Esercizio (Energia di soglia per produzione di antiprotoni)

Quale energia cinetica minima deve possedere un protone $\boldsymbol{p}$ di un fascio, per produrre un antiprotone $\bar{\boldsymbol{p}}$ urtando un protone di un bersaglio nucleare solidale col sistema del laboratorio ?
Si consideri $\boldsymbol{m_p} = \mathbf{0.9383}\ \mathrm{GeV/c^2}$.

Soluzione:

La conservazione numero barionico richiede che la reazione sia della forma:

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{p} + \overline{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}$$

Alla soglia, l'energia disponibile nel **CM** deve quindi essere

$$\sqrt{\mathrm{s}} = (3m_p + m_{\bar{p}})c^2 = 4m_pc^2 \quad , \quad \mathrm{s} = 16{m^2}_p c^4$$

Per avere produzione a soglia di $\bar{\boldsymbol{p}}$, la **massa invariante** dell'interazione $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}$ deve quindi uguagliare l'energia $\sqrt{\mathrm{s}}$ nel CM.
I **nucleoni** del nucleo non sono però a riposo nel nucleo, ma **soggetti al moto di Fermi** (si ricordi quanto visto sul modello a gas di Fermi !) e posseggono un impulso il cui valor medio del modulo $\boldsymbol{p_F}$ può essere ottenuto approssimativamente dal principio di indeterminazione.

L'incertezza Δx con cui si può conoscere la posizione di ognuno di essi è dell'ordine di $\Delta x \simeq 1\ \mathrm{fm}$, per cui

$$p_F \simeq \hbar/\Delta x = \hbar c/(c\ \Delta x) \simeq 197\ (\mathrm{MeV{\cdot}fm})/(1\ \mathrm{fm}{\cdot}c) \simeq 200\ \mathrm{MeV}/c$$

Detti p_A e p_B ($p_B \equiv p_F$) i **tri-impulsi** rispettivamente del protone proiettile e di quello bersaglio si ha, per le loro energie totali E_A ed E_B

$$E_A^2 = m_p^2c^4 + p_A^2c^2 \qquad \text{ed} \qquad E_B^2 = m_p^2c^4 + p_B^2c^2$$

Il quadrato della massa invariante del canale d'ingresso $p + p$ è allora

$$(\sqrt{s})^2 = (\Sigma\ E_i)^2 - (\Sigma\ \vec{p}_i)^2$$

ovvero

$$s = (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2c^2 = E_A^2 + E_B^2 + 2E_AE_B - (p_Ac)^2 - (p_Bc)^2 - 2\vec{p}_A{\cdot}\vec{p}_B\ c^2$$

Sostituendo si ottiene

$$s = 2m_p^2c^4 + 2\sqrt{(m_p^2c^4 + p_A^2c^2)\ (m_p^2c^4 + p_B^2c^2)} - 2p_A{\cdot}p_Bc^2$$

La massa invariante risulta massima quando $\vec{p}_A$ e $\vec{p}_B$ sono **antiparalleli**, che equivale ad una collisione frontale (disegno), quindi per $\vartheta = \pi$, e $(\vec{p}_A{\cdot}\vec{p}_B) = -\,p_A\,p_B$.

Con ciò

$$s = 2m_p{}^2c^4 + 2\sqrt{m_p{}^4c^8 + m_p{}^2c^4p_Bc^2 + m_p{}^2c^4p_Ac^2 + p_A{}^2p_B{}^2c^4} + 2p_Ap_Bc^2$$

che **a soglia deve coincidere**, come detto, con $16m^2{}_pc^4$.

Uguagliando e quadrando si ha:

$$49\, m^4c^8 - 14m^2p_Ap_Bc^6 + p_A{}^2p_B{}^2 = m^4c^8 + m^2p_B{}^2c^6 + m^2p_A{}^2c^6 + p_A{}^2p_B{}^2c^4$$

Sostituendo i valori per m_p e p_B, ed esprimendo tutto in GeV si ha

$$p_A{}^2 + 2.8\, p_A - 42.18 = 0 \quad \rightarrow \quad p_A = 5.24\ \mathrm{GeV}/c$$

$p_A \simeq 6.50$ GeV/c

senza moto di Fermi il 24% in più

L'energia totale è quindi data da

$$E_A = \sqrt{m_p{}^2c^4 + p_A{}^2c^2} = 5.32\ \mathrm{GeV}$$

$E_A \simeq 6.57$ GeV

, ed essendo anche $E_A = m_pc^2 + E_{kA}$

L'energia cinetica E_{kA} di soglia dei protoni incidenti per la produzione di antiprotoni vale

$$E_{kA} = (5.32 - 0.938)\ \mathrm{GeV} = 4.38\ \mathrm{GeV}$$

$E_A \simeq 5.63$ GeV , il 28.5 % in più!