CARAMELLE di Forcone (ψ)

Dolci pezzettini di funzione d'onda

Dimostrazione: le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo

Pubblicato il 28 Agosto 2017 da CARAM-L

Le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz, ma non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Questo è uno dei motivi che portò allo sviluppo della relatività ristretta. Vediamo qui una dimostrazione di questo fatto.

Le trasformazioni di Galileo sono:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

dove (t, x, y, z) sono le coordinate di un sistema di riferimento S e (t', x', y', z') sono le coordinate di un sistema di riferimento S' che si sposta con velocità v lungo l'asse x di S.

Notiamo inoltre che le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

si riducono alle trasformazioni di Galileo nel limite $c \to \infty$.

Come trasformano il campo elettrico e il campo magnetico soggetti ad una trasformazione di Galileo? Come ci informa Wikipedia, soggetti ad una trasformazione di Lorentz i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ trasformano secondo la legge:

$$\begin{cases} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) & B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}$$

Quindi portando $c \to \infty$ otteniamo la trasformazione dei campi secondo Galileo:

$$\begin{cases} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = E_y - vB_z & B'_y = B_y \\ E'_z = E_z + vB_y & B'_z = B_z \end{cases}$$

Ora, se le equazioni di Maxwell fossero invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ che soddisfano le equazioni di Maxwell in S, allora $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{B}'$ dovrebbero soddisfare le equazioni di Maxwell in S'. Questo deve valere per ogni soluzione $\mathbf{E}, \mathbf{B}$, per cui basta trovarne una per cui non vale e abbiamo dimostrato la non invarianza.

Prendiamo come soluzione quella di un'onda elettromagnetica nel vuoto lungo x in S:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(x - ct) \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(x - ct)$$

Perché questi campi soddisfino le equazioni di Maxwell in S dobbiamo imporre delle condizioni sui vettori $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$.

In particolare, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implicano che $E_{0x} = B_{0x} = 0$. Poi le altre due equazioni $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ e $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ impongono le ultime due condizioni $E_{0y} = cB_{0z}$ e $E_{0z} = -cB_{0y}$. Per semplicità scegliamo $B_{0y} = 0$ e chiamiamo $B_{0z} = B$, quindi i campi in S sono in definitiva:

$$\mathbf{E} = (0, cB, 0)\cos(x - ct) \qquad \mathbf{B} = (0, 0, B)\cos(x - ct)$$

Ora prendiamo S' con velocità $v = c$ rispetto a S. In base alla formula che abbiamo derivato per le trasformazioni di Galileo, i campi in S' sono:

$$\begin{cases} E'_x = E_x = 0 & B'_x = B_x = 0 \\ E'_y = E_y - cB_z = 0 & B'_y = B_y = 0 \\ E'_z = E_z + cB_y = 0 & B'_z = B_z = B\cos(x - ct) = B\cos(x') \end{cases}$$

Le equazioni di Maxwell in S' sono:

$$\begin{cases} \nabla' \cdot \mathbf{E}' = 0 \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial B'}{\partial t'} \\ \nabla' \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E'}{\partial t'} \end{cases}$$

dove $\nabla' = (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'})$, ovvero le derivazioni si fanno secondo le coordinate in S'.

La prima e la terza equazione sono soddisfatte automaticamente. Invece la seconda e la quarta sono soddisfatte solo se $B = 0$. Quindi in particolare abbiamo dimostrato che per $B \neq 0$ i campi in questione sono soluzione in S ma non in S'.

Ovvero: esistono soluzioni delle equazioni di Maxwell in S che trasformate in S' non sono soluzioni delle equazioni di Maxwell in S'. Possiamo concludere che le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Questo non accadrebbe invece adoperando le trasformazioni di Lorentz: trasformando i campi da S in S', se essi sono soluzione in S, allora lo saranno anche in S'.

Questa voce è stata pubblicata in elettromagnetismo. Contrassegna il permalink.