

## Lo spettro dell'idrogeno atomico e il modello di Bohr degli atomi idrogenoidi

Questa nota riassume brevemente la storia della scoperta della serie di Balmer e del modello di Bohr dell'atomo di idrogeno.

### 1. Gli spettri atomici

Nello spettro del sole si osservano un gran numero di righe scure, note con il nome di righe di assorbimento: sono come le impronte digitali delle specie atomiche che si trovano nel sole. In effetti, prendendo un gas ed eccitandolo per mezzo di una scarica elettrica, viene emessa luce, e si trova che diversi elementi chimici emettono luce che ha righe spettrali differenti, ad esempio l'azoto ha il seguente spettro di emissione



mentre l'ossigeno ha uno spettro differente



Si trova quando lo stesso gas viene interposto tra la sorgente di luce bianca ed uno spettroscopio, si vedono righe di assorbimento che corrispondono alle righe di emissione: si tratta quindi dello stesso fenomeno.

Gli spettri mostrati sono notevolmente diversi e hanno righe di emissione sparse senza un apparente ordine: è possibile capire le regole di emissione e assorbimento della luce da parte degli atomi?

### 2. La serie di Balmer delle righe spettrali dell'idrogeno atomico

Johann Jakob Balmer era un matematico svizzero (1825-1898), che diede un singolare contributo alla fisica

All'età di sessant'anni, Balmer trovò una singolare formula per la lunghezza d'onda della luce emessa dall'idrogeno atomico

$$\lambda = \frac{h m^2}{m^2 - n^2}$$

per  $n = 2$ ,  $h = 3.6456 \times 10^{-7}$  m,  $m = 3, 4, 5, 6, \dots$  e chiamò  $h$  il "numero fondamentale dell'idrogeno". La formula mostrò di avere potere predittivo, quando venne identificata una riga di assorbimento dell'idrogeno non nota in precedenza.



Johann Jakob Balmer

Si scoprì poi che la formula di Balmer è un caso particolare di una formula più generale scoperta da Johannes Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

si ottiene la serie di Balmer prendendo  $n_1 = 2$ . Con altri valori di  $n_1$  si trovano le lunghezze d'onda di altre serie di righe spettrali dell'atomo di idrogeno.



Lo spettro qui sopra mostra le quattro righe di emissione visibili nella serie di Balmer dell'idrogeno atomico

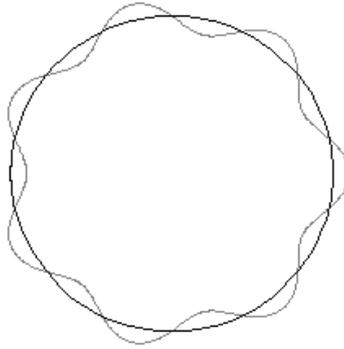
### 3. Il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno

Bohr ha costruito il suo modello dell'atomo di idrogeno nel 1913, in competizione con altri fisici che stavano cercando di svelare il mistero della stabilità delle orbite elettroniche. Secondo l'elettromagnetismo classico, gli elettroni in orbita intorno al nucleo atomico dovrebbero irraggiare – e quindi perdere energia – perché si muovono con moto accelerato. Alla fine gli elettroni dovrebbero precipitare sul nucleo, e per questo Thomson aveva elaborato negli anni precedenti un modello atomico in cui gli elettroni erano distribuiti uniformemente sulla superficie di un nucleo atomico duro, sferico. Gli esperimenti di Rutherford avevano però dimostrato che ciò non era possibile, che l'atomo doveva essere costituito da un piccolo nocciolo positivo – il nucleo – circondato da elettroni su orbite relativamente lontane. Niels Bohr è stato il primo a capire come un'idea della nuova meccanica quantistica poteva essere utilizzata per risolvere il problema. Nel 1913 la meccanica quantistica vera e propria non era ancora nata, c'erano solo delle idee ancora vaghe che dovevano essere sistemate in un contesto coerente. Nel 1900 Max Planck aveva pubblicato il suo importante articolo sulla radiazione di corpo nero, in cui aveva introdotto una forma di quantizzazione della frequenza della luce emessa da un corpo nero (questo significa che non sono ammesse tutte le frequenze per la luce ma solo multipli interi di una frequenza fondamentale). Nel 1905 Albert Einstein aveva dimostrato che le misure fatte sull'effetto fotoelettrico (l'emissione di elettroni da parte di una superficie metallica quando viene colpita dalla luce) potevano essere spiegate assumendo che la luce fosse costituita da *quanti* (da fotoni) e che ciascuno di essi avesse un'energia proporzionale alla frequenza  $\nu$  della luce  $E_\gamma = h\nu$ , dove  $h$  è proprio la costante introdotta da Planck nel 1900. Negli stessi anni de Broglie aveva anche fatto vedere che gli elettroni possono essere descritti in un certo senso come "onde" che possiedono una lunghezza d'onda inversamente proporzionale alla loro quantità di moto.

L'ipotesi di quantizzazione che sta alla base del modello è che un'orbita elettronica attorno al nucleo atomico debba essere necessariamente lunga un numero intero di lunghezze d'onda elettroniche, e cioè

$$2\pi r = n\lambda$$

Un esempio è mostrato in figura



Se ora ci ricordiamo della relazione di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

e introduciamo la definizione  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , otteniamo una semplice espressione per il modulo del momento angolare

$$mvr = n\hbar$$

Possiamo interpretare quest'ultima relazione come una *quantizzazione del momento angolare*, che assume solo valori definiti.

Dalla quantizzazione del momento angolare si trova la velocità in funzione di  $r$  ed  $n$ :

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

Uguagliando la forza di attrazione elettrostatica tra nucleo (nucleo con  $Z$  protoni, carica nucleare uguale a  $Zq_e$ ) ed elettrone (carica  $-q_e$ ), e la forza centripeta, si ottiene un'altra equazione, che permette di eliminare  $v$  e risolvere per  $r$ :

$$\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

si trova quindi

$$\frac{1}{r_n} = \frac{Zq_e^2 m}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}; \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Zq_e^2 m} n^2$$

dove  $r_n$  indica il raggio dell' $n$ -esima orbita. Si noti che  $r_n$  è proporzionale al quadrato di  $n$ .

Da questa soluzione si trova anche la velocità associata all' $n$ -esima orbita

$$v_n = \frac{n\hbar}{m r_n} = \frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{n}$$

Prendiamo ora l'espressione dell'energia totale associata all' $n$ -esima orbita, che è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (elettrostatica):

$$E_n = U_n + T_n = -\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} + \frac{1}{2}mv_n^2;$$

allora, sostituendo i valori di raggio e velocità trovati sopra, otteniamo

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} + \frac{1}{2}mv_n^2 = -m\left(\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2} = +\frac{m}{2}\left(\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{Z^2 q_e^4 m}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} = -\frac{q_e^4 m}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -R_\infty \cdot \frac{Z^2}{n^2} \end{aligned}$$

dove  $R_\infty = \frac{q_e^4 m}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 1 \text{ Rydberg} \approx 13.605 \text{ eV}$ .

Come si vede sono ammissibili solo certi valori dell'energia, e l'intero  $n$  è detto *numero quantico principale* dell'atomo di idrogeno; inoltre il raggio

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{q_e^2 m} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

è il *raggio di Bohr* dell'atomo di idrogeno. Si noti che il raggio che corrisponde ad un certo  $n$  è dato da

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Zq_e^2 m} = \frac{n^2 r_B}{Z}$$

e quindi il raggio dell'orbita dell'elettrone cresce velocemente al crescere di  $n$ . In particolare per valori di  $n$  vicini a 100, il raggio dell'orbita elettronica è prossimo

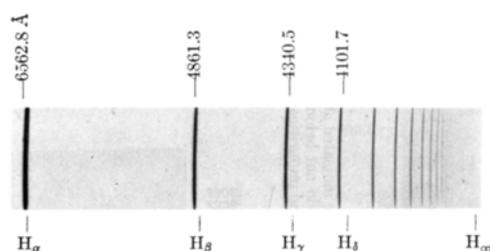
a 1  $\mu\text{m}$ , ed ha quindi delle dimensioni decisamente "grandi" su scala atomica: atomi di idrogeno con  $n$  così elevati sono stati prodotti in laboratorio, e sono detti *atomi di Rydberg*.

Quando un elettrone si sposta da un'orbita più alta ad un'orbita più bassa perde energia: questa energia può venire emessa sotto forma di un quanto di luce, con un'energia data dalla relazione di Einstein. Analogamente un elettrone può assorbire un fotone e passare ad un'orbita più alta. Ora si noti che

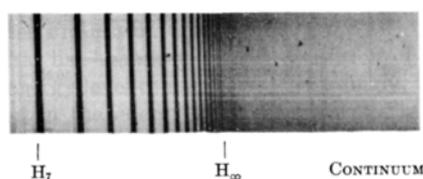
$$\Delta E_{n_1, n_2} = R_\infty \cdot \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

per una transizione tra il livello  $n_1$  e il livello  $n_2$ . Le transizioni che ci interessano avvengono con assorbimento o emissione di luce, cioè di fotoni di energia  $\Delta E_{n_1, n_2} = h\nu$ .

La figura seguente è una fotografia tratta dal libro di G. Herzberg: "Atomic spectra and atomic structure" (Dover, New York 1945) e mostra una fotografia dello spettro di emissione dell'idrogeno atomico nel visibile e nel vicino ultravioletto



Anche la figura seguente è tratta dal libro di G. Herzberg e mostra i membri della *serie di Balmer* (cioè le transizioni da  $n_1 > 2$  a  $n_2 = 2$ ) dalla settima linea al continuo.  $H_\infty$  è la posizione teorica del *limite della serie* (cioè la transizione da  $n_1 = \infty$  a  $n_2 = 2$ )



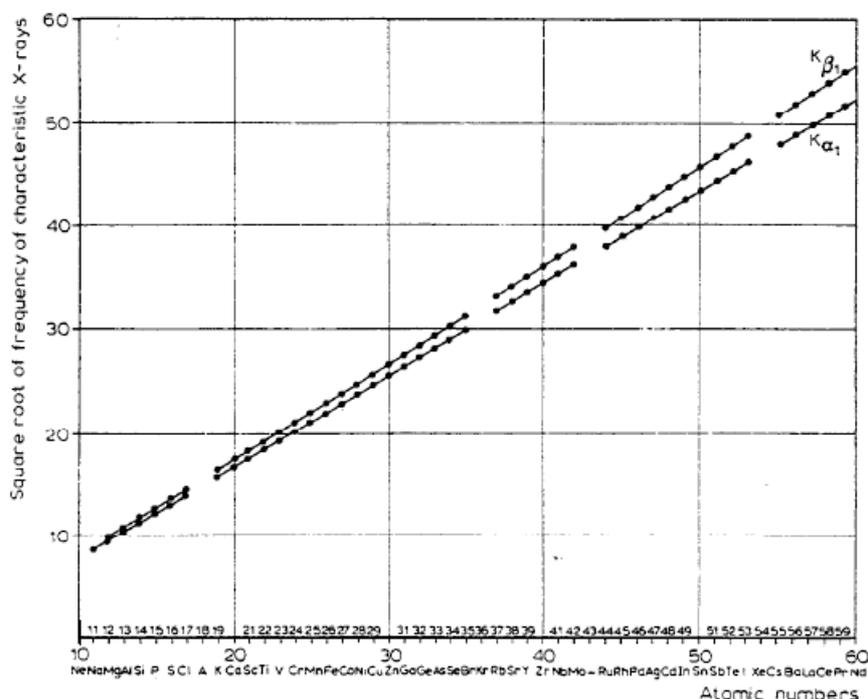
Si noti ora che se si eccita fortemente un atomo, si può estrarre un elettrone dell'orbita più interna, e uno degli elettroni dell'orbita immediatamente più alta può riempire il vuoto emettendo un fotone la cui energia è

$$h\nu = E_1 - E_2 = R_\infty \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) Z^2$$

vale a dire

$$\sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{3R_\infty}{4h}} \cdot Z$$

(la radice quadrata della frequenza della luce emessa è proporzionale a  $Z$ ). Questa relazione è stata trovata per la prima volta sperimentalmente da H. G. J. Moseley nel 1913, e per questo si chiama *legge di Moseley*. La figura seguente mostra la radice quadrata della frequenza della radiazione emessa in funzione di  $Z$ , e si vede che la legge di Moseley è verificata molto bene (sono mostrate due diverse classi di transizioni atomiche, per entrambe la legge funziona molto bene, proprio come previsto dal modello di Bohr).



Il modello di Bohr è solo un modello classico con una quantizzazione del momento angolare orbitale introdotta in modo artificioso, ma funziona straordinariamente bene. La soluzione quantistica del problema dell'atomo di idrogeno che si ottiene dalla equazione di Schrödinger mostra che i valori che

abbiamo trovato con tanta facilità sono effettivamente – stupefacentemente – corretti, e che rappresentano dei valori medi.

Il modello di Bohr ha avuto un'enorme influenza nei primi anni dello sviluppo della meccanica quantistica, e Bohr ha ricevuto il premio Nobel per questo lavoro nel 1922 (qui sotto è riportata l'introduzione della Nobel Lecture di Bohr, la figura che illustra la validità della legge di Moseley è tratta anch'essa dal testo di Bohr)

NIELS BOHR

## The structure of the atom

*Nobel Lecture, December 11, 1922*

Ladies and Gentlemen. Today, as a consequence of the great honour the Swedish Academy of Sciences has done me in awarding me this year's Nobel Prize for Physics for my work on the structure of the atom, it is my duty to give an account of the results of this work and I think that I shall be acting in accordance with the traditions of the Nobel Foundation if I give this report in the form of a survey of the development which has taken place in the last few years within the field of physics to which this work belongs.

**Nota bibliografica:** la storia delle origini della meccanica quantistica e del suo velocissimo sviluppo negli anni tra il 1920 e il 1940 è narrata con grande efficacia nel libro di Gino Segrè "Faust a Copenhagen" (Il Saggiatore, 2009). La lettura di questo libro è consigliata a tutti gli studenti che vogliono farsi un'idea di questo periodo entusiasmante della fisica e che vogliono conoscere le personalità giovani, creative ed indipendenti dei grandi fisici che hanno scoperto i principi fondamentali della meccanica quantistica.