

6. Lo spettro di corpo nero.

Queste note contengono un'introduzione alla fisica del corpo nero, vale a dire alla fisica del trasferimento radiativo di calore.



Il flusso lavico che scende dal cratere del vulcano Stromboli verso il mare (6 marzo 2007, foto di M. Fulle). L'emissione luminosa della lava approssima molto bene quella di un corpo nero.

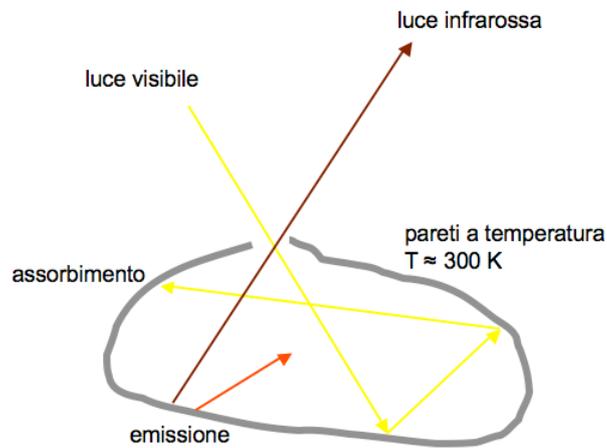


Anche il ferro rovente emette come un corpo nero. I fabbri esperti sanno stimare ad occhio la temperatura del ferro dal colore e dalla luminosità: questo è possibile perché la curva di emissione del corpo nero è determinata da un solo parametro, la temperatura (foto dal sito http://www.powning.com/jake/home/j_homepg.shtml).

Cos'è un corpo nero? Il corpo nero è soltanto un oggetto ideale, e lo si chiama così perché assorbe molto bene tutta la radiazione che ci cade sopra. Un'ottima approssimazione di corpo nero è un contenitore in cui sia stato fatto un piccolo foro: a temperatura ambiente il foro appare assolutamente nero, ed il motivo è che la radiazione luminosa che entra nel contenitore viene

diffusa molte volte al suo interno, ed è molto più probabile che alla fine venga assorbita piuttosto che riesca ad uscire dallo stesso foro da cui è entrata.

Corpo nero a temperatura ambiente



In questo modo la radiazione che entra nella cavità scalda le pareti, che riemettono radiazione infrarossa. Quando viene raggiunto l'equilibrio termodinamico l'energia elettromagnetica che entra nella cavità è uguale a quella irradiata dal foro, ma il tipo di radiazione emessa dipende dalla temperatura della cavità. Da questo punto di vista si capisce allora che un corpo nero non è veramente nero: un oggetto come quello descritto sopra ci appare nero a temperatura ambiente perché assorbe radiazione visibile, la radiazione visibile viene convertita in radiazione nel dominio delle microonde o nell'infrarosso lontano in seguito all'assorbimento e riemissione da parte delle pareti (che nel nostro caso sono a temperatura ambiente), e noi non siamo in grado di vedere la radiazione che esce dal foro. Se le pareti del corpo nero fossero a temperatura elevata, diciamo intorno a $1000\text{ }^\circ\text{C}$, allora il foro riemetterebbe radiazione visibile, e il corpo non sarebbe affatto nero.

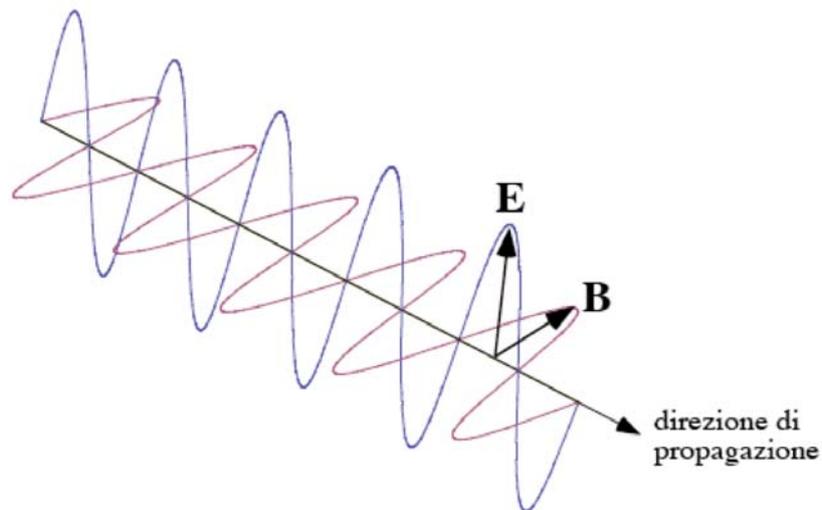


L'emissione infrarossa degli oggetti a temperatura ambiente può venire visualizzata per mezzo di telecamere sensibili all'infrarosso. Le immagini risultanti (termografie) sono spesso interessanti: in questo caso si vede che il sacco nero è in realtà trasparente all'infrarosso, mentre gli occhiali che sono trasparenti per la luce visibile, sono opachi nell'infrarosso (dal sito http://coolcosmos.ipac.caltech.edu/cosmic_kids/learn_ir/index.html)

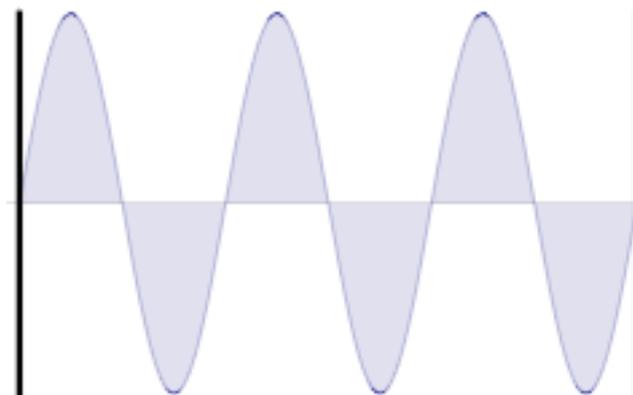
A questo punto siamo arrivati all'idea fondamentale: un corpo nero è oggetto in cui la materia che assorbe ed emette la radiazione è in equilibrio termico con la radiazione stessa. Se una parte della radiazione può sfuggire dal corpo nero, allora l'equilibrio si mantiene solo se viene fornita tanta energia quanta ne sfugge per irraggiamento.

Cerchiamo ora di capire come funziona questo equilibrio termico studiando una cavità particolarmente semplice, una cavità unidimensionale con delle pareti metalliche, che rappresenta ovviamente un'astrazione, ma che ci servirà per cominciare.

Ricordiamo anzitutto che le onde elettromagnetiche sono onde trasversali: l'oscillazione del campo elettrico (e magnetico) dell'onda è perpendicolare alla direzione di propagazione



La cavità seleziona le onde elettromagnetiche: all'equilibrio, nella cavità non ci possono essere onde elettromagnetiche arbitrarie, ma solo quelle che hanno campo elettrico nullo sulle pareti della cavità (se supponiamo che le pareti siano dei conduttori perfetti, allora il campo elettrico tangenziale deve essere nullo). L'ampiezza del campo elettrico dell'onda contenuta tra due pareti potrebbe essere per esempio come nella figura seguente.



Ciò significa che la cavità può contenere solo un numero intero di mezze lunghezze d'onda, così che se L è la lunghezza della cavità, allora il campo stazionario contenuto nella cavità deve avere una lunghezza d'onda λ tale che $L = n\lambda / 2$ dove n è un intero, e quindi le frequenze permesse del campo elettrico sono date da

$$\nu = n \frac{c}{2L} = n\nu_0$$

e analogamente

$$n = \frac{2L}{c} \nu$$

Per il teorema di equipartizione dell'energia, ciascun termine quadratico della funzione energia del sistema fisico dà un contributo $kT/2$ all'energia media, e quindi, ricordando che la funzione energia di un oscillatore è la somma di due termini quadratici (energia cinetica e potenziale) e sommando anche sui due stati di polarizzazione, l'energia associata a ciascun modo di oscillazione elettromagnetico è $2kT$, e l'energia totale della radiazione in equilibrio termico con le pareti è

$$U = \sum_{n=1}^{n=\infty} 2kT \rightarrow \infty$$

la somma ci dice che l'energia totale è infinita¹! Ma questo è impossibile, in questo modo non potrebbe mai esserci equilibrio termico, perché la cavità sarebbe in grado di assorbire infinita energia ad una data temperatura, mentre invece noi siamo in grado di realizzare sperimentalmente delle cavità in equilibrio termico con la radiazione. Otteniamo lo stesso risultato anche nell'approssimazione continua, vale a dire supponendo che n sia abbastanza grande da poterlo trattare come una variabile continua (cioè supponendo che $\Delta n=1 \ll n$); in questo caso possiamo differenziare la formula che ci dà n in funzione della frequenza e ottenere

$$dn = \frac{2L}{c} d\nu$$

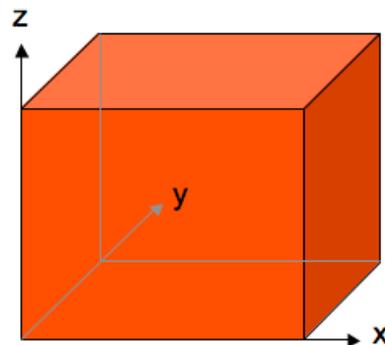
e poiché l'energia per unità di n è $2kT$ allora l'energia media nell'intervallo di frequenze considerato all'interno della cavità è

$$dU = 2kT \frac{2L}{c} d\nu$$

¹ Poiché la divergenza della somma è dovuta ai termini di alta energia – e quindi di alta frequenza – si parla spesso di “catastrofe ultravioletta” o di “divergenza ultravioletta”; questo termine è stato usato per la prima volta da Paul Ehrenfest nel 1911.

e ancora una volta si vede che integrando questa su tutte le frequenze otteniamo un'energia che tende all'infinito.

A questo punto si potrebbe pensare che l'errore derivi dall'aver fatto un'approssimazione così semplice come quella di una cavità unidimensionale, e allora proviamo a fare un calcolo più elaborato, a prendere una cavità tridimensionale. In questo caso, è quasi sempre impossibile fare dei conti esatti, e per semplicità noi prendiamo una cavità a forma di parallelepipedo con degli spigoli lunghi L_x , L_y , e L_z , paralleli agli assi coordinati.

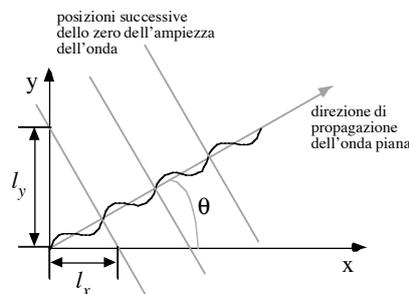


Si noti che la condizione sui nodi deve valere separatamente in ciascuna direzione e allora le componenti del vettore d'onda² sono

$$k_x = \frac{\pi}{L_x} n_x; \quad k_y = \frac{\pi}{L_y} n_y; \quad k_z = \frac{\pi}{L_z} n_z;$$

perciò la norma (al quadrato) del numero d'onda vale

² Per capire il vettore d'onda, consideriamo il caso bidimensionale mostrato in figura, che mostra schematicamente la propagazione di un'onda piana (le creste dell'onda sono delle linee rette che si propagano nella direzione mostrata dalla freccia):



gli zeri dell'ampiezza si ripetono con periodo $l_x = \lambda / \cos \theta$ in direzione x , e analogamente con periodo $l_y = \lambda / \sin \theta$ in direzione y . Definiamo ora le quantità $k_x = 2\pi / l_x = 2\pi \cos \theta / \lambda$, $k_y = 2\pi / l_y = 2\pi \sin \theta / \lambda$: come si vede la quantità $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ ha le proprietà di un vettore (le proiezioni lungo gli assi sono proprio quelle che ci si aspetta di trovare per un vettore che ha la direzione \mathbf{n} di propagazione dell'onda). Il vettore $\mathbf{k} = 2\pi \mathbf{n} / \lambda$ è il *vettore d'onda* dell'onda piana.

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 4\pi^2 \frac{v^2}{c^2}$$

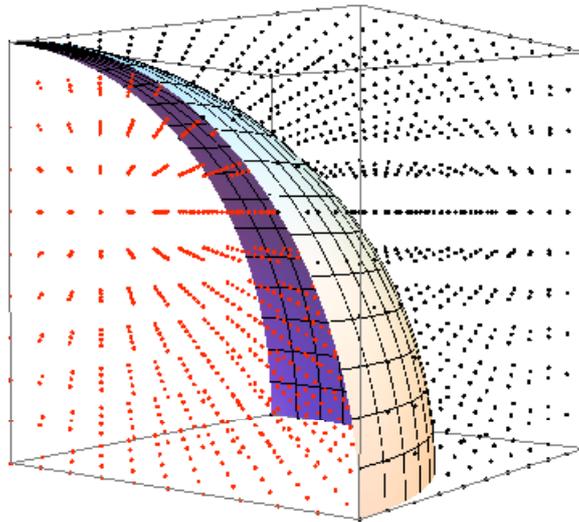
e quindi

$$\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) = \frac{4v^2}{c^2}$$

Quest'ultima formula è l'equazione di un ellissoide con assi $\frac{2vL_i}{c}$, e il volume N dell'ottante in cui gli n sono non-negativi vale

$$N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8v^3 L_x L_y L_z}{c^3} = \frac{4\pi V}{3c^3} v^3$$

dove V è il volume della cavità.



Questa figura mostra l'ottante di ellissoide. I punti rossi rappresentano i modi di oscillazione con coordinate intere (n_x, n_y, n_z) che sono contenuti nell'ottante di ellissoide, quelli neri sono i modi esterni all'ellissoide.

Da quest'ultima formula – tramite una derivazione rispetto v – troviamo il volume del guscio di spessore dv :

$$dN = \frac{4\pi V}{c^3} v^2 dv$$

e poiché ciascun modo di oscillazione del campo elettrico (identificato da un particolare valore della terna degli n) occupa un volume unitario in questo spazio, allora il numero di modi di

oscillazione del campo elettrico con frequenza data è dato dal volume del guscio diviso 1, e quindi la densità di energia (energia diviso il volume della scatola) in un certo intervallo di frequenza è:

$$\begin{aligned} u(\nu)d\nu &= 2kT \frac{dN}{V} = 2kT \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \\ &= \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu \end{aligned}$$

(equazione di Rayleigh e Jeans). Dunque nel caso tridimensionale non è solo l'integrale della densità spettrale di energia che diverge, ma anche la densità stessa diverge per alte frequenze: questa è la cosiddetta catastrofe ultravioletta (la divergenza avviene all'estremità dello spettro corrispondente alle frequenze dell'ultravioletto e più alte).

Sperimentalmente si trova che il comportamento della densità spettrale è ben diverso: non c'è alcuna catastrofe ultravioletta, mentre invece lo spettro raggiunge un massimo e poi declina alle alte frequenze. Come si può risolvere questo problema?

Sezione facoltativa sul teorema di equipartizione

Torniamo ora ad una delle ipotesi fondamentali che abbiamo fatto all'inizio, e cioè che ogni grado di libertà possedesse un'energia media data dal teorema di equipartizione. Ma cos'è il teorema di equipartizione? Ecco una semplice dimostrazione del teorema di equipartizione classico: supponiamo che un certo sistema fisico abbia un'energia totale E che dipende dalle variabili $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ (che possono essere sia coordinate generalizzate, sia momenti coniugati), e che questa energia sia esprimibile nella forma

$$E(x_1, \dots, x_N) = \varepsilon_1(x_1) + E_1(x_2, \dots, x_N)$$

dove il primo termine dipende quadraticamente da x_1 : $\varepsilon_1(x_1) = ax_1^2$.

Se assumiamo che il sistema si trovi in equilibrio termico a temperatura T allora la probabilità di trovare il sistema in uno stato con energia E è $\exp(-\beta E)$ (qui si è introdotta per comodità la temperatura inversa $\beta = 1/kT$), e quindi il valore medio di $\varepsilon_1(x_1)$ è dato da

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(x_1) e^{-\beta E(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta E(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(x_1) e^{-\beta(\varepsilon_1(x_1) + E_1(x_2, \dots, x_N))} dx_1 \dots dx_N}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(\varepsilon_1(x_1) + E_1(x_2, \dots, x_N))} dx_1 \dots dx_N} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1(x_1) e^{-\beta \varepsilon_1(x_1)} dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \varepsilon_1(x_1)} dx_1} = \frac{-\frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \varepsilon_1(x_1)} dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \varepsilon_1(x_1)} dx_1} \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \varepsilon_1(x_1)} dx_1 \end{aligned}$$

d'altra parte si noti che

$$\ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \varepsilon_1(x_1)} dx_1 = \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta a x_1^2} dx_1 = \ln \left(\beta^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \right) = -\frac{1}{2} \ln \beta + \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

e quindi

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{d}{d\beta} \left(-\frac{1}{2} \ln \beta + \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \right) = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} kT$$

Perciò il teorema di equipartizione afferma che ciascun termine quadratico dell'energia dà un contributo all'energia totale media uguale a $kT/2$.

fine della sezione facoltativa

La dimostrazione del teorema di equipartizione suppone che l'energia sia una variabile continua, e noi abbiamo valutato appunto degli integrali. Ma supponiamo che non lo sia, e che invece sia una quantità quantizzata, proprio come la lunghezza d'onda nella scatola. Sperimentalmente sappiamo che un oggetto incandescente splende di luce tanto più bluastra quanto più è caldo, e quindi è abbastanza naturale supporre che se l'energia è quantizzata, la quantizzazione sia proporzionale alla frequenza.

In altri termini, noi adesso supponiamo che ciascuno degli "oscillatori elettromagnetici" che compare nella somma che dà l'energia totale non possa avere energie arbitrarie, ma solo multipli della frequenza; in simboli $\varepsilon_n = nh\nu$, dove h è una costante di proporzionalità. Allora, esprimendo ancora una volta l'energia totale media come somma delle energie medie dei singoli oscillatori, troviamo che il valore medio dell'energia di un singolo oscillatore vale

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n e^{-\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}} = \frac{-\frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\beta \varepsilon_n} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\beta h\nu} = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \\ &= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \end{aligned}$$

Si trova dunque un valore dell'energia media che è diverso da quello di prima, e comunque si noti che se la temperatura è abbastanza alta oppure la frequenza abbastanza bassa, in modo che l'esponente $\beta h\nu = h\nu / kT \ll 1$, allora si può utilizzare l'espansione in serie dell'esponenziale fino al primo ordine e ottenere:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \approx \frac{h\nu}{1 + \beta h\nu - 1} = kT$$

che è il risultato a cui si arriva applicando direttamente il teorema di equipartizione all'oscillatore classico, quindi il teorema di equipartizione che abbiamo utilizzato finora può essere considerato come un caso limite di un teorema più generale di distribuzione dell'energia.

Fu Max Planck, nel 1900, che fece la coraggiosa ipotesi di quantizzazione dell'energia, ipotesi che modifica radicalmente il teorema di equipartizione, e che risolve il problema della divergenza ultravioletta. Infatti se assumiamo il nuovo valore per l'energia media, otteniamo una densità di energia elettromagnetica che è

$$u(\nu)d\nu = 2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{dN}{V} = 2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

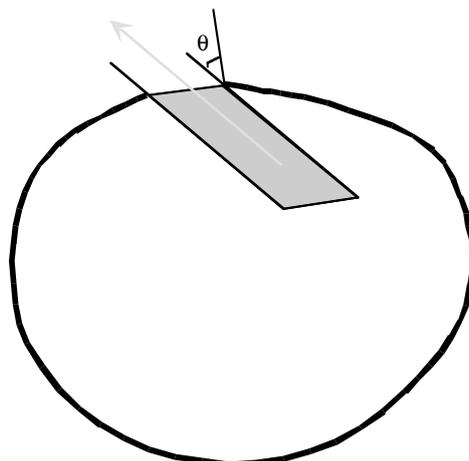
e questa non diverge più per frequenze molto alte. Inoltre, se prendiamo ancora una volta il caso di temperatura abbastanza alta oppure frequenza abbastanza bassa, in modo tale che $\beta h\nu = h\nu / kT \ll 1$, possiamo di nuovo espandere l'esponenziale e otteniamo

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \approx \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{1 + \beta h\nu - 1} d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \cdot \nu^2 d\nu$$

ritrovando così la legge di Rayleigh-Jeans.

La costante h introdotta da Planck è una delle costanti fondamentali della fisica, e vale circa $6.3 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Dalla formula per la densità di energia contenuta nella cavità possiamo ricavare altre formule utili. In primo luogo ci possiamo chiedere quale sia la potenza irraggiata da un foro nella parete della cavità: la geometria della situazione è mostrata nella figura seguente



la quantità di energia radiante che riesce ad uscire dal foro di sezione A in direzione θ nel tempo Δt è quella che si muove in direzione del foro (e questa rappresenta una frazione $d\Omega / 4\pi$ del totale), con angolo θ , e corrisponde al cilindro di base A e altezza $c\Delta t \cos\theta$, e quindi la potenza irradiata per unità di superficie e unità di tempo (irradianza) è data – nell'intervallo di frequenza $(\nu, \nu + d\nu)$ – da

$$\begin{aligned} I(\Omega, \nu) d\nu d\Omega &= \frac{1}{A\Delta t} \cdot A \cdot c\Delta t \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot u(\nu) d\nu \\ &= c \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot u(\nu) d\nu \end{aligned}$$

Integrando sugli angoli di uscita si ottiene l'irradianza in funzione della frequenza

$$\begin{aligned} I(\nu) d\nu &= \int_{\Omega/2} \cos\theta \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot c u(\nu) d\nu = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos\theta d(\cos\theta) \cdot c u(\nu) d\nu \\ &= \frac{c}{4} u(\nu) d\nu \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene l'irradianza totale, integrando su tutte le frequenze:

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} u(\nu) d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{1}{(\beta h)^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Si può dimostrare (v. appendice) che l'integrale vale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

e quindi

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4$$

dove $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ è la famosa costante di Stefan-Boltzmann.

Per radiatori reali questa formula va ancora corretta con l'introduzione di una costante, che dice quanto è efficiente il processo di emissione, nota con il nome di emittanza; qui indichiamo l'emittanza con il simbolo a , così che per radiatori reali la formula dell'irradianza diventa

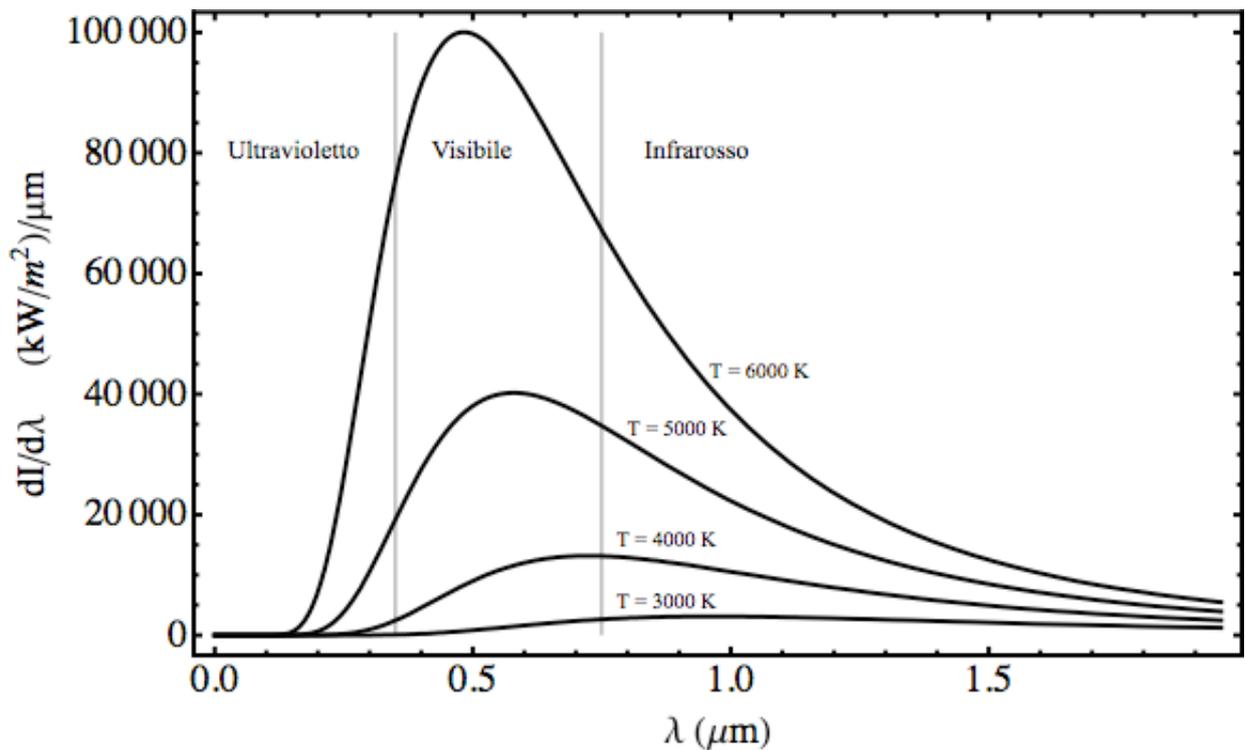
$$I = a\sigma T^4$$

(questa è ancora un'approssimazione, perché in generale l'emittanza non è una costante ma dipende dalla frequenza, e quindi la formula contiene l'emittanza media).

Se ora torniamo alla formula per l'irradianza in funzione della frequenza possiamo scrivere subito anche l'irradianza in funzione della lunghezza d'onda

$$I(\nu)d\nu = \frac{c}{4}u(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu$$

$$I(\lambda)d\lambda = 2\pi hc^2 \cdot \frac{1}{\lambda^5 (e^{\beta hc/\lambda} - 1)} d\lambda$$



Irradianza in funzione della lunghezza d'onda per diverse temperatura. Si noti che il picco si sposta verso lunghezze d'onda minori (frequenze maggiori) e che il valore di picco dell'irradianza aumenta molto al crescere della temperatura.

Derivando possiamo trovare facilmente la frequenza che corrisponde alla massima irradianza; introduciamo la variabile $x = \beta h\nu$, allora il massimo è lo stesso del massimo della funzione $\frac{x^3}{e^x - 1}$, e il corrispondente valore x_0 si ottiene risolvendo l'equazione che si ricava annullando la derivata:

$$3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x = 0$$

e quindi

$$\beta h\nu = x_0$$

dove x_0 è un numero puro, che non dipende da alcuna costante fisica, e che si può ricavare risolvendo numericamente l'equazione.

Esercizio: scrivere un programma per trovare il valore numerico di x_0 , che vale approssimativamente 2.8, con almeno 6 cifre significative. Si provi anche a trovare la formula corrispondente in termini di lunghezza d'onda: in questo caso è forse possibile trovare la soluzione anche con un metodo grafico?

Dall'equazione

$$v = \frac{x_0}{\beta h} = x_0 \frac{kT}{h}$$

si trova che a due temperature diverse le frequenze relative al massimo sono correlate tra loro dall'equazione

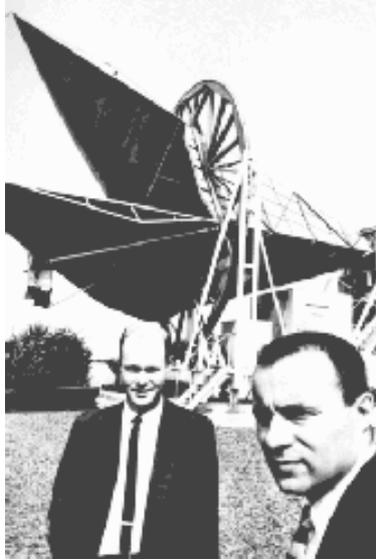
$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

(legge di spostamento di Wien).

Come si vede lo spettro della radiazione di corpo nero dipende da un solo parametro, la temperatura, e questa caratteristica dello spettro viene utilizzata per costruire dei termometri per alte temperature, i pirometri, che funzionano confrontando la luminosità di un corpo nero a temperatura nota (per esempio alla temperatura di fusione dell'oro) ad una certa lunghezza d'onda, con la luminosità di un altro corpo nero a temperatura ignota. Dal confronto delle luminosità è possibile determinare la temperatura. Lo stesso principio è utilizzato dai colorimetri (che confrontano il colore invece dell'intensità).

Secondo le attuali teorie cosmologiche il nostro universo deriva da un'esplosione primordiale, detta Big Bang. Si suppone che la palla di fuoco originale abbia irraggiato una grande quantità di radiazione di corpo nero, radiazione che corrispondeva ad una temperatura elevatissima. La successiva espansione dell'universo ha prodotto un aumento di lunghezza d'onda in questa luce fossile, che corrisponde dunque ad un corpo nero a temperatura molto più bassa.

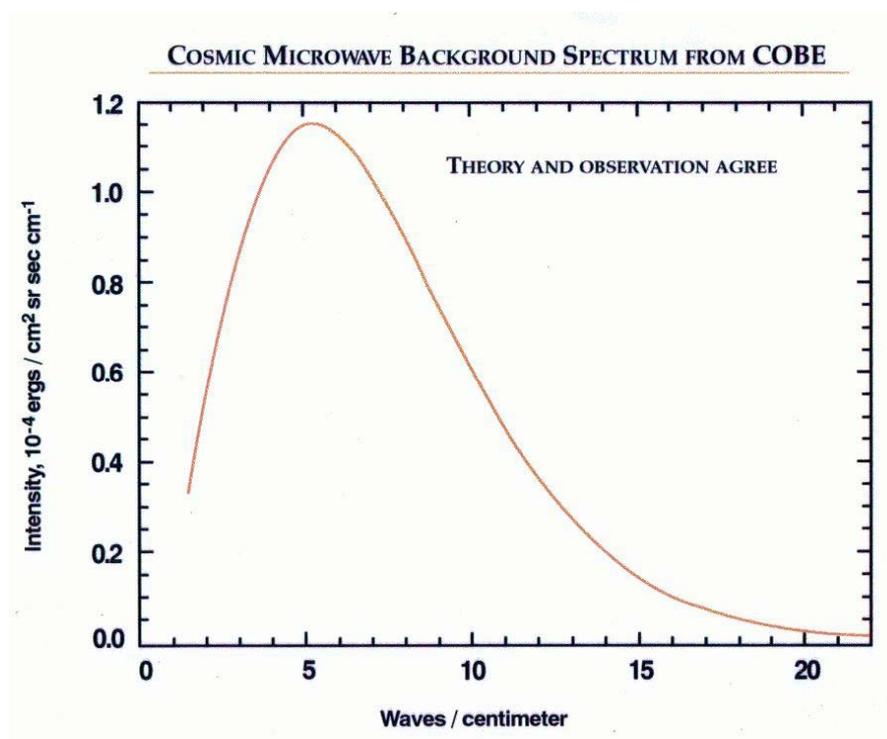
Questa luce fossile è stata scoperta nel 1965 da Arno Penzias e Robert Wilson, nel corso di osservazioni radioastronomiche con un'antenna a basso rumore: i due ricercatori capirono che il rumore di fondo che osservavano aveva un'origine fisica, e identificarono così la radiazione cosmica di fondo, che è una reliquia del Big Bang.



Penzias e Wilson con la loro antenna a basso rumore

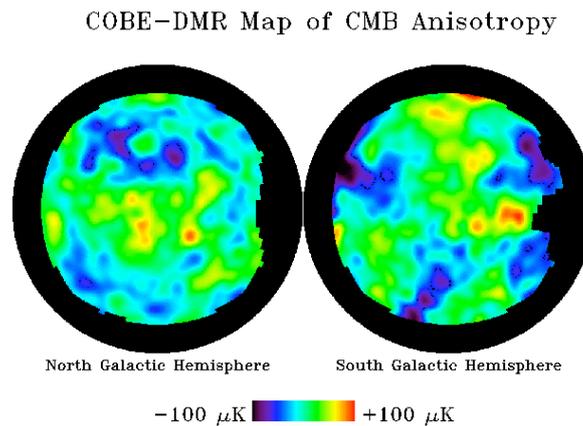
La loro scoperta ha avuto un'enorme importanza in astrofisica, e Penzias e Wilson hanno ricevuto per questo il premio Nobel nel 1978.

Dopo gli studi iniziali di Penzias e Wilson ne sono stati condotti molti altri, ad un livello di precisione molto più elevato. Tra i progetti recenti vale la pena di menzionare il satellite COBE, che utilizzando degli strumenti ad alta precisione ha prodotto la prima misurazione dello spettro della radiazione cosmica di fondo al di fuori dell'atmosfera. Il satellite è stato lanciato nel 1989 e in pochi giorni è stato in grado di ottenere uno spettro della radiazione cosmica di fondo praticamente indistinguibile da uno spettro di corpo nero.



Spettro della radiazione cosmica di fondo misurato dal satellite COBE. Lo spettro sperimentale è indistinguibile da uno spettro di corpo nero alla temperatura $T = 2.726$ K.

Come si è visto lo spettro di corpo nero è identificato in modo univoco da una temperatura, quindi da una misura dello spettro si può ricavare la temperatura. Gli strumenti di bordo di COBE hanno in questo modo ottenuto una mappa della temperatura del cielo: questa temperatura non è uniforme, in parte perché la Terra si muove rispetto al fondo di radiazione cosmica (e quindi lo spettro viene modificato a causa dell'effetto Doppler), in parte a causa di fluttuazioni di origine ignota, che rappresentano un'importante vincolo per i modelli cosmologici attuali.



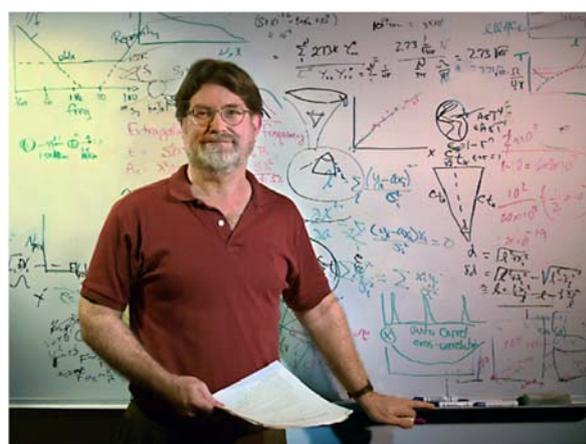
Mappa dell'anisotropia della radiazione cosmica di fondo prodotta da COBE dopo quattro anni di osservazione. Si noti che le differenze dalla temperatura media sono dell'ordine di 100 μK .

Le immagini riportate sopra sono state prodotte dal team scientifico del satellite COBE: per saperne di più è possibile consultare le pagine web <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/> e <http://aether.lbl.gov/www/projects/cobe/>.

La missione COBE ha avuto un'enorme impatto sulla nostra comprensione dell'universo, e questo contributo è stato riconosciuto con il premio Nobel per la Fisica 2006 ai due coordinatori del progetto, gli americani John C. Mather e George F. Smoot



John C. Mather



George F. Smoot

ulteriori informazioni sul premio Nobel 2006 si trovano sulla pagina web http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2006/.

RELEASE: 06-327

NASA SCIENTIST JOHN C. MATHER WINS 2006 NOBEL PHYSICS PRIZE

The Nobel Prize Committee announced Tuesday that NASA scientist and Goddard Fellow Dr. John C. Mather is this year's recipient of the Nobel Prize for Physics. Mather is currently serving as senior project scientist for NASA's James Webb Space Telescope program.

Mather shares the prize with George Smoot of the Lawrence Berkeley National Laboratory in Berkeley, Calif. They received the award for their work that helped cement the Big Bang theory of the universe and deepened our understanding of the origin of stars and galaxies.

"I was thrilled and amazed when I found out we won the Nobel Prize," Mather said. "The dedicated and talented women and men of the COBE team collaborated to produce the science results being recognized. This is truly such a rare and special honor."

Mather and Smoot's work was based on measurements performed with NASA's Cosmic Background Explorer (COBE) satellite, launched in 1989. Together, the scientists could observe the universe in its early stages about 380,000 years after it was born. Ripples in the light they detected helped demonstrate how galaxies came together over time.

NASA Administrator Michael Griffin said, "I am thrilled to hear that Dr. John Mather has been selected to receive the Nobel Prize in Physics. John would be a world-class scientist no matter where he had chosen to spend his career, but we at NASA are enormously proud that he has chosen to spend it with us."

Dr. Ed Weiler, the Director of NASA's Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., added, "This is a tremendous accomplishment for John and for the COBE team. It is also important to note that COBE was built entirely 'in-house,' and the fact that a NASA civil servant has won the biggest science award possible demonstrates that world-class research is happening here at NASA."

COBE was built at Goddard to measure microwave and infrared light from the early universe. COBE determined that the cosmic microwave background, which is essentially the afterglow of the Big Bang, has a temperature of approximately minus 455 degrees Fahrenheit. This observation matched the predictions of the hot Big Bang theory and indicated that nearly all of the radiant energy of the universe was released within the first year after the Big Bang.

Also, COBE discovered slight temperature variations of approximately 10 parts per million in this relatively uniform light. These variations pointed to density differences which, through gravity over the course of billions of years, gave rise to the stars, galaxies and hierarchical structure we see today.

Steven Hawking a decade ago, independent of the COBE team, called these variations "the most important discovery of the century, if not of all time."

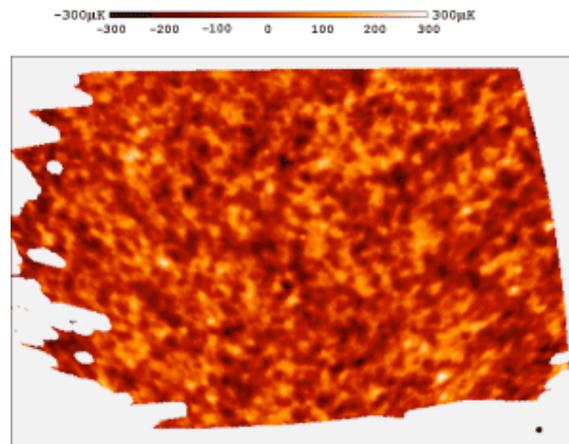
Alfred Nobel, the wealthy Swedish industrialist who endowed the prizes, left guidelines in his will for the selection committee which cited "the prize should be given to those who shall have conferred the greatest benefit on mankind" and "have made the most important discovery or invention within the field of physics."

The 2006 Nobel Laureates will gather in Stockholm on Dec. 10 to receive their Nobel Prize Medal, diploma and monetary award from King Carl Gustav XVI of Sweden.

For Mather's biographical information, visit:

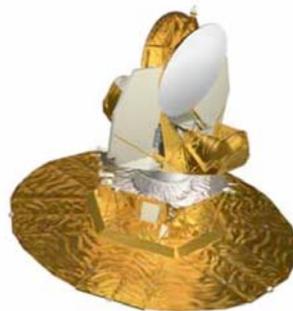
http://www.nasa.gov/vision/universe/starsgalaxies/nobel_prize_mather.html

Recentemente il fondo di radiazione cosmica è stato misurato con grande precisione anche da altri apparati: un gruppo italiano ha utilizzato un sensore bolometrico a bordo di un pallone che ha circumnavigato l'Antartide per poco più di 10 giorni (esperimento BOOMERANG); l'immagine che segue è stata ottenuta appunto da questo sensore, e mostra in dettaglio le fluttuazioni di temperatura del fondo di radiazione cosmica



Per ulteriori informazioni sull'esperimento BOOMERANG si può consultare la pagina web dell'esperimento <http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang/>.

Negli ultimi anni la missione spaziale WMAP ha fornito risultati di eccezionale precisione. WMAP significa Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, ed è stato chiamato così in onore di David Wilkinson, pioniere dello studio del fondo cosmico di microonde e che faceva parte del team della missione; D. Wilkinson è morto prematuramente nel 2002. Lo scopo della missione è di fare una mappa del cielo con grande precisione ($20 \mu\text{K}$) e grande risoluzione angolare (0.3°).

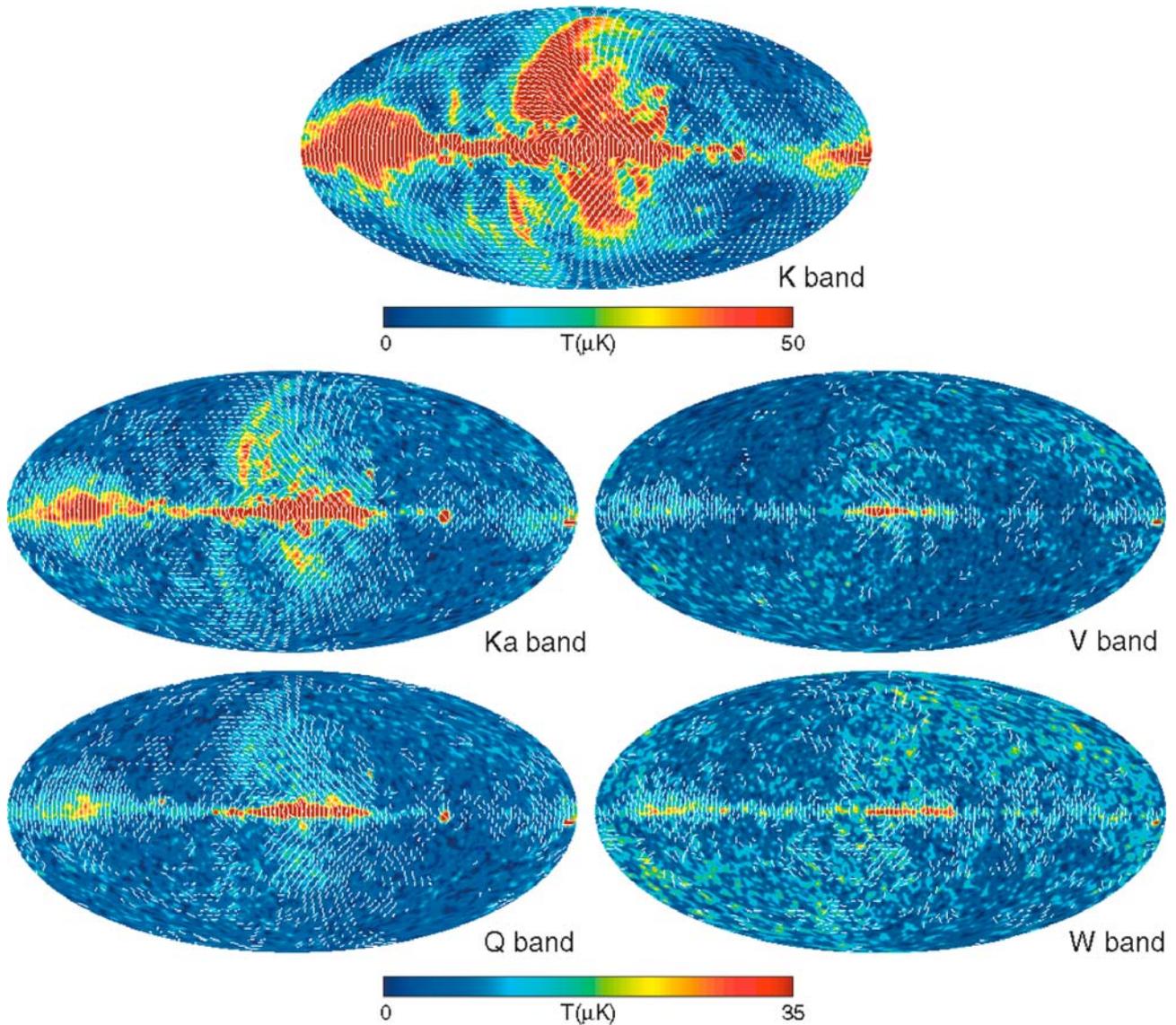


Un'immagine di WMAP

Finora (inizio 2008) WMAP ha prodotto i seguenti risultati (WMAP senza combinazione con altri dati, per esempio quelli delle supernovae lontane)

- l'universo ha 13.73 ± 0.12 miliardi di anni
- l'universo è composto da
 - $(4.41 \pm 0.30)\%$ di materia barionica
 - $(21.4 \pm 2.7)\%$ di materia oscura

- $(74.2 \pm 3.0)\%$ di energia oscura (la costante cosmologica di Einstein?)
- la costante di Hubble vale $71.9^{+2.6}_{-2.7}$ (km/s)/Mpc
- i dati sono compatibili con una geometria piatta (metrica di Minkowski)

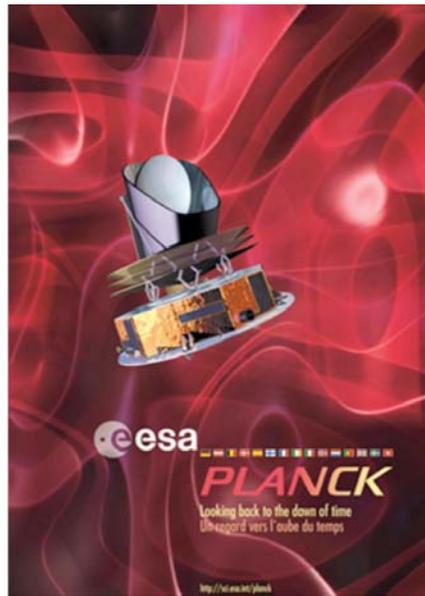


Mappe del cielo rilasciate dal team WMAP in marzo 2008. Il rosso indica una temperatura più alta, il blu una temperatura più bassa. Le linee chiare indicano la polarizzazione preferenziale della radiazione e le immagini si riferiscono a diverse lunghezze d'onda (si veda anche il sito della missione WMAP:

http://map.gsfc.nasa.gov/m_mm.html)

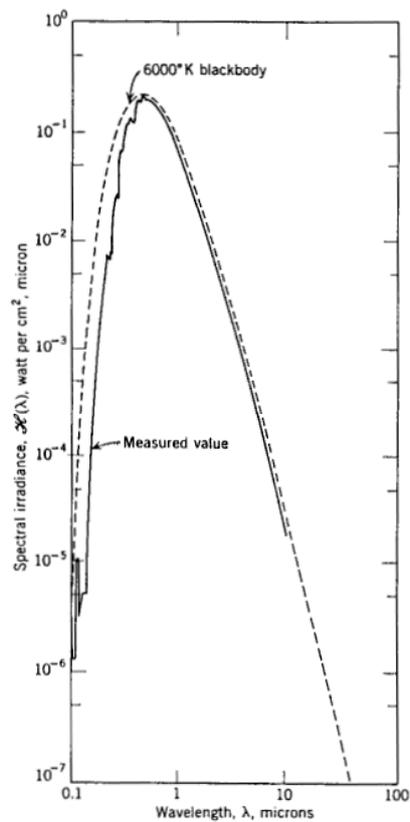
Attualmente è in fase di progetto la missione internazionale PLANCK, che dovrebbe produrre una mappa ancora più dettagliata della radiazione termica residua: il satellite PLANCK dovrebbe venire messo in orbita a fine 2008 (per ulteriori informazioni:

<http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=17>).

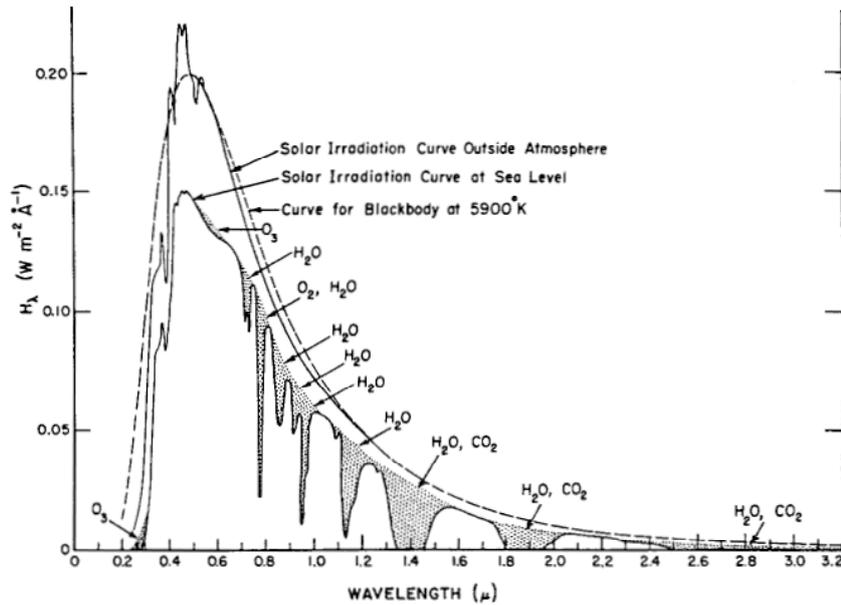


7. Una misura della temperatura superficiale del sole

Lo spettro della radiazione solare approssima in modo eccellente lo spettro di corpo nero, come si vede nelle figure seguenti:



Spettro della radiazione solare al di fuori dell'atmosfera. Si noti il confronto con lo spettro ideale alla temperatura di circa 6000 K.



Spettro della radiazione solare fuori dall'atmosfera e al livello del mare (con l'indicazione di alcune bande di assorbimento dovute ai gas atmosferici).

Nell'esperimento descritto in questa sezione misuriamo la temperatura della fotosfera solare, e per capire come funziona dobbiamo ora analizzare la dinamica dello scambio termico radiativo.

Se consideriamo un oggetto con superficie S e alla temperatura T che si trova in un ambiente a temperatura T_A , allora il flusso netto di potenza dall'oggetto verso l'ambiente dovuto allo scambio radiativo è

$$W = Sa(\sigma T^4 - \sigma T_A^4)$$

(qui facciamo l'approssimazione che l'ambiente si comporti come un corpo nero e inoltre assumiamo sempre che gli altri meccanismi di scambio termico – conduzione e convezione – si possano trascurare).

Questo vuol dire che l'energia interna dell'oggetto varia secondo l'equazione differenziale

$$\frac{dU}{dt} = -W = -Sa(\sigma T^4 - \sigma T_A^4)$$

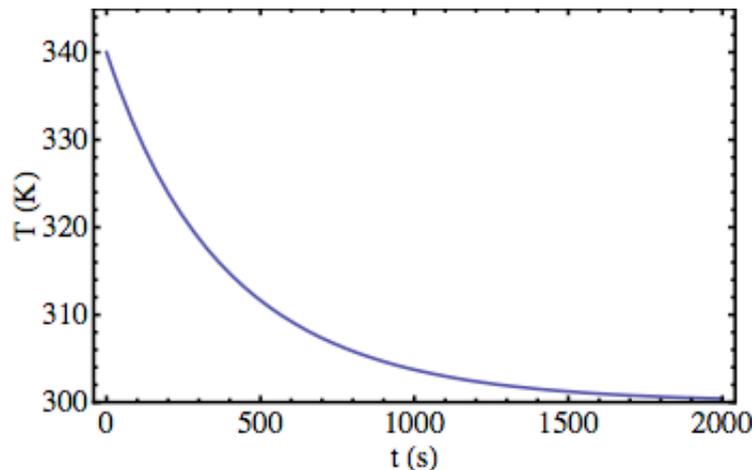
e quindi se introduciamo la capacità termica C dell'oggetto, troviamo

$$C \frac{dT}{dt} = \sigma Sa(T_A^4 - T^4)$$

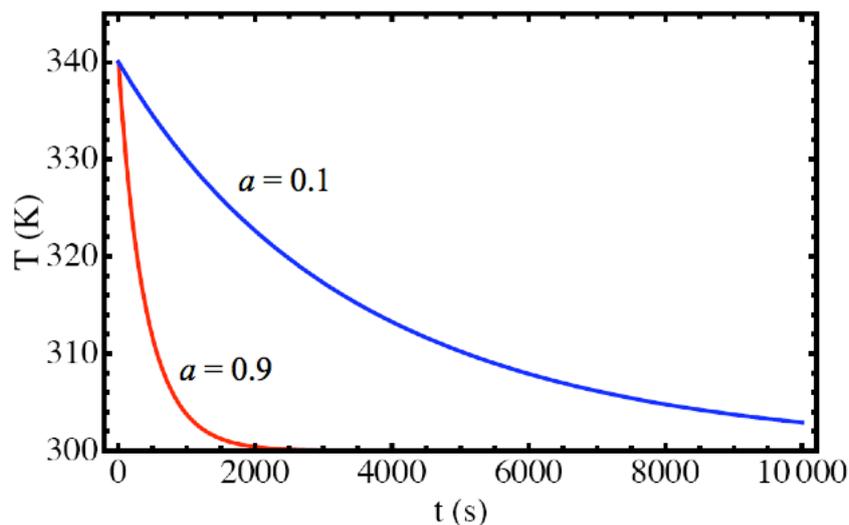
Da quest'ultima formula vediamo che se conosciamo le costanti che caratterizzano l'oggetto (C , S , a), la derivata dT/dt , e la temperatura dell'oggetto T_1 , allora siamo in grado di trovare la

temperatura dell'ambiente. Viceversa, se conosciamo la temperatura dell'ambiente e dell'oggetto, possiamo trovare uno dei parametri, ad esempio l'emissività a :

$$a = \frac{C(dT/dt)}{\sigma S(T_A^4 - T^4)}$$



Esempio di curva di raffreddamento calcolata per un cubetto di alluminio dipinto (lato = 20 mm, $a = 0.9$, temperatura iniziale = 340 K, temperatura dell'ambiente = 300 K)



Curve di raffreddamento calcolate per lo stesso oggetto ma con diverse emittanze.

Abbiamo visto che anche il sole può venire considerato con ottima approssimazione un corpo nero, e quindi emette secondo la legge $I = \sigma T_s^4$. Quando è esposto al sole, il nostro oggetto non è solo in equilibrio con l'ambiente, ma anche con il sole, e quindi la relazione globale di equilibrio con l'ambiente diventa:

$$C \frac{dT}{dt} = \sigma S a (T_A^4 - T^4) + \gamma \sigma S_l a T_s^4$$

Qui γ è un fattore di correzione, dovuto al fatto che il sole ha un piccolo diametro angolare e S_1 è l'area che intercetta la radiazione solare: il passo successivo consiste nel calcolare γ .

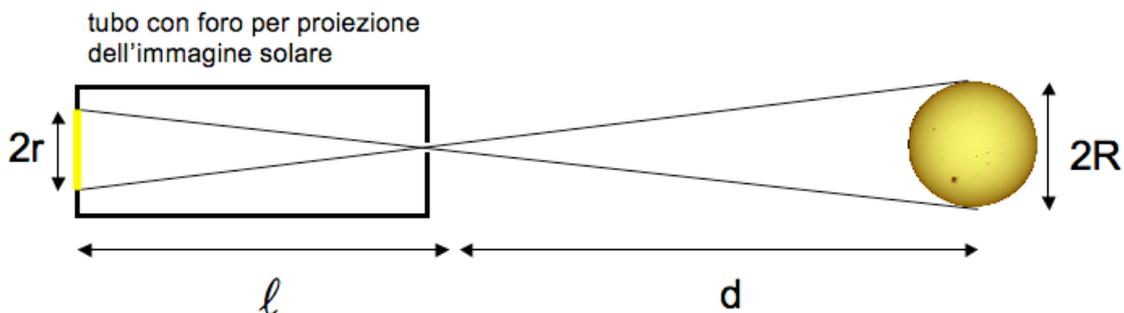
Il sole ha un raggio R e si trova a distanza d dalla terra; se assumiamo che emetta come un corpo nero, questo vuol dire che la potenza emessa è

$$W_s = 4\pi R^2 \sigma T_s^4$$

D'altra parte questa potenza viene emessa in tutte le direzioni, e alla distanza terra-sole, essa è distribuita su una sfera di raggio d , vale a dire sull'area $4\pi d^2$, e quindi la potenza per unità di area che arriva sulla terra è

$$\frac{W_s}{4\pi d^2} = \left(\frac{R}{d}\right)^2 \sigma T_s^4$$

e quindi $\gamma = (R/d)^2$. Poiché $R \ll d$, il rapporto R/d corrisponde al raggio angolare del sole, espresso in radianti; questa quantità si può misurare facilmente, per esempio proiettando l'immagine del sole per mezzo di un foro in un cartoncino, allora il diametro angolare del sole è semplicemente il rapporto tra diametro della proiezione del sole sullo schermo e la distanza foro-schermo.



$$\gamma = \left(\frac{R}{d}\right)^2 = \left(\frac{r}{\ell}\right)^2$$

Geometria della proiezione per la misura del coefficiente γ .

La superficie S_1 si trova misurando l'area dell'ombra proiettata dall'oggetto di cui si misura la temperatura su uno schermo piano perpendicolarmente alla direzione del sole (*esercizio*: si spieghino le ragioni di questa procedura).

Tornando alla formula che dà la somma dei flussi termici, possiamo scrivere

$$C \frac{dT}{dt} = \sigma S a (T_A^4 - T^4) + \left(\frac{R}{d} \right)^2 \sigma S_I a T_S^4$$

Avendo già misurato a , e conoscendo già tutte le altre quantità, si riesce a trovare la temperatura del sole:

$$T_S^4 = \frac{1}{\sigma S_I a (R/d)^2} \left[C \frac{dT}{dt} - \sigma S a (T_A^4 - T^4) \right]$$

Questa è una stima fatta ad un certo tempo t : in questo caso la temperatura e la sua derivata hanno valori ben precisi; la stima si può replicare ad ulteriori tempi di misura e trovare quindi molti valori della temperatura solare, che poi si possono mediare per trovare un valore più preciso. Questo può sembrare – giustamente – un metodo rudimentale di analisi dati, e bisogna quindi menzionare l'esistenza di una metodologia di derivazione dei parametri più sofisticata, che consiste nel fare un fit dell'equazione differenziale ai dati sperimentali.

Si noti infine che una stima grossolana della temperatura del sole si può ottenere da una sola misura, che corrisponde al caso in cui il corpo nero sia in equilibrio con l'ambiente e con la radiazione solare. In tal caso l'equazione precedente diventa infatti:

$$T_S^4 = \frac{S}{S_I} \cdot \frac{(T^4 - T_A^4)}{(R/d)^2}$$

e non è richiesta la conoscenza né di C né di a .

Appendice A: calcolo dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx$

Notiamo anzitutto che – utilizzando la serie geometrica – si può scrivere

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} dx$$

Se ora introduciamo la variabile ausiliaria $s = kx$, allora $ds = kdx$, e

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{s}{k}\right)^n e^{-s} ds = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}\right) \left(\int_0^{+\infty} s^n e^{-s} ds\right)$$

La somma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}$ corrisponde ad un valore particolare della funzione zeta di Riemann, che in generale è definita da

$$\zeta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^u}$$

e in questo caso $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} = \zeta(n+1)$

L'integrale corrisponde ad un particolare valore della cosiddetta funzione gamma e si valuta per mezzo della tecnica dell'integrazione per parti

$$I_n = \int_0^{+\infty} s^n e^{-s} ds = \int_0^{+\infty} s^n d(-e^{-s}) = -s^n e^{-s} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{+\infty} s^{n-1} e^{-s} ds = n \int_0^{+\infty} s^{n-1} e^{-s} ds = nI_{n-1}$$

quindi, iterando, si trova

$$I_n = n! I_0 = n! \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = n!$$

Infine

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = n! \zeta(n+1)$$

L'integrale che compare nel testo principale è

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 3! \zeta(4) = 6 \cdot \zeta(4)$$

Si può dimostrare che $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (per esempio utilizzando le serie di Fourier, oppure il teor. dei residui) e quindi $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$.

Appendice B: soluzione dell'eq. diff. $C \frac{dT}{dt} = \sigma Sa (T_A^4 - T^4)$

Si possono separare le variabili e quindi si può mettere l'equazione differenziale nella forma

$$\frac{dT}{T_A^4 - T^4} = \frac{\sigma Sa}{C} dt$$

il termine a sinistra si può scomporre in frazioni parziali

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_A^4 - T^4} &= \frac{1}{(T_A - T)(T_A + T)(T_A^2 + T^2)} = \frac{A}{T_A - T} + \frac{B}{T_A + T} + \frac{CT + D}{T_A^2 + T^2} \\ &= \frac{A(T_A + T)}{T_A^2 - T^2} + \frac{B(T_A - T)}{T_A^2 - T^2} + \frac{CT + D}{T_A^2 + T^2} \\ &= \frac{(A+B)T_A + (A-B)T}{T_A^2 - T^2} + \frac{CT + D}{T_A^2 + T^2} \\ &= \frac{(A+B)T_A^3 + (A-B)TT_A^2 + (A+B)T_A T^2 + (A-B)T^3 + CTT_A^2 - CT^3 + DT_A^2 - DT^2}{T_A^4 - T^4} \\ &= \frac{[(A+B)T_A^3 + DT_A^2] + (A-B+C)TT_A^2 + [(A+B)T_A - D]T^2 + (A-B-C)T^3}{T_A^4 - T^4} \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti si trova allora

$$(A + B)T_A + D = \frac{1}{T_A^2}$$

$$A - B + C = 0$$

$$(A + B)T_A - D = 0$$

$$A - B - C = 0$$

da cui si trova subito $C = 0$. Quindi $A = B$ e $A = \frac{1}{4T_A^3}$. Infine $D = \frac{1}{2T_A^2}$. Quindi l'espansione in frazioni parziali è

$$\frac{1}{T_A^4 - T^4} = \frac{1}{4T_A^3} \left(\frac{1}{T_A - T} + \frac{1}{T_A + T} + \frac{2T_A}{T_A^2 + T^2} \right)$$

Utilizzando questa espansione, l'equazione differenziale diventa

$$\frac{1}{4T_A^3} \left(\frac{1}{T_A - T} + \frac{1}{T_A + T} + \frac{2T_A}{T_A^2 + T^2} \right) dT = \frac{\sigma Sa}{C} dt$$

e l'integrazione dei diversi termini produce il seguente risultato

$$\frac{1}{4T_A^3} \left(-\ln(T_A - T) + \ln(T_A + T) + 2 \arctan \frac{T}{T_A} \right) = \frac{\sigma Sa}{C} t + Cost$$