INTRODUZIONE ALLA FISICA NUCLEARE E SUBNUCLEARE

Lezione 2

Cinematica Relativistica II

03/03/2023

VIERI CANDELISE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

LEZIONE 2

CINEMATICA RELATIVISTICA II

1

APPLICAZIONI: DECADIMENTO IN 2 CORPI

03/03/23

$$a \longrightarrow b + c$$

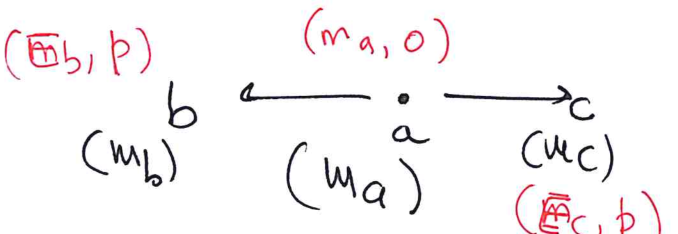
In generale, per i decadimenti, deve essere soddisfatta la soglia cinematica minima per conservare l'energia:

$$* \quad m_a \to m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N \Rightarrow m_a \geq \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Consideriamo una particella ferma, nel sistema del CM le figlie saranno back-to-back:

$\sqrt{s} = m_a$

$s = m_a^2$



$$|\vec{P}_a| = 0$$

$$|\vec{P}_b| = |\vec{P}_c| = \vec{p}.$$

unica incognita

$$m_a = E_b + E_c = \sqrt{s}$$

$$m_a = \sqrt{|\vec{P}_b|^2 + m_b^2} + \sqrt{|\vec{P}_c|^2 + m_c^2} = \sqrt{p^2 + m_b^2} + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_c^2}$$

$$\left(m_a - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2}\right)^2 = |\vec{p}|^2 + m_c^2 \to m_a^2 + m_b^2 + \cancel{|\vec{p}|^2} - 2m_a\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2} =$$

$$= \cancel{|\vec{p}|^2} + m_c^2 \longrightarrow (m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)^2 = \left(2m_a\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2}\right)^2$$

isolo p:

$$m_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + 2m_a^2(m_b^2 - m_c^2) = \left(2m_a\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2}\right)^2$$

$$m_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + 2m_a^2(m_b^2 - m_c^2) = 4m_a^2(|\vec{p}|^2 + m_b^2)$$

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2m_a}\sqrt{\left[m_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 - 2m_a^2(m_b^2 + m_c^2)\right]}$$

Adesso uso p per calcolare E_b ed E_c →

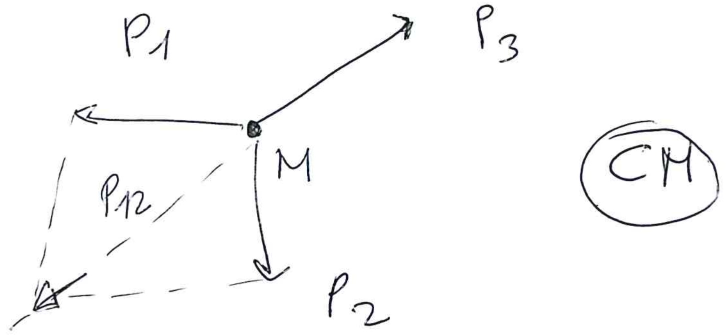
$$\begin{cases} E_b^2 = |\vec{p}|^2 + m_b^2 \\ E_a^2 = |\vec{p}|^2 + m_c^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_b = \dfrac{m_a^2 + (m_b^2 - m_c^2)}{2m_a} = \dfrac{s - (m_b^2 - m_c^2)}{2\cancel{m_a}\sqrt{s}} \\ E_c = \dfrac{m_a^2 - (m_b^2 - m_c^2)}{2m_a} = \dfrac{s - (m_b^2 - m_c^2)}{2\cancel{m_a}\sqrt{s}} \end{cases}$$

- osserviamo che nel CM il decadimento in due corpi e' mono-energetico e back-to-back. Fissato s, il decadimento dipende solo dalle masse.

- Se a fosse in volo (LAB) avrei una situazione diversa perché LAB ≠ CM e dovrei fare le trasf. Lorentz.

DECADIMENTO IN TRE CORPI

$M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$



in questo caso, lo spettro in impulso non e' del tutto determinato dalla conservazione del 4-impulso

"spazio delle fasi" ⊛

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \\ E_1 + E_2 + E_3 = M \end{cases}$$

$n_{eq} < n_{inc}$

∞ soluzioni

posso imporre limiti cinematici per le variabili in gioco.

usiamo il trucco di scomporre il decadimento

$$M \to (m_{12}) + m_3$$

m_{12} = massa invariante di 1-2

4impulso

$$P_{12} = P_1 + P_2 = (E_1+E_2,\ \vec{p}_1+\vec{p}_2) \neq \cancel{\sqrt{M_{12}^2}} \quad \Big| \quad M_{12}^2 = (E_1+E_2)^2 - (\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2$$

$$(M - E_3)^2 - p_3^2$$

usando

$$(*)\quad M_{12}^2 = (M-E_3)^2 - \vec{p}_3^{\,2} = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \qquad \left(\text{dal dec. in 2 corpi}\right)$$

$$\vec{p}_3^{\,2} = E_3^2 - M_3^2$$

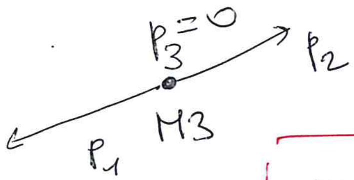
segue

$$E_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - M_{12}^2}{2M}$$

varia M_{12} con E_3

Quali sono gli estremi per E_3? (Il calcolo vale per qualunque permutazione delle 3 particelle).

① E_3 minimo



- 3 è ferma, a riposo. $\boxed{E_3^{min} = m_3,\ \vec{p}_3^{\,min} = 0}$

$M_{12} = M - m_3$. $\quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$

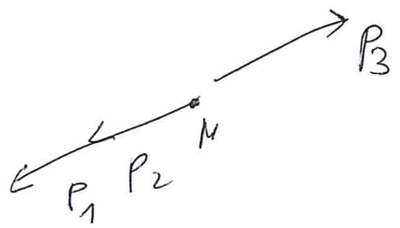
- $E_1 + E_2 = (M - m_3)$ da cui

$$|p|^2 = \frac{[(M-m_3)^2 - (m_1+m_2)^2]\cdot[(M-m_3)^2 - (m_1-m_2)^2]}{4(M-m_3)^2}$$

$(M - m_3) \to m_1 + m_2$

due corpi

② E_3 ~~minimo~~ massimo



- $E_3^{max} \to \underline{M_{12}}^{minima} \Rightarrow M_{12}^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$

~~Massa minima per M_{12}~~

$$M_{12}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\overbrace{\underbrace{\left(E_1 E_2 - \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2\right)}}^{m_1 m_2}$$

≥ 0 e vale $m_1 m_2$ al minimo di M_{12}

segue $M_{12}^2 \geq (m_1 + m_2)^2$ con l'= quando

MINIMO:

$$\boxed{\frac{P_1}{E_1} = \frac{P_2}{E_2}}$$

ovvero $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ (1 e 2 stessa direzione e velocità).

infatti sostituendo nelle parentesi,

usando $(P = \beta E \; ; \; E = m\gamma)$

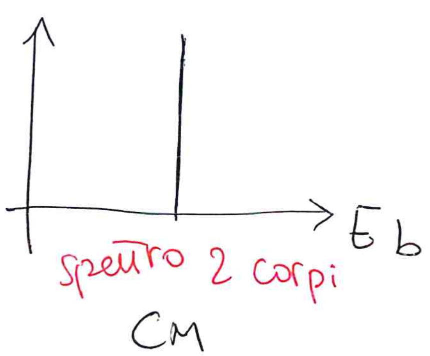
$$(E_1 E_2 - \vec{P}_1 \vec{P}_2) = E_1 E_2 - \beta E_1 - \beta_2 E_2 = E_1 E_2 (1 - \beta^2) =$$

$$= m_1 \gamma \, m_2 \gamma \cdot \frac{1}{\gamma^2} = m_1 m_2 \quad \text{con } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

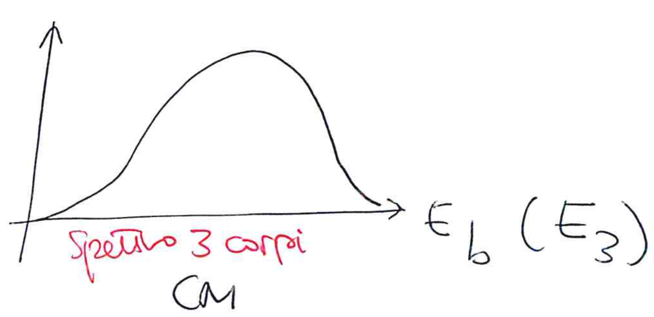
avremo quindi

$$E_3^{max} = \frac{M^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M}$$

$a \to b + c$



$a \to b + c + d$



UN CASO PARTICOLARE

$\pi^0 \to \gamma\gamma$

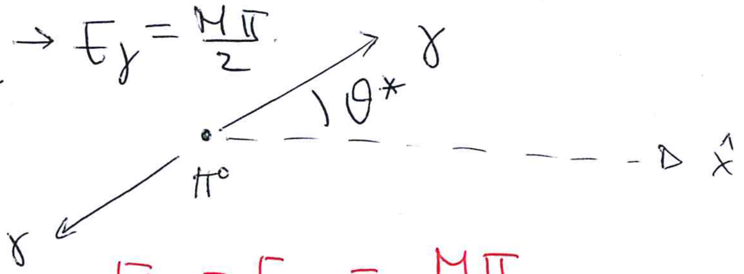
Il pione neutro, della famiglia dei pioni (π^+, π^-, π^0) è una particella che studieremo nelle prossime lezioni, ha una massa intermedia tra quella dell'elettrone e quella del protone, $M_{\pi^0} \sim 140$ MeV e per questo venne classificata come "mesone" (dal greco mesos, (intermedio)). Ha spin $= 0$ quindi è un bosone. Studiamo il suo unico decadimento: $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

CM

$$M_\gamma = 0 \to E_\gamma = P_\gamma$$

$$\theta_2^* = \pi - \theta_1^*$$

$$M_\pi = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \to E_\gamma = \frac{M_\pi}{2}$$



$$\beta_\pi = \beta_{CM} = \frac{P_\pi^{LAB}}{E_\pi^{LAB}}$$

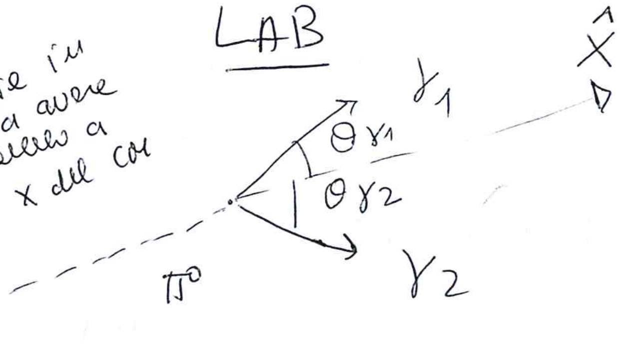
$$\gamma_\pi = \gamma_{CM} = \frac{E_\pi^{LAB}}{M_\pi^{\cancel{LAB}}}$$

$$E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} = \frac{M_\pi}{2}$$

π^0 in volo nel LAB.

LAB

NB: ruotare in modo da avere x parallelo a x del CM



$$P_{\pi^0} = P_0$$

$$\alpha = \theta_{\gamma_1} + \theta_{\gamma_2}$$

- $P_{\gamma_1} = (E_{\gamma_1}, \vec{P}_{\gamma_1})$
- $P_{\gamma_2} = (E_{\gamma_2}, \vec{P}_{\gamma_2})$

$$\begin{cases} E_{\gamma_1}^2 = \vec{P}_{1\gamma}^2 + M_\gamma^2 = \vec{P}_{1\gamma}^2 \\ E_{\gamma_2}^2 = \vec{P}_{\gamma_2}^2 . \end{cases}$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{(P_{\gamma_1} + P_{\gamma_2})^2} = \sqrt{(E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2})^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2} =$$

$$= \sqrt{\cancel{E_{\gamma_1}^2 - \vec{P}_{\gamma_1}^2} + \cancel{E_{\gamma_2}^2 - \vec{P}_{\gamma_2}^2} + 2(E_1 E_2 - \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2)} = \sqrt{2E_1E_2(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2E_1E_2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2E_1E_2\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{4E_1E_2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Calcoliamo le energie $E_{\gamma_1}, E_{\gamma_2}$ nel LAB conoscendo $E^*_{\gamma_1}$ ed $E^*_{\gamma_2}$ nel CM, pari a $M_\pi/2$, eseguendo un boost lungo x; nella direzione del moto del π^0 nel LAB:

$$\begin{cases} E_{\gamma_1} = \gamma_{CM}(E^*_{\gamma_1} + \beta_{CM} P^*_{\gamma_1 x}) = \gamma_{CM}(E^*_{\gamma_1} + \beta_{CM} P^*_{\gamma}\cos\theta^*) \\ E_{\gamma_2} = \gamma_{CM}(E^*_{\gamma_2} + \beta_{CM} P^*_{\gamma}\cos\theta^* \end{cases}$$

Sostituisco

$$\beta_{CM} = \left.\frac{P_\pi}{E_\pi}\right|_{LAB}, \quad \gamma_{CM} = \left.\frac{E_\pi}{M_\pi}\right|_{LAB}, \quad E^*_{\gamma_{1,2}} = \frac{M_\pi}{2}, \quad P^*_\gamma = E^*_\gamma :$$

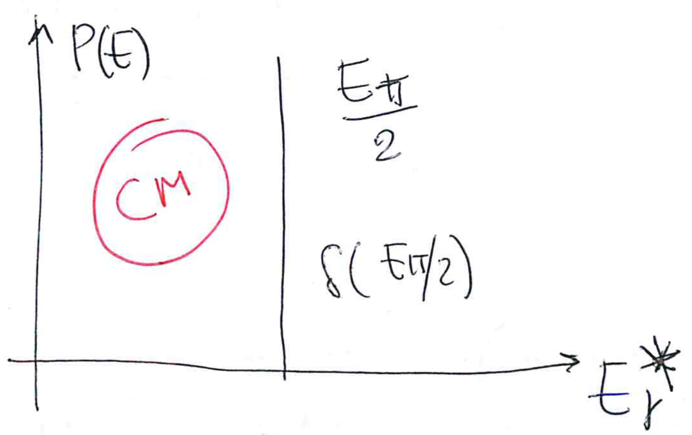
$$E_{\gamma_1} = \frac{E_\pi}{\cancel{M_\pi}}\left(\frac{\cancel{M_\pi}}{2} + \frac{P_\pi}{\cancel{E_\pi}}\frac{\cancel{M_\pi}}{2}\cos\theta^*\right) = \frac{E_\pi + P_\pi\cos\theta^*}{2}$$

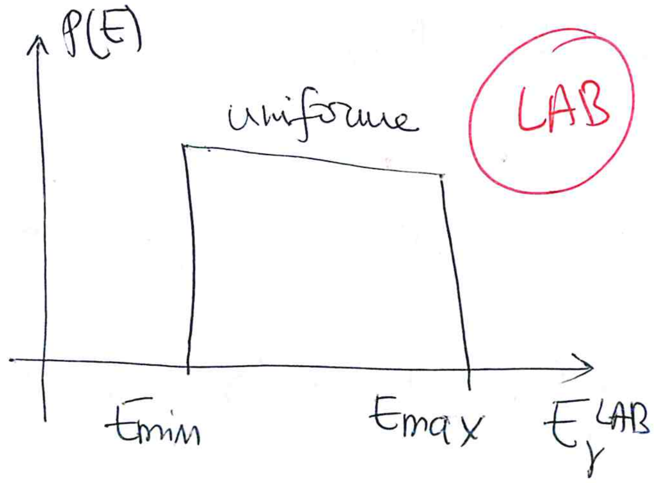
$$E_{\gamma_2} \quad \frac{E_\pi - P_\pi\cos\theta^*}{2}$$, avendo fatto $\theta^* \to \pi + \theta^*$ nel CM.

L'energia dei due fotoni nel LAB varierà tra

$$E_{min} = \frac{1}{2}\left(E_0 + p_0 \underbrace{\cos(0)}_{1}\right) = \frac{1}{2}E_0(1+\beta) \quad e$$

$$E_{max} = \frac{1}{2}E_0(1-\beta) \quad \text{per } \theta^* = \pi$$





Qual è l'angolo minimo α nel LAB?

$$\sqrt{s} = \sqrt{2E_1E_2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{4E_1E_2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = M_{\pi^0}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{M_\pi}{2\sqrt{E_1E_2}}$$ per trovare α minimo differenzio rispetto a E_1E_2:

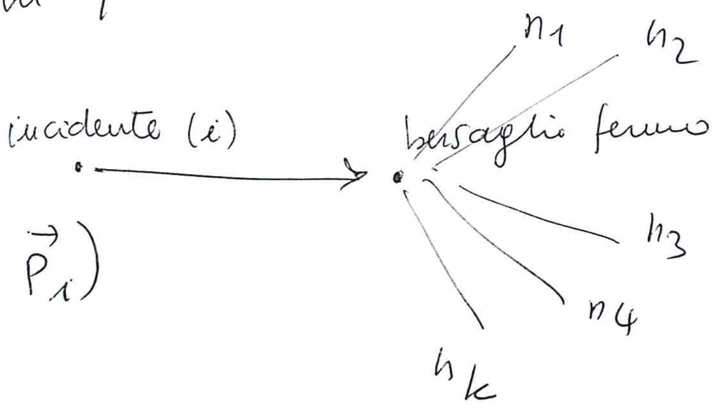
$$\frac{\partial(E_1E_2)}{\partial E_1} = \frac{\partial(E_1\cdot(E_0-E_1))}{\partial E_1} = E_0 - 2E_1 = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{E_0}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha_{min}}{2} = \frac{m_\pi}{E_\pi} = \frac{1}{\gamma}$$: La configurazione di equipartizione dell'energia fornisce l'angolo minimo fra i due γ.

(si può anche dimostrare che questa è la configurazione più probabile.)

ENERGIA DI SOGLIA

E' l'energia minima necessaria per innescare una reazione, corrisponde alla configurazione in cui le particelle sono prodotte in quiete nel CM.



$(P_b = M_b, \vec{0})$

$P_i = (E_i, \vec{p}_1)$

Calcolo l'energia iniziale:

$$s_i = (\underbrace{p_i + p_b}_{\text{4 momenti}})^2 = \underbrace{m_i^2}_{(E_i^2 - \vec{p}_i^{\,2})} + m_b^2 + 2E_i m_b = m_i^2 + m_b^2 + 2m_b (k_i + m_i) =$$

$$= m_i^2 + m_b^2 + 2 m_i m_b + 2 m_b k_i = (m_i + m_b)^2 + 2 m_b k_i$$

calcolo l'energia finale

$$s_f = \sum_{f=1}^{n} (\underbrace{k_f}_{\substack{=0 \\ \text{sono ferme} \\ \text{per definizione}}} + m_f) \overset{!}{\equiv} s_i = (m_i + m_b)^2 + 2 m_b \underline{\underline{k_i^S}}$$

soglia

$$\begin{cases} k_i^S = \dfrac{\left(\sum_{f=1}^{n} m_f\right)^2 - (m_i + m_b)^2}{2 m_b} \\[2ex] E_S = k_i^S + m_i \end{cases}$$

quindi $K \geq k^S_i$ affinché si inneschi la reazione.

$E_S = k_i^S + m_i$ = Energia di soglia

nb. K_S è cinetica, E_S è l'energia (totale) di soglia!

$$s^2 + m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2s m_\pi^2 - 2s m_\mu^2 + 2 m_\mu^2 m_\pi^2 - 4p^2 s + \cancel{4p^2 m_\pi^2} + \cancel{4p^2 m_\mu^2} =$$

$$= \cancel{4p^2 m_\pi^2} + \cancel{4p^2 m_\mu^2} + 4 m_\pi^2 m_\mu^2$$

$$4p^2 s = (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 + s^2 - 2s(m_\pi^2 + m_\mu^2)$$

$$p = \frac{\sqrt{s^2 - 2s(m_\pi^2 + m_\mu^2) + (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}}{2\sqrt{s}} = 28 \text{ MeV}.$$

1

$$E_{\pi^0} = \sqrt{m_\pi^2 + p^2} = 138 \text{ MeV} \rightarrow \beta_{\pi^0} = \frac{p}{E_{\pi^0}} = 0.203$$

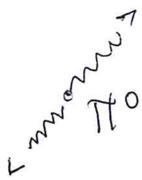
$$v = \beta c \simeq 6 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

2 $$T_\mu = E_\mu - m_\mu = (E_{TOT} - E_{\pi^0} - m_\mu) = 0.42 \text{ MeV}$$

3

$$\ell = v \cdot t \rightarrow (\beta c)\cdot(\gamma \cdot \tau) = v \cdot \frac{E_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} \cdot \tau_{\pi^0} \simeq 6 \text{ nm}.$$

4 Nel CM $E_\gamma^* = |\vec{P}|_\gamma^* = \frac{m_{\pi^0}}{2}$



$= 83 \text{ MeV}$

$$E_\gamma^{LAB} = \gamma_{\pi^0}(E_\gamma^* + \beta_{\pi^0} p^*) = \gamma_{\pi^0}(E_\gamma^* + \beta_{\pi^0} E_\gamma^*) =$$

$$= \gamma_{\pi^0} E_\gamma^* (1 + \beta_{\pi^0}) = \frac{E_{\pi^0}}{m_{\pi^0}} E_\gamma^* (1 + \beta_{\pi^0}) = \frac{E_{\pi^0}}{\cancel{m_{\pi^0}}} \cdot \frac{\cancel{m_{\pi^0}}}{2} (1 + \beta_\pi).$$

ESERCIZIO 1 $\quad m_\pi = 139\ MeV,\ m_p = 938\ MeV,\ m_n = 939\ MeV.$ $\quad$ 9

$\underline{c=1}$

fascio di π^- rallentato in idrogeno liquido fermo:

$\tau_{\pi^0} = 10^{-16} s$

$$\pi^- p \rightarrow \pi^0 n \qquad \text{(charge-exchange)}$$

1) v_{π^0} $\quad$ 2) T_n $\quad$ 3) $\ell_{\pi^0}^{LAB}$ $\quad$ 4) $E_{max}^{\gamma, LAB} (\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$.

---

1)

π^- e p interagiscono fermi quindi $\boxed{\sqrt{s} = E^*_{tot} = m_\pi + m_p}$

$\sqrt{s} = 1077.9$ GeV. Se sono fermi $\vec{p}_{\pi^-} = \vec{p}_p = 0 \rightarrow \vec{p}_{\pi^0} = \vec{p}_n = \vec{p}$

$\vec{p}$ e' incognito e da lui calcolerò $\beta_{\pi^0} = p / E_{\pi^0}$.

Dalla conservazione dell'energia

$$E^*_{TOT} = \sqrt{s} = E_{\pi^0} + E_n = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2_{\pi^0}} + \sqrt{m_n^2 + |\vec{p}|^2} \quad \text{da cui}$$

$$s = |\vec{p}|^2 + m^2_{\pi^0} + |\vec{p}|^2 + m_n^2 + 2\sqrt{(|\vec{p}|^2 + m^2_{\pi^0})(|\vec{p}|^2 + m_n^2)} \quad \left(\begin{matrix}\text{da ora} \\ |\vec{p}| \equiv p\end{matrix}\right)$$

$$\underbrace{(s - m^2_{\pi^0} - m_n^2)} - \underbrace{2p^2} = 2\sqrt{(p^2 + m^2_{\pi^0})(p^2 + m_n^2)} \quad \text{quadro:}$$

$$(s - m^2_{\pi^0} - m_n^2)^2 + \cancel{4p^4} - 4p^2(s - m^2_{\pi^0} - m_n^2) = 4(\cancel{p^4}) + 4p^2($$
$$(m^2_{\pi^0} + m_n^2) + 4 m^2_{\pi^0} m_n^2$$

$$s^2 + m^4_{\pi^0} + m_n^4 + 2 s m^2_{\pi^0} - 2 s m_n^2 + 2 m^2_{\pi^0} m_n^2 - 4p^2 s + 4p^2 m^2_{\pi^0} - 4p^2 m_n^2 =$$
$$= 4p^2 m^2_{\pi} + 4p^2 m_n^2 + 4 m^2_{\pi} m_n^2$$

ESERCIZIO 2 $\quad c = 1$

protoni su bersaglio fisso nucleare (idrogeno).

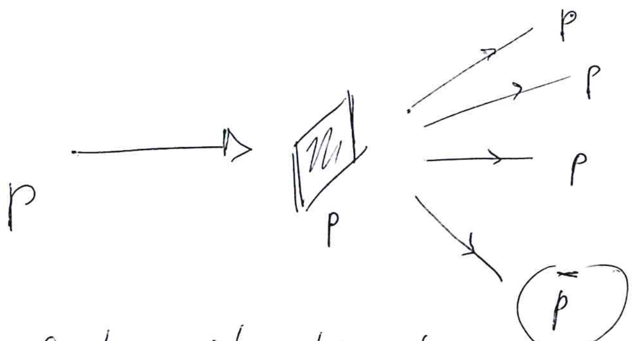
$m_p = 0.938\ \text{GeV}.\quad K_i^{th} = ?$

$$\underset{\text{incidente}}{p} + \underset{\text{fermo}}{p} \to \underbrace{p + p + p + \bar{p}}_{\text{ferme}}$$

$$K_i^{th} = \frac{\left(\sum m_f\right)^2 - (m_i + m_b)^2}{2 m_b}$$

$$K_i^{th} = \frac{(4 m_p)^2 - (2 m_p)^2}{2 m_p} = \left(\frac{16 - 4}{2}\right) m_p = 6 m_p \simeq 5.6\ \text{GeV}.$$

$$E^{th} = K_i^{th} + m_p \simeq (5.6 + 0.938)\ \text{GeV} \simeq 6.53\ \text{GeV}.$$



Vedremo cos'è l'antiprotone nella lezione # 4!

NB

trascurando p_F del protone nel nucleo, come gas Fermi.

$p_F^P \sim 250\ \text{MeV}.$

E^{th} è quindi, in realtà, più bassa.

B Bienta