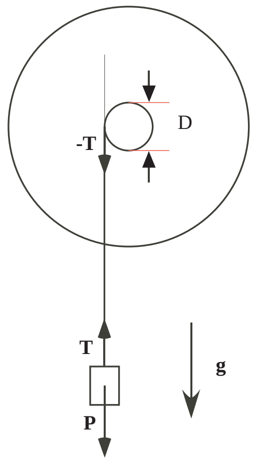
Volano



L'accelerazione costante del moto di caduta del peso è data dalla seconda legge di Newton

$$mg - T = ma$$

La lunghezza ℓ del filo e il tempo di caduta del peso t_1 sono legati da

$$\ell = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{\alpha_1 D}{4}\, t_1^2 \tag{1}$$

dove $\alpha_1 = 2a/D$ è l'accelerazione angolare del volano, regolata dalla seconda equazione cardinale della Dinamica

$$(mg - ma)\frac{D}{2} + M_a = \left(mg - m\frac{\alpha_1 D}{2}\right)\frac{D}{2} + M_a = I_{xx}\alpha_1 \tag{2}$$

nella quale M_a è un momento assiale d'attrito, che supponiamo costante. Quando il filo è completamente svolto, il volano si muove sotto l'azione del solo momento d'attrito:

$$M_a = I_{xx}\alpha_2 \tag{3}$$

e se il volano si ferma all'istante di tempo t_2, essendo α_1 e α_2 costanti, vale

$$\alpha_1 t_1 = -\alpha_2(t_2 - t_1)$$

Dalla (1) si ha quindi

$$\alpha_1 = \frac{4\ell}{Dt_1^2}; \qquad \alpha_2 = -\frac{4\ell}{Dt_1(t_2 - t_1)} \tag{4}$$

Sostituendo le equazioni (3) e (4) nella (2) si ottiene infine

$$mg\frac{D}{2} - m\frac{\ell}{t_1^2}D - I_{xx}\,\frac{4\ell}{Dt_1(t_2-t_1)} = I_{xx}\,\frac{4\ell}{Dt_1^2}$$

da cui

$$I_{xx} = \frac{mD^2}{4}\,\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\left(\frac{gt_1^2}{2\ell}-1\right)$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial I_{xx}}{\partial m} = \frac{I_{xx}}{m}; \qquad \frac{\partial I_{xx}}{\partial D} = \frac{2I_{xx}}{D};$$

$$\frac{\partial I_{xx}}{\partial \ell} = -\frac{mD^2}{4}\,\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\,\frac{gt_1^2}{2\ell^2} = -\frac{I_{xx}}{\ell\left(1-\dfrac{2\ell}{gt_1^2}\right)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{xx}}{\partial t_1} &= -\frac{mD^2}{4t_2}\,\left(\frac{gt_1^2}{2\ell}-1\right) + \frac{mD^2}{4}\,\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\,\frac{gt_1}{\ell} = \\ &= -\frac{I_{xx}}{t_2-t_1} + \frac{2I_{xx}}{t_1\left(1-\dfrac{2\ell}{gt_1^2}\right)}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_{xx}}{\partial t_2} = \frac{mD^2}{4}\,\frac{t_1}{t_2^2}\,\left(\frac{gt_1^2}{2\ell}-1\right) = \frac{I_{xx}}{t_2\left(\dfrac{t_2}{t_1}-1\right)}$$