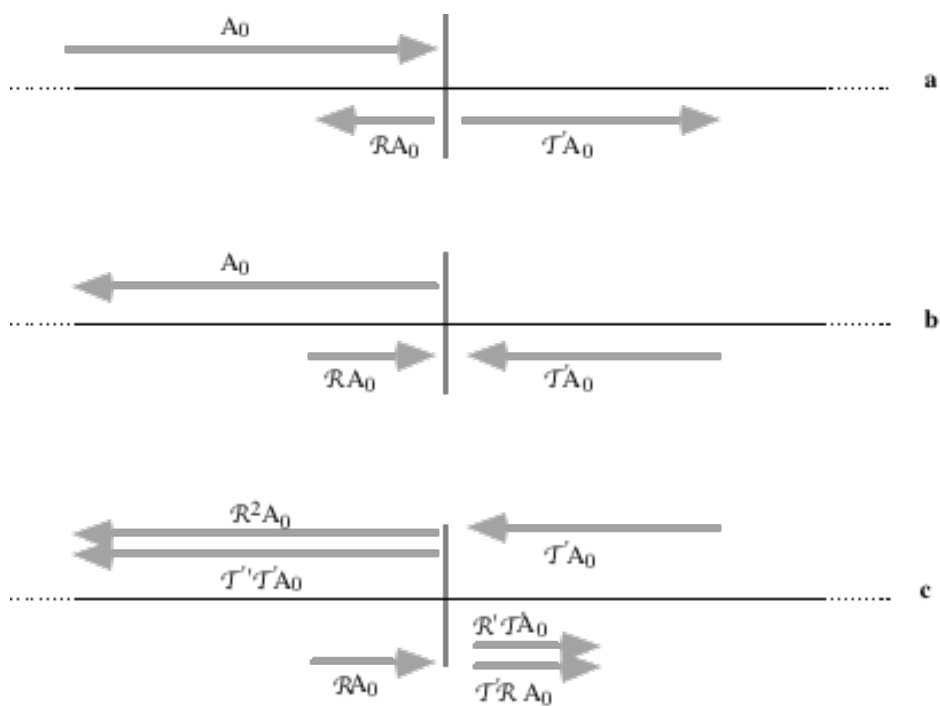


Figure 1.17: Rappresentazione grafica utilizzata per dimostrare le relazioni di Stokes.

