

INTRODUZIONE ALLA FISICA NUCLEARE E SUBNUCLEARE - PARTE III



Lezione 4

19/04/2024

Antiparticelle e Diagrammi di Feynman

VIERI CANDELISE



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

parte 1
equazione di Dirac

Parte 1: L'equazione di Dirac.

(Disclaimer: una trattazione rigorosa formale della teoria di Dirac è rimandata ai corsi della magistrale).

Il mondo subatomico richiede una trattazione quantistica per descrivere i suoi fenomeni. Come abbiamo visto, per particelle relativistiche occorre usare la Teoria della Relatività Ristretta. Come si conciliano queste due teorie per scrivere l'evoluzione temporale di particelle nel contesto della Relatività? Partiamo da quello che già conosciamo: l'evoluzione temporale è data dall'eq. di Schrödinger

$$E\psi = H\psi$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla; \quad H = \frac{p^2}{2m}.$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

Notiamo che:

- 1) usiamo energia e impulso non relativistica
- 2) spazio e tempo sono separati
- 3) non include lo spin

Proviamo a fare dei tentativi per modificare l'eq. di Schrödinger e renderla compatibile con quanto sappiamo di relatività. Il primo passo è quello di includere l'energia relativistica

$$E \rightarrow \sqrt{p^2 + m^2} \Rightarrow E\psi = \sqrt{p^2 + m^2} \psi$$

usando le unità naturali, ottengo ②

$\sqrt{(-i\nabla)^2 + m^2} \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$. Ancora non va bene. Questa equazione ha spazio e tempo separati e la presenza della radice mi impedisce di includere il campo elettromagnetico in modo lorentz-invariante. Il tentativo immediato sarebbe quello di usare il quadrato $E^2 = p^2 + m^2$:

$$\left[(-i\nabla)^2 + m^2 \right] \psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow (\nabla^2 + m^2) \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Usando l'operatore d'Ambertiano $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$,

$$(\square + m^2) \psi = 0 \quad \text{Equazione di Klein-Gordon}$$

In questa equazione spazio e tempo sono uniti attraverso \square ed è possibile inserire l'elettromagnetismo.

Tuttavia, questa equazione ha ancora dei problemi. Le sue soluzioni includono stati a energia negativa

$$\psi_{\pm} = N e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} - iE_{\pm}t} \quad \text{con } E_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

La presenza di due valori \pm di energia porta alla conseguenza di avere una densità di probabilità negativa, non fisica.

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \partial_t \rho \quad \text{con } \rho = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

sostituendo $i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow E$ si può dimostrare facilmente.

In fine $\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1$ ma d^3r non è lorentz-invariante.

Una soluzione alle difficoltà dell'equazione di Klein-Gordon venne trovata da Dirac nel 1928. La sua idea parte dallo scrivere una Hamiltoniana che sia combinazione di energia e impulso, che abbia le derivate al 1° ordine e che sia compatibile con K-G. ^③

$$H = \alpha_i \cdot P_i + m\beta = \alpha_x P_x + \dots + m\beta$$

con α_i e β da ricavare (matrici). Ottengo

$$E\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (i=1,2,3).$$

Una condizione che deve verificare questa espressione è che si abbia $E^2 = p^2 + m^2$, quindi:

$$\begin{aligned} E^2 &= (\alpha_i P_i + m\beta)^2 = p^2 + m^2 = \text{svolgendo il quadrato:} \\ &= \alpha_i P_i \alpha_j P_j + (\alpha_i P_i m\beta + m\beta \alpha_i P_i) + m^2 \beta^2 = \\ &= \alpha_i P_i \alpha_j P_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m P_i + m^2 \beta^2 = \\ &= \alpha_i \alpha_j P_i P_j + \{ \beta, \alpha_i \} m P_i + m^2 \beta^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\{ \alpha_i, \alpha_j \} + [\alpha_i, \alpha_j] \right) P_i P_j + \{ \beta, \alpha_i \} m P_i + m^2 \beta^2 = \\ &\stackrel{!}{=} p^2 + m^2. \text{ Osserviamo che:} \end{aligned}$$

- $[\alpha_i, \alpha_j] P_i P_j = 0$ (prodotto simmetrico x antisimmetrico).
- $\left. \begin{aligned} &\{ \alpha_i, \alpha_j \} = 2 \delta_{ij} \\ &\{ \beta, \alpha_i \} = 0 \end{aligned} \right\}$ per avere $p^2 + m^2$.
- $\alpha_i^2 \pm \beta^2 = 1$

un set di matrici che soddisfi queste condizioni ④
 e' dato dalle matrici di Pauli estese a 4 dimensioni
 la matrice identita' β :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Per un totale di 4 matrici 4×4 α_i, β .

Ponendo $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \gamma^0 \alpha_i$, con $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$,
 possiamo scrivere in forma compatta (covariante):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\alpha_i \cdot p_i + \beta m) \psi \quad \text{moltiplico per } \beta:$$

$$i \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\beta \alpha_i p_i + \beta^2 m) \psi = (\beta \alpha_i p_i + m) \psi$$

ma siccome $\beta = \gamma^0$ e $\gamma^0 \alpha_i = \gamma^i$, usando $p_i \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$i \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(i \gamma^i \frac{\partial}{\partial x_i} + m \right) \psi \rightarrow i \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi = m \psi$$

usando $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (\partial_0, \partial_i)$ i ottengo

$$(i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi = 0 \quad \text{oppure, } \partial_\mu \gamma^\mu = \not{\partial},$$

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad \text{Equazione di Dirac.}$$

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0$$

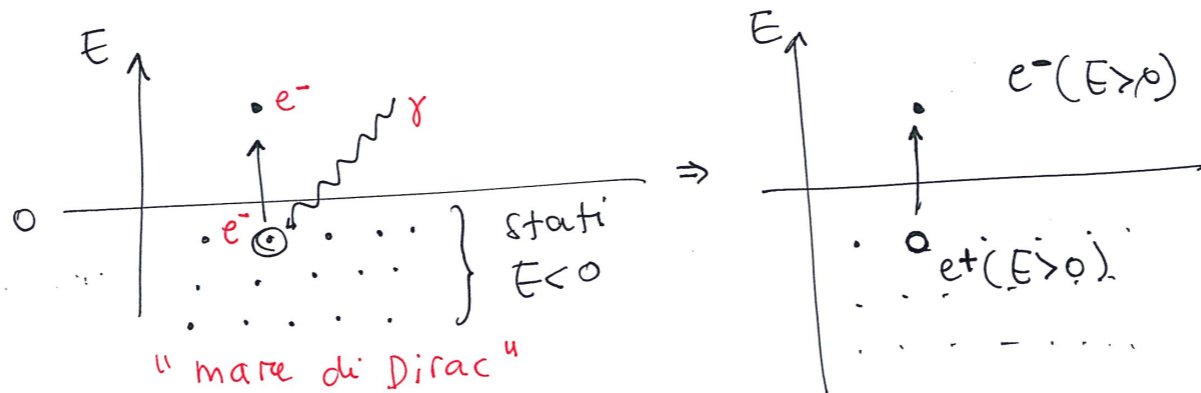
⑤

Proprietà:

$\psi = \text{Spinori } 4D$

- 1) spatio-tempo unificati in $\partial_\mu \gamma^\mu = \not{\partial}$
- 2) soluzioni Dirac = soluzioni Klein-Gordon
- 3) relativisticamente invariante
- 4) densità di probabilità sempre > 0
- 5) grazie a σ_i , soluzioni per $S = \pm 1/2$
- 6) Ho ancora soluzioni a **energia negativa**.

Cosa sono? Dirac intuiva che queste soluzioni sono fisiche e accettabili. Interpretò la loro presenza immaginando che il vuoto quantistico sia popolato intrinsecamente da elettroni di energia negativa. Questi possono, sotto azione di un quanto di energia, essere promossi ad elettroni di carica positiva e con $E > 0$.



un elettrone di carica positiva e' **l'antiparticella** dell'elettrone, ha stessa massa ma carica opposta

(e^-, e^+) L'eq. di Dirac apre al mondo delle antiparticelle e della antimateria

$(p, \bar{p}), (n, \bar{n}) \dots$ **tutti i numeri quantici opposti**

parte 2

**Interazioni e
diagrammi**

Parte 2

(1)

come funziona il mondo di particelle e antiparticelle? Nella fisica classica, il campo si sente istantaneamente su tutte le coniche nello spazio. Nel caso della meccanica quantistica relativistica, il campo viene descritto da un campo di bosoni a massa nulla, ovvero i fotoni. L'interazione elettromagnetica quindi si può pensare come un campo che allo stesso tempo si propaga come una particella in una sorta di dualismo campo-particella. Il fotone sarà il messaggero dell'interazione e.m. nello spazio-tempo, e l'intensità dell'interazione tra le coniche sarà data dalla costante dell'interazione (in questo caso α , cost. di struttura) per una funzione dell'impulso trasferito nel processo tra stato iniziale e finale:

$$f(q) = \text{propagatore}, \quad q = p - p'$$

un esempio di int. elettromagnetica può essere:

$$e^- + p \rightarrow e^- + p \quad \text{oppure} \quad e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

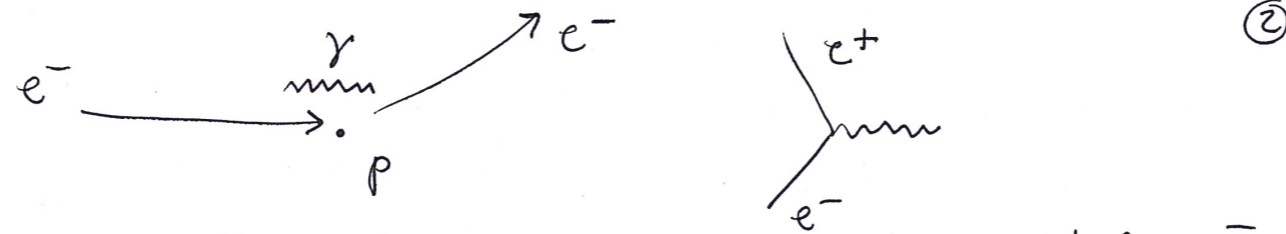
Consideriamo un processo e.m. che parta dallo stato $|i\rangle$ allo stato $|f\rangle$: la probabilità del processo sarà

$$\langle f | H_i | i \rangle = \text{elemento di matrice} = M_{if}$$

dove $H_i = H_0 + V(r)$ (appx. di Born)

$$e \quad V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{potenziale Coulombiano}$$

(in u.m. avremo $\alpha = e^2$)



Il propagatore $f(q)$ sarà proporzionale all'elemento di matrice M_{if} tramite α :

$f(q) \propto |M_{if}|$ usando $V(r)$ puntiforme:
 $(q = p - p')$

$$f(q) = \frac{1}{4\pi} \int e^{-ip'r} V(r) e^{ipr} dr = \frac{1}{4\pi} \int e^{iqr} V(r) dr.$$

Sostituendo $V(r)$ e usando le coordinate sferiche:

$$f(q) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos\theta} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} r^2 dr d\theta d\varphi$$

ponendo $y = \cos\theta$ e integrando in φ :

$$f(q) = -\frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r e^{iqr y} dr dy = \frac{-\alpha}{2iq} \int_0^\infty (e^{-iqr} - e^{iqr}) dr =$$

$$= -\frac{\alpha}{q} \int_0^\infty \sin(qr) dr.$$

questo integrale è non definito a $+\infty$, ma siccome il potenziale $V(r)$ a ∞ viene schermato dalle cariche prima che $r \rightarrow \infty$ posso porlo a 0.

$$f(q) \approx -\frac{\alpha}{q^2}.$$

Il quadrato del propagatore sarà proporzionale alle norme d'urto del processo \rightarrow

$$\sigma \propto f(\vartheta)^2 = \left(\frac{\alpha}{q^2}\right)^2 \propto |\langle f | M_i | i \rangle|^2 = |M_{if}|^2 \quad (3)$$

la sezione d'urto è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice e rappresenta la probabilità di quel processo.

Sostituendo p - p' trovato da Rutherford ritroviamo la sua sezione d'urto

$$\sigma_{Ruth} = \frac{\alpha^2}{16 p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad \text{dove ritroviamo l'andamento } \frac{\alpha^2}{q^4}$$

La sezione d'urto rappresenta l'area efficace del processo, si misura in barn $1b = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Tipicamente si usano i μb o nb o pb , processi tra i più rari in natura hanno anche $\sim \text{fb}$.

La sezione d'urto sperimentalmente rappresenta la frequenza dei conteggi di un determinato processo, ed è collegata alle probabilità del processo $|M_{if}|^2$ tramite la densità degli stati disponibili per lo stato finale:

$$p = \text{protoni} \quad b = \text{bosaglie} \\ |i\rangle \rightarrow |f\rangle$$

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \rho$$

ρ = spazio delle fasi.

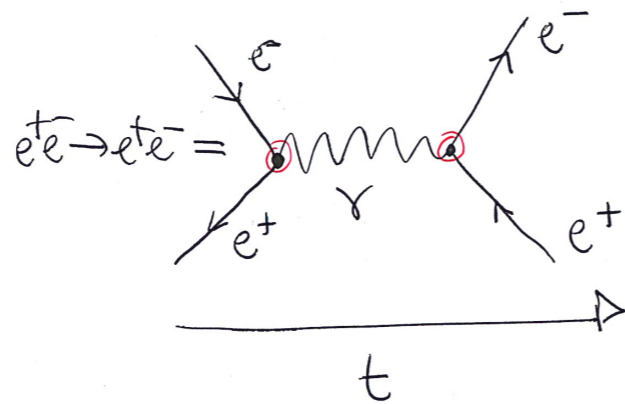
$$\downarrow \text{probabilità per unità di tempo} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N_p} \frac{1}{N_b}$$

sezione d'urto
= probabilità del processo
si misura sperimentalmente dipende dall'intensità e dallo spazio delle fasi.

$$\sigma \propto |M_{if}|^2$$

Questo modo di trattare le interazioni fondamentali si applica a tutte le interazioni facendo conto delle loro costanti o delle loro costanti di accoppiamento. Un metodo grafico per descrivere le interazioni fra particelle è dato dai Diagrammi di Feynman (4)

Prendiamo $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$. È una int. e.m. quindi mediata dal fotone.

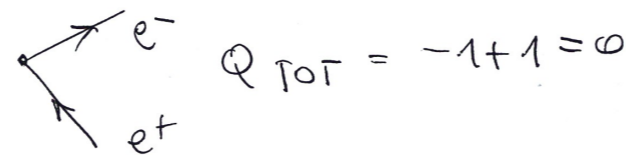
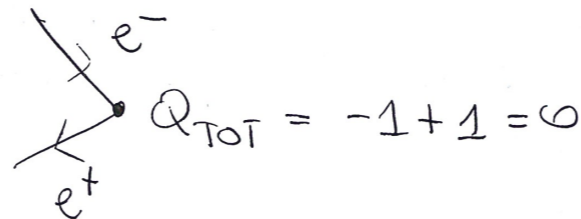


$\text{wavy line} = f(q) \sim 1/q^2$
propagatore

$\odot = \text{vertice} \propto \sqrt{\alpha}$

$\rightarrow \leftarrow = \text{linee fermioniche}$

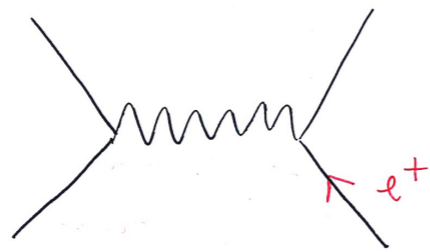
- In ogni vertice si devono conservare i numeri quantici



- freccia del tempo

freccia uscente = antiparticelle entrante
freccia entrante = particelle entrante

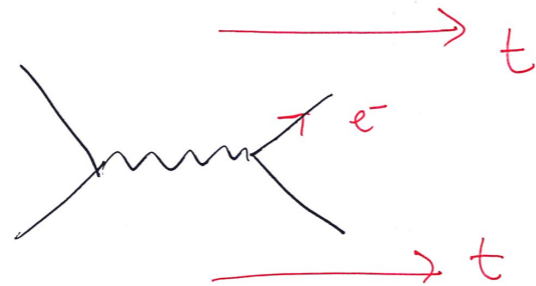
rispetto alla freccia del tempo \rightarrow



$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$$

⑤

entra \Rightarrow antiparticelle esce



esce \Rightarrow particelle esce

Propagatore

la particelle messaggere dell'interazione è espressa dal calcolo di $f(q)$. Non c'è una particella osservabile ma ha il ruolo di trasmettere il messaggio dell'INT. tra le cariche. Queste particelle sono dette **virtuali** e sono vincolate a vivere in un tempo $t \leq \frac{\hbar}{E_x}$ per cui possono esistere anche sopra la loro E_x massa propria, e contribuiscono al calcolo di $f(q)$ e quindi di M_{if} ovvero alle probabilità del processo, anche se non sono direttamente osservabili.

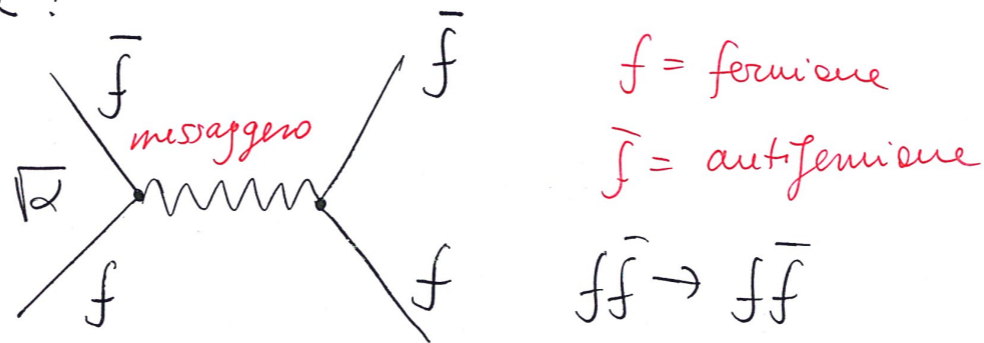
I diagrammi di Feynman forniscono un metodo di calcolo avanzato che ci restituisce alle fine le probabilità del processo stesso in teoria dei campi.

$$P(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) \propto \left| \sum_{et} \langle e^+e^- | M_{if} | e^+e^- \rangle \right|^2 \propto \sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-).$$

Quante di queste interazioni fondamentali esistono e che intensità relativa hanno? (6)

Interazione	mediatore	intensità	costante
FORTE	???	1	α_s
EM	fotone	1/137	α_{em}
DEBOLE	???	10^{-7}	α_w
GRAV.	???	10^{-42}	G

In generale:



$\frac{\alpha_s}{\alpha_{em}} \approx 10^2$; G rende la gravità non trattabile in questo schema.

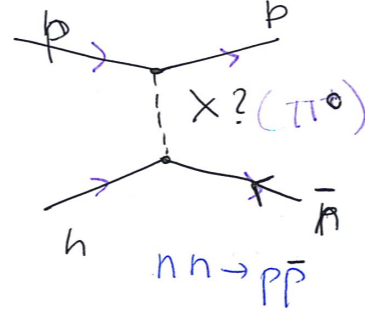
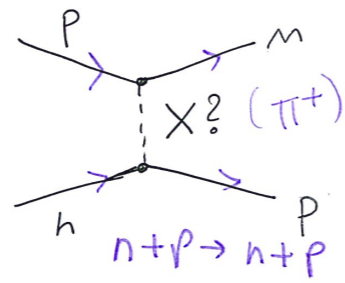
Le possibilità per stato iniziale e finale sono determinate sulle basi delle conservazioni dei numeri quantici delle particelle coinvolte.

L'ipotesi di Yukawa

↳ Nobel 1949

(7)

Possiamo formulare anche una teoria delle interazioni forti sulla base del formalismo dell'elettrodinamica appena studiato: fermioni (questa volta neutroni e protoni invece che elettroni) e scambio di una particella intermedia.



Il range di queste interazioni è $\sim \Delta x = 1 \text{ fm}$.

$n n \rightarrow p \bar{p} (\pi^0)$

Seguendo lo stesso ragionamento fatto per le particelle virtuali intermedie; usando il principio di Indeterminazione:

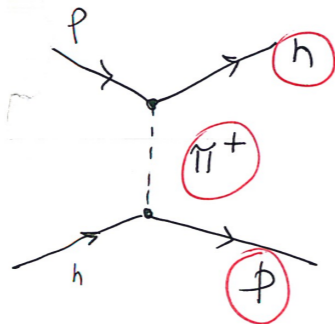
$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta x \Delta E \sim \hbar c$$

ottergo $M \sim \frac{\hbar c}{R} \approx 140 \text{ MeV}$.

range $\equiv R$ massa della particella intermedia $X \equiv M_X$

Chiamo queste particelle di massa intermedia "mesoni" (dal greco "μεσος"). I mesoni responsabili dei diagrammi sopra furono battezzati da Yukawa "pioni" (mesoni- π).

3 Pioni : (π^\pm, π^0) • $M_\pi \approx 140 \text{ MeV}$ ($\mu\epsilon\sigma\sigma$)
• $S=0$



Nucleoni (n, p) = sorgenti Int. forte

Pioni (π^0, π^\pm) = messaggeri Int. forte

[⊗ PROSSIMA LEZIONE : Scoperta sperimentale dei pioni]

Le persone hanno chiesto anche :

- Qual'è l'equazione dell'amore? ▾
- Come si leggono i simboli dell'equazione di Dirac? ▾
- Come funziona l'entanglement? ▾
- Quando due universi si incontrano?

Equazione di Dirac <

L'equazione di Dirac è l'equazione d'onda che descrive in modo relativisticamente invariante il moto dei fermioni. [Wikipedia](#)

 [wikipedia.org](https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Dirac)
https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Dirac

Equazione di Dirac - Wikipedia

L'equazione di Dirac descrive le particelle mediante uno spinore composto da quattro funzioni d'onda (spinore di Dirac), naturale estensione dello spinore a ...

[Mare di Dirac](#) · [Equazione di Klein-Gordon](#) · [Spinore](#)



 sciencecue.it
<https://sciencecue.it/equazione-dirac-entanglement-q...>

L'equazione di Dirac, il simbolo degli inguaribili romantici

22 nov 2020 — Da un punto di vista squisitamente matematico, l'equazione di Dirac è un'equazione differenziale alle derivate parziali, con incognita la ...

[L'equazione di Dirac come...](#) · [La teoria della relatività...](#) · [L'equazione di Dirac](#)



 [ildigitale.it](https://www.ildigitale.it)
<https://www.ildigitale.it/Green>

Equazione di Dirac: è davvero la formula dell'amore?

27 mar 2021 — Da un punto di vista strettamente matematico, l'equazione di Dirac è un'equazione differenziale alle derivate parziali, la cui incognita (x) è ...

