

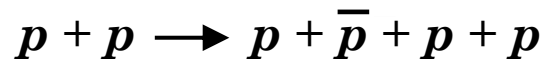
## Esercizio (Energia di soglia per produzione di antiprotoni)

Quale energia cinetica minima deve possedere un protone  $p$  di un fascio, per produrre un antiprotone  $\bar{p}$  urtando un protone di un bersaglio nucleare solidale col sistema del laboratorio ?

Si consideri  $m_p = 0.9383 \text{ GeV}/c^2$ .

### Soluzione:

La conservazione numero barionico richiede che la reazione sia della forma:



Alla soglia, l'energia disponibile nel **CM** deve quindi essere

$$\sqrt{s} = (3m_p + m_{\bar{p}})c^2 = 4m_p c^2 \quad , \quad s = 16m_p^2 c^4$$

Per avere produzione a soglia di  $\bar{p}$ , la **massa invariante** dell'interazione  $p + p$  deve quindi uguagliare l'energia  $\sqrt{s}$  nel CM.

I **nucleoni** del nucleo non sono però a riposo nel nucleo, ma **soggetti al moto di Fermi** (si ricordi quanto visto sul modello a gas di Fermi !) e posseggono un impulso il cui valor medio del modulo  $p_F$  può essere ottenuto approssimativamente dal principio di indeterminazione.

L'incertezza  $\Delta x$  con cui si può conoscere la posizione di ognuno di essi è dell'ordine di  $\Delta x \simeq 1 \text{ fm}$ , per cui

$$p_F \simeq \hbar/\Delta x = \hbar c/(c \Delta x) \simeq 197 \text{ (MeV}\cdot\text{fm)}/(1 \text{ fm}\cdot c) \simeq 200 \text{ MeV}/c$$

Detti  $p_A$  e  $p_B$  ( $p_B \equiv p_F$ ) i **tri-impulsi** rispettivamente del protone proiettile e di quello bersaglio si ha, per le loro energie totali  $E_A$  ed  $E_B$

$$E_A^2 = m_p^2 c^4 + p_A^2 c^2 \quad \text{ed} \quad E_B^2 = m_p^2 c^4 + p_B^2 c^2$$

Il quadrato della massa invariante del canale d'ingresso  $p + p$  è allora

$$(\sqrt{s})^2 = (\sum E_i)^2 - (\sum \vec{p}_i)^2$$

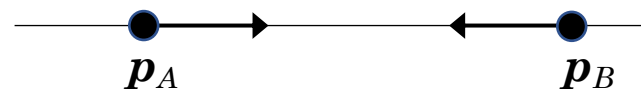
ovvero

$$s = (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 c^2 = E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B - (p_A c)^2 - (p_B c)^2 - 2\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B c^2$$

Sostituendo si ottiene

$$s = 2m_p^2 c^4 + 2\sqrt{(m_p^2 c^4 + p_A^2 c^2)(m_p^2 c^4 + p_B^2 c^2)} - 2p_A \cdot p_B c^2$$

La massa invariante risulta massima quando  $\vec{p}_A$  e  $\vec{p}_B$  sono **antiparalleli**, che equivale ad una collisione frontale (disegno), quindi per  $\vartheta = \pi$ , e  $(\vec{p}_A \cdot \vec{p}_B) = -p_A p_B$ .



Con ciò

$$s = 2m_p^2c^4 + 2\sqrt{m_p^4c^8 + m_p^2c^4p_Bc^2 + m_p^2c^4p_Ac^2 + p_A^2p_B^2c^4} + 2p_Ap_Bc^2$$

che a soglia deve coincidere, come detto, con  $16m_p^2c^4$ .

Uguagliando e quadrando si ha:

$$49 m^4c^8 - 14m^2p_Ap_Bc^6 + p_A^2p_B^2 = m^4c^8 + m^2p_B^2c^6 + m^2p_A^2c^6 + p_A^2p_B^2c^4$$

Sostituendo i valori per  $m_p$  e  $p_B$ , ed esprimendo tutto in GeV si ha

$$p_A^2 + 2.8 p_A - 42.18 = 0 \quad \rightarrow \quad p_A = 5.24 \text{ GeV}/c$$

$$p_A \simeq 6.50 \text{ GeV}/c$$

L'energia totale è quindi data da

$$E_A = \sqrt{m_p^2c^4 + p_A^2c^2} = 5.32 \text{ GeV}, \quad \text{ed essendo anche} \quad E_A = m_p c^2 + E_{kA}$$

$$E_A \simeq 6.57 \text{ GeV}$$

senza moto di Fermi  
il 24% in più

L'energia cinetica  $E_{kA}$  di soglia dei protoni incidenti per la produzione di antiprotoni vale

$$E_{kA} = (5.32 - 0.938) \text{ GeV} = 4.38 \text{ GeV}$$

$$E_A \simeq 5.63 \text{ GeV}, \text{ il } 28.5 \% \text{ in più!}$$