Luciano Maiani:

. Lezione Fermi 8

Simmetrie delle particelle. Tre Quark per la materia subnucleare

1. Gruppi e simmetrie in cinque figure chiave
2. Teoria dei gruppi ‘in a nutshell”
3. Simmetrie in fisica delle particelle, anni’60
4. Eightfold Way
5. Particelle e ricette di cucina
6. “Three quarks for Master Mark!”
7. Un nuovo paradigma e nuovi problemi

1. Gruppi e simmetrie in cinque figure chiave

- Evariste Galois (1811-1832). Matematico francese, morto tragicamente a 20 anni per le conseguenze di un duello di cui non si conoscono con precisione i motivi ne' l'identita' dell'altro duellante. La notte prima del duello scrive a August Chevalier una lettera in cui pone le fondamenta della "teoria dei gruppi".
- Sophus Lie (1842-1899). Matematico Norvegese, indentifica le trasformazioni infinitesime, le "Algebre di Lie", che generano le trasformazioni dei "gruppi continui" (ad esempio il gruppo delle rotazioni dello spazio euclideo).
- Elie Cartan (1869-1951). Matematico francese. Ottiene la classificazione di tutte le algebre di Lie semplici (non decomponibili in algebre tra loro indipendenti) in quattro sequenze principali e cinque algebre eccezionali.
- Herman Weyl (1885-1955). Fisico Matematico tedesco. Introduce la Teoria dei Gruppi nella Meccanica Quantistica, mostrando come derivare numerosi proprieta' degli spettri atomici dalla simmetria per le rotazioni spaziali (autore di un libro famoso: Teoria dei Gruppi e Meccanica Quantistica).
- Eugene Wigner (1902-1995). Fisico Teorico ungherese. Si deve a lui la rappresentazione quanto-meccanica delle trasformazioni di Lorentz (*I'll be careful*, scrisse in una lettera a P.A.M. Dirac, suo cognato, che gli aveva rappresentato la difficolta' del compito). Ha introdotto il concetto di simmetria nella fisica nucleare, ispirando molti dei lavori sulla simmetria delle particelle.

2. Teoria dei gruppi "in a nutshell"

- gruppo= G= insieme di elementi che si possono moltiplicare tra loro. Indichiamo l'operazione di moltiplicazione con $\otimes$.
- La legge di moltiplicazione deve soddisfare alcune proprieta'
  - a $\otimes$ b e' un elemento del gruppo. Non sempre a $\otimes$ b=b $\otimes$ a. Quando questo avviene per ogni a e b, G si dice "commutativo" o Abeliano (da N. H. Abel, 1802-1829).
  - vale la proprieta' associativa: $(a\otimes b)\otimes c= a\otimes(b\otimes c)=a\otimes b\otimes c$
  - esiste l'identita' E: $a \otimes E=E \otimes a=a$
  - per ogni a esiste l'inverso, a^{-1}, tale che: $a\otimes a^{-1}=E$
- gruppi discreti= un numero finito di elementi
- gruppi continui= gli elementi dipendono da una o piu' variabili continue
- i numeri della forma e^{it} , $0\leq t\leq 2\pi$, formano un gruppo continuo abeliano (prova a dimostrare)
- le rotazioni dello spazio formano un gruppo continuo non commutativo (prova a dimostrare).

rapresentazioni e algebre di Lie

- una *rappresentazione* e' una realizzazione del gruppo attraverso matrici che realizzano l'operazione di moltiplicazione del gruppo stesso: U(a)xU(b)=U(ab)
- se a, b, dipendono con continuita' da certi parametri, e prendiamo a(0,0,...)=E, avremo anche U(a(0))=1 e per parametri infinitesimi possiamo sviluppare U al primo ordine:

$$U(\epsilon, 0, 0, \cdots) = 1 + \epsilon T_1 + \cdots$$

- T si chiama "generatore infinitesimo". Se moltiplichiamo due elementi, troviamo, allo stesso ordine:

$$U(\epsilon, 0, \cdots)U(0, \delta, 0, \cdots) = 1 + \epsilon T_1 + \delta T_2 + \cdots$$

- quindi la combinazione lineara di due generatori e' ancora un generatore: ***(1) i generatori infinitesimi formano uno spazio lineare***
- Possiamo arrivare ad un valore finito, α, del parametro ponendo ε= α/n e applicando n volte la trasformazione infinitesima:

$$U(\alpha, 0, 0, \cdots) = (1 + \frac{\alpha T_1}{n})^n \to e^{\alpha T_1} = 1 + \alpha T_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 T_1^2 + \cdots$$

- la formula ci mostra il termine del secondo ordine in α, che ci sara' utile nella considerazione che segue. Consideriamo il prodotto:

$$U(a)^{-1}U(b)^{-1}U(a)U(b)$$

- con a generato da T_1 e b da T_2, e sviluppiamo fino al secondo ordine. I termini del 1^0 ordine si cancellano e cosi' i termini del 2^0 ordine in $(T_1)^2$ e $(T_2)^2$, sulla base della formula precedente. Restiamo con

$$U(a)^{-1}U(b)^{-1}U(a)U(b) = 1 + \alpha_1\alpha_2(T_1T_2 - T_2T_1) = 1 + \alpha_1\alpha_2\left[T_1, T_2\right]$$

- il risultato dipende dal *commutatore* dei generatori, come deve, perche' se a e b commutano il risultato deve dare 1. Otteniamo cosi' il risultato:
- ***(2) lo spazio dei generatori e' chiuso sotto l'operazione di prendere il commutatore***

- L'insieme dei generatori e' dunque uno spazio lineare, dotato di una legge di moltiplicazione data dal commutatore. Un tale oggetto si chiama un'*algebra*.
- In questo caso, e' l' *algebra di Lie* associata al gruppo da cui siamo partiti
- le algebre di Lie semplici sono quelle in cui non si possono dividere i generatori in gruppi che commmutano tra loro
- dalla costruzione precedente e' chiaro che:
  - ogni realizzazione con matrici che soddisfano alle leggi di commutazione di una data algebra di Lie, genera una rappresentazione del gruppo cui l'algebra di Lie e'associata
- Se scegliamo una base di generatori, T_1, T_2, etc., possiamo esprimere il commutatore di due di essi come combinazione dei generatori della base (la somma sugli indici ripetuti e' sottintesa)

$$[T_i, T_j] = C_{ijk} T_k$$

- le costanti C, antisimmetriche nei primi due indici, si chiamano le costanti di struttura dell'algebra. Con una scelta opportuna della base, si possono otenere delle costanti di struttura completamente antisimmetriche nei tre indici
- Le C devono riassumere le proprieta' dei commutatori, quindi devono soddisfare le relazioni che seguono dalla identita' (valida per i commutatori di tre matrici qualsiasi) nota come Identita' di Jacobi (provate l'identita' con il calcolo esplicito):

$$[T_k, [T_i, T_j]] + [T_j, [T_k, T_i]] + [T_i, [T_j, T_k]] = 0$$

- le soluzioni di queste equazioni per le costanti di struttura sono le algebre semplici trovate da Cartan, tutte e sole! (per maggiori informazioni, cfr. De Franceschi-Maiani nelle Letture Consigliate).

3. Simmetrie in fisica delle particelle, anni ’60

- La classificazione di Cartan:
  - Unitarie Semplici: A_N=SU(N+1), es. SU(2)=spin isotopico;
  - Ortogonali in dimensioni dispari, B_N=O(2N+1), es. O(3)= rotazioni dello spazio a 3 dimensioni;
  - Algebre simplettiche, C_N=Sp(2N) al momento non conosco esempi di applicazioni fisiche;
  - Ortogonali in dimensioni pari, D_N=O(2N), es. O(4) rotazioni dello spazio-tempo di Einstein-Minkowski, 4 dimensioni (anche se O(4)=SU(2)xSU(2) e’ un caso limite).
- I gruppi si distinguono per il “rango” =numero massimo dei generatori che commutano.
- spin isotopico: rango 1 (la carica elettrica, o meglio I_3)
- ma c’e’ anche la stranezza, S
- J. Schwinger pone la questione se esista un gruppo di simmetria che abbia I_3 e S come generatori commutanti, lo chiama simmetria globale
- quindi una simmetria globale dovrebbe essere realizzata in uno dei gruppi di rango 2...che sono molto pochi!
- r=2: SU(3), O(5), O(4), B_2
- ma quale scegliere?

Rappresentazioni=multipletti

- gli elementi di un gruppo possono essere “rappresentati” da matrici n per n che realizzano la operazione di moltiplicazione degli elementi del gruppo:
  - U(a)xU(b)=U(ab)
- il numero n rappresenta gli stati (particelle) indipendenti del multipletto
- le regole per trovare i multipletti dato il gruppo erano anche note negli anni ’60...
- quindi, note le particelle, es. i mesoni, si sarebbe potuto risalire al gruppo
- ma era un po’ come cercare un ago nel pagliaio, anche perche’ non si era (allora) sicuri di quali fossero le particelle da considerare (a differenza di adesso) e non si poteva sapere se non se ne sarebbero scoperte altre....

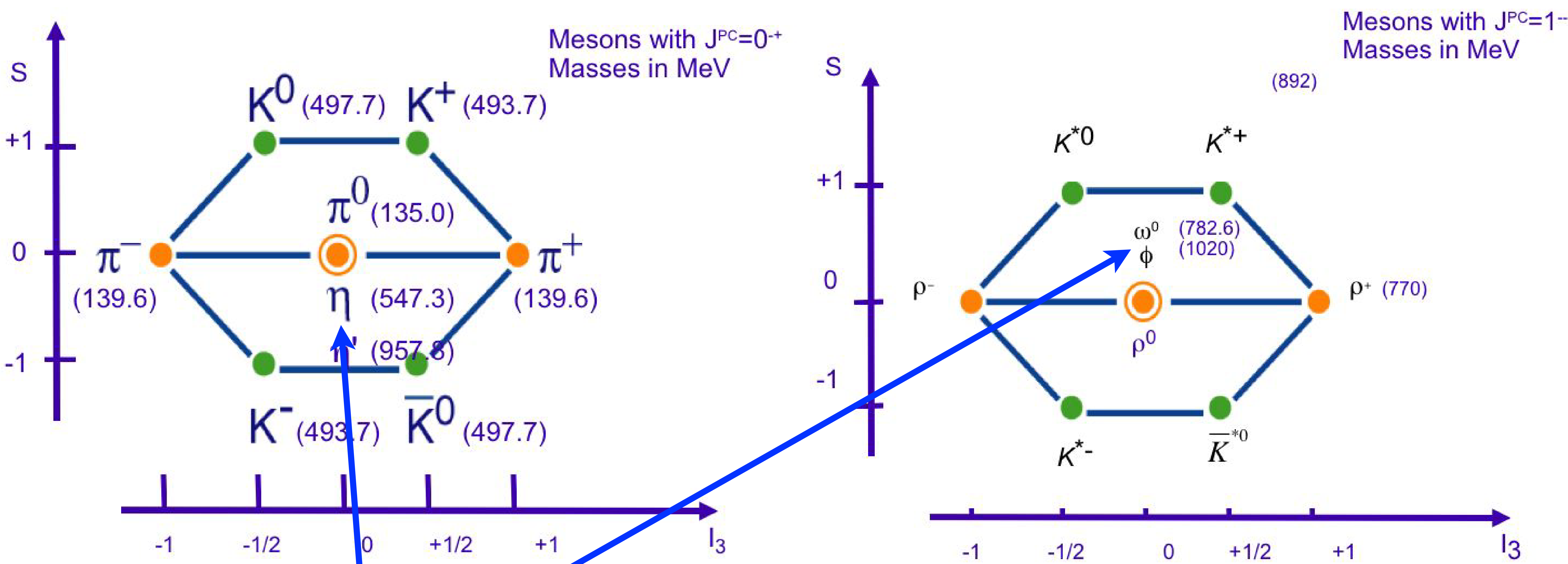
4. The Eightfold Way

- Possiamo immaginare il gruppo di simmetria come un insieme di trasformazioni sui gradi di liberta' fondamentali della nostra teoria
- nel modello di Fermi-Yang, i gradi fondamentali sono i due campi F=(p, n), per questo la simmetria e'SU(2)
- con l'estensione di Sakata, abbiamo S=(p, n, Λ) $\rightarrow$SU(3)
- se scegliamo SU(3) possiamo vedere quali sono i multipletti piu' semplici per mesoni e barioni
- mesoni: ancora Sakata indica un multipletto di dimensione 8,

$$mesons = S\bar{S}$$

  che in effetti esiste in SU(3)
- barioni: Gell-Mann e Ne'eman notano che quelli di spin 1/2 possono essere sistemati in un ottetto come i mesoni (a differenza di quanto avviene per Sakata)
- inoltre in SU(3) c'e' una rappresentazione a 10 dimensioni che (al tempo) poteva sistemare le risonanze barioniche conosciute
- Al diavolo Sakata! G-M&N scelgono la soluzione ottetto anche per i barioni (la ottuplice via) e il decupletto per le risonanze barioniche

Meson patterns



some particles (η, ω, φ) were not established when symmetry was proposed
their confirmation reinforced the picture.
Earliest studies of η were done with the Italian Sincrotrone, just built in Frascati.

Formule di massa

- la teoria dei gruppi fornisce anche dei metodi per controllare i casi in cui c'e' una violazione della simmetria
- negli atomi immersi in un campo magnetico, la simmetria per rotazioni e' "rotta" (c'e' una direzione preferita)
- l'effetto di un campo magnetico sulle righe dello spettro era noto dalla fine dell'Ottocento, col nome di "effetto Zeeman".
- Con metodi elaborati da Weyl e da Wigner, si possono trovare regole che danno la spaziatura dei livelli per l'effetto Zeeman e regole per l'intensita' delle righe.
- Sempre ispirandosi a Fermi-Yang-Sakata, Gell-Mann fece un'ipotesi semplice sulle proprieta' della violazione di simmetria, che dava una struttura matematica di fatto molto simile al campo magnetico dell'effetto Zeeman.
- La spaziatura dei livelli diventava la spaziatura delle masse che, se ci fosse solo la simmetria, sarebbero tutte uguali.
- Per i barioni dell'ottetto, Gell-Mann e, indipendentemente, S. Okubo derivarono una formula (i simboli rappresentano le masse in MeV) ben soddisfatta:

$$N + \Xi = \frac{3\Lambda + \Sigma}{2} \to 2256 \text{ MeV} = 2268 \text{ MeV}$$

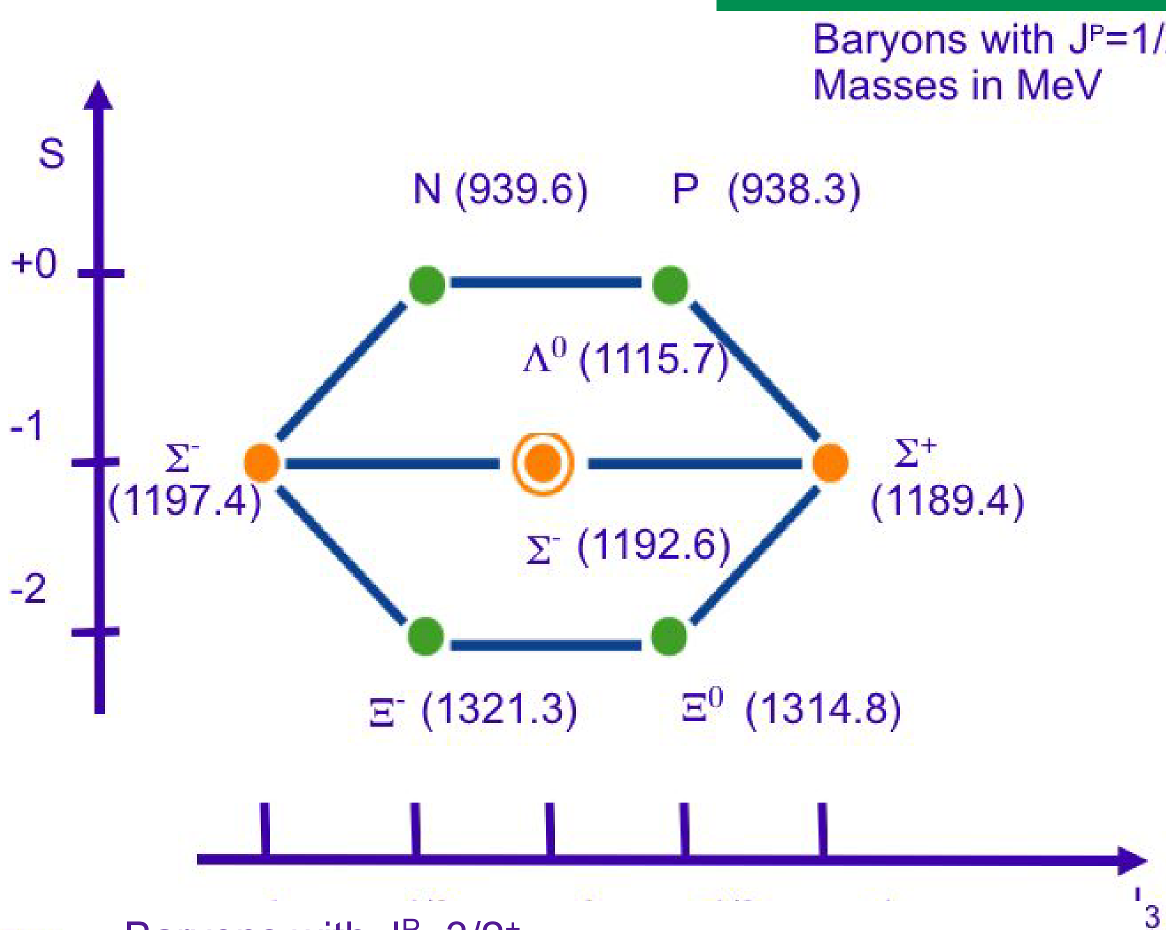
- per il decupletto si prevedevano spaziature uguali tra i multipletti di spin isotopico:

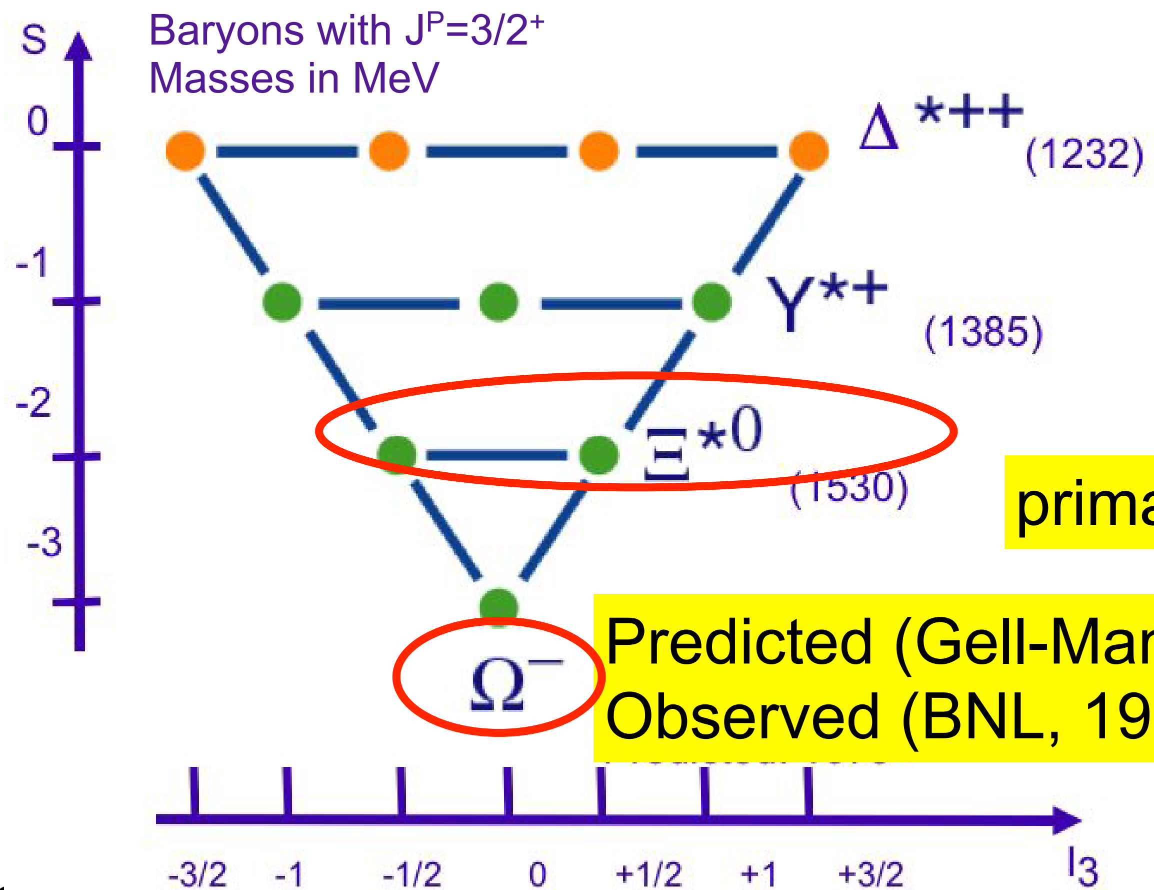
$$Y^* - \Delta = \Xi^* - Y^* = \Omega^- - \Xi^* \approx 140 \text{ MeV}$$

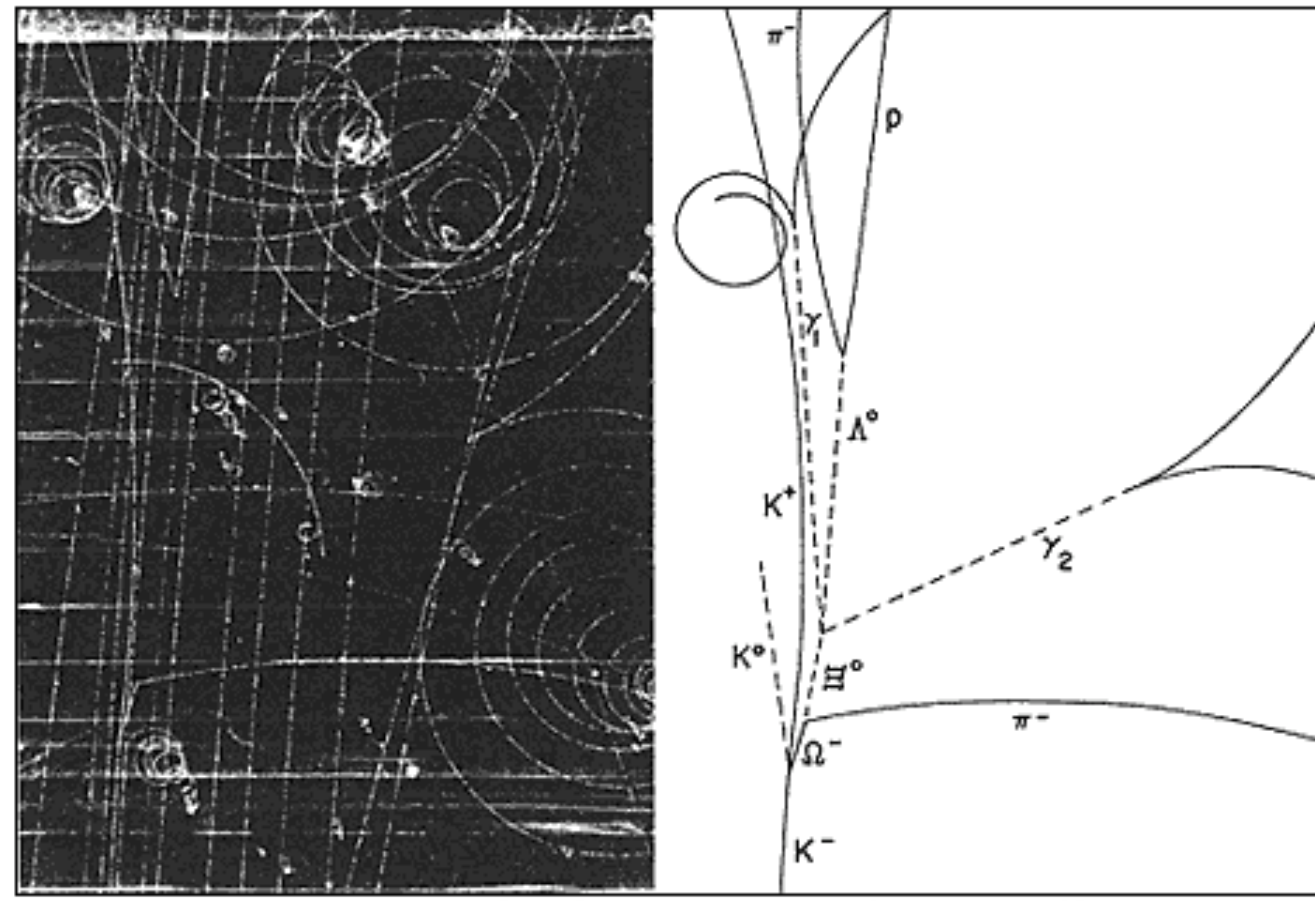
The Eightfold Way (cont'd)

- nel 1962, nel decupletto mancavano due stati di tipo Ξ (S=-2) e uno molto esotico di un nuovo tipo, Ω (S=-3)
- alla conferenza del CERN (1962) fu annunciata l'osservazione di due nuove risonanze di tipo Ξ, con massa intorno a 1530 MeV, che Gell-Mann prontamente indico' come buoni candidati per il decupletto, visto che risultavano in accordo con la spaziatura prevista dalla formula di massa
- si apriva la caccia al barione mancante, per cui la formula di Okubo-Gell-Mann dava una massa di circa 1680 MeV...

The Ω⁻ missing link







The bubble chamber picture of the first Omega-minus (N. Samios and coworkers)

prima conferma

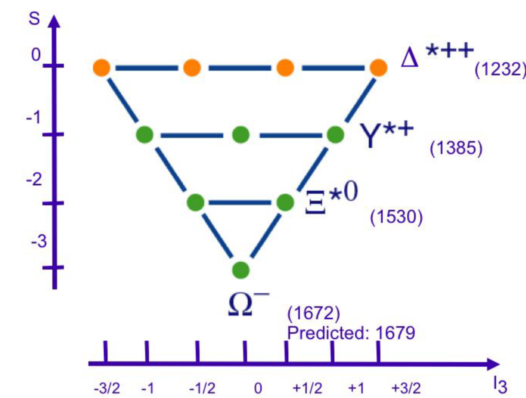
Predicted (Gell-Mann, 1962) M=1679
Observed (BNL, 1964) M= 1672

5. Particelle e ricette di cucina

- Gell-Mann descrive il procedimento mentale per arrivare alla Eightfold Way:
- e' come certe ricette della cucina francese, in cui si cuoce il fagiano mettendolo tra due bistecche . Poi, quando e' cotto, si tiene il fagiano (la simmetria SU(3)) si tiene e si buttano via le bistecche (il modello di Fermi-Yang-Sakata).
- ma...come dovrebbe essere fatta l'unita' di base di SU(3) per riprodurre la struttura di barioni: ottetto+decupletto ?
- Gell-Mann e, indipendentemente, George Zweig, osservano che componendo tre tripletti di base si ottengono solo singoletti, ottetti e decupletti di SU(3)
- i campi del tripletto devono avere numero barionico = 1/3, quindi non coincidono con alcuna delle particelle osservate, che hanno B=0, mesoni, e B=+1, barioni
- chiamiamoli (u, d, s)
  - u e d portano lo spin isotopico +1/2 (up) e -1/2(down) e S=0 (come p e n in F-Y&S)
  - s ha spin isotopico= 0 e S=-1(come Λ in F-Y&S)

6.*Three Quarks for Master Mark!*

- I vertici del decupletto: Δ^-, Δ^{++}, Ω^-, sono le configurazioni estreme, con tre costituenti identici: minimo isospin, Δ^-, massimo isospin, Δ^{++}, minima stranezza, Ω^-.
  – uuu= Δ^{++}, 3Q(u)=2, ovvero Q(u)=+2/3
  – ddd= Δ^-, Q(d)=-1/3
  – sss= Ω^-, Q(s)=-1/3



- ***Il tripletto di base e'costituito da campi/particelle mai osservate prima, un nuovo livello di realta' sottostante alla materia subnucleare***, protone e neutrone inclusi
  – p=uud, n=udd, Λ=uds, etc.
- Gell-Mann ha dato il nome di QUARK alle particelle fondamentali del tripletto, prendendolo da una frase di Finnegan's Wake di James Joyce: *Three Quarks for Master Mark!*
- Il significato non e' chiaro: pinte di birra???, ma comunque ce ne sono tre nel protone, e questo fa tutta la differenza rispetto a Fermi-Yang e Sakata
- la democrazia nucleare e' salva e la via dei componenti elementari e' percorribile.

Simmetria nella fisica delle particelle : predizioni e realtà

N P

0 +1

Mc^2 0.9396 0.9383

π^- π^0 π^+

-1 0 +1

Mc^2 0.1396 0.1350 0.1396

N P

0 +1

Σ^- Σ^0/Λ^0 Σ^+

-1 0,0 +1

Ξ^- Ξ^0

-1 0

Spin Isotopico (SU2, W. Heisenberg, circa 1930)

input

Mesoni π = forze nucleari

$M(\pi^0)=M(\pi^+)$

Eightfold Way (SU3, M. Gell-Mann, Y, Neeman, 1962)

Otto barioni con masse eguali

Multipletti di SU(3): barioni 8 e 10, mesoni 8 e 1

Deviazioni dalla simmetria:

0.14% quark u e d non esattamente alla stessa massa, correzioni elettromagnetiche;

3.3% correzioni elettromagnetiche

≈ 30% differenza di massa del quark s rispetto ai quark u, d

7. Un nuovo paradigma e nuovi problemi

- Dal 1964 in poi, le numerose risonanze mesoniche e barioniche via via scoperte si sistemano senza difficolta' in ottetti, decupletti e singoletti
- si afferma il nuovo paradigma:

$$mesons = q\bar{q};\ baryons = qqq$$

- Nuovi problemi: quali sono le interazioni dei quark? quali campi/particelle le trasmettono?
  - Gell-Mann introduce un campo simile al fotone, ma con massa; l'ipotesi di un gluone (da glue=colla) che tenga insieme i quark nel protone e' esplorata da diversi autori
- le forze sono veramente simmetriche sotto SU(3)?la violazione e' solo dovuta alle differenze di massa dei quark?
- Una spina nel fianco: si dice che Δ^{++}(spin 3/2)=$u^{\uparrow}u^{\uparrow}u^{\uparrow}$

  ma e' una configurazione proibita per il Principio di Pauli. Forse la regola non vale all'interno del protone? o forse i quark sono solo finzioni matematiche? oppure obbediscono ad una statistica diversa?
- sembra di essere tornati ai tempi di Pauli, per molti vale l'opinione di Mr. Debye:
  - *who told me recently in Bruxelles: "Oh, It's better not to think about this at all, like new taxes."*

Le risposte verranno negli anni '70. Restate con noi!