

III. INTRODUZIONE ALL'ASTRODINAMICA

III.1. Orbite kepleriane

III.1.1. Equazioni del moto

La Tabella III.1.1 elenca e definisce i parametri fondamentali dell'orbita ellittica schematizzata in Figura III.1.1.

Tabella III.1.1: Parametri del moto orbitale

\dot{r}	vettore posizione del satellite (s) relativamente al centro della Terra (T)
\dot{v}	vettore velocità di s relativamente a T
a	semiasse maggiore dell'ellisse
b	semiasse minore dell'ellisse
c	semidistanza fra i fuochi
e	eccentricità: $e = c / a = \sqrt{a^2 - b^2} / a$
p	semi-latus rectus: $p = a(1 - e^2)$
r_p	raggio del perigeo, la distanza fra T ed il punto più vicino dell'orbita ellittica
r_a	raggio dell'apogeo, la distanza fra T ed il punto più lontano dell'orbita ellittica
ϑ	angolo polare dell'ellisse; si chiama anche anomalia vera e si misura in direzione del moto dalla direzione del perigeo al vettore posizione
φ	anomalia eccentrica (vedi Figura III.1.2)

L'equazione del moto del satellite nel campo di forza della gravitazionale della Terra si ottiene, in prima approssimazione, dall'analisi del moto dei due corpi.

Per la trattazione del problema dei due corpi si fanno due assunzioni semplificatrici: a) i corpi sono a simmetria sferica in modo che la masse possano considerarsi concentrate nel centro, b) non ci sono forze interne o esterne che agiscono sul sistema; l'unica forza è quella gravitazionale che agisce lungo la linea che unisce i centri dei due corpi.

L'equazione del moto relativo dei due corpi si determina nella seguente maniera: si considerino i due corpi di massa M e m e due sistemi di riferimento definiti da coordinate cartesiane ortogonali: (X', Y', Z') e (X, Y, Z) . Il primo è un sistema inerziale, il secondo è parallelo al primo e non rotante. L'origine del secondo sistema è al centro del corpo di massa M . Se i vettori posizione dei due corpi, relativamente al sistema inerziale, sono \dot{r}_M e \dot{r}_m rispettivamente, il vettore posizione relativa della massa m rispetto la massa M è:

$$\dot{r} = \dot{r}_m - \dot{r}_M \quad (\text{III.1})$$

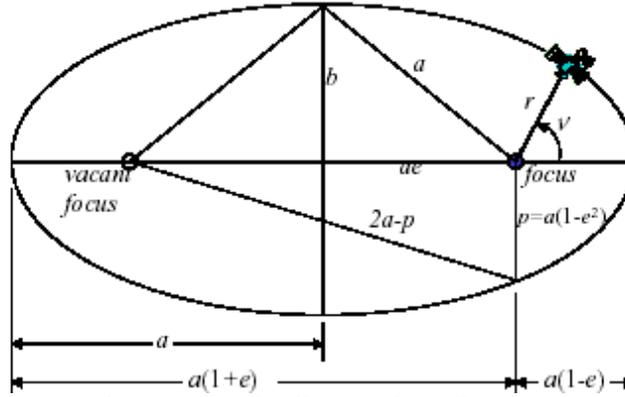


Figura III.1.1: Satellite in orbita ellittica.

Applicando le leggi di Newton nel sistema di riferimento inerziale si ottengono le accelerazioni delle masse m e M rispettivamente:

$$\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{III.2})$$

$$\ddot{\vec{r}}_M = \frac{Gm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{III.3})$$

Sottraendo la (III.2) dalle (III.3) si ottiene

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \vec{r} \quad (\text{III.4})$$

Si noti che, per le ipotesi fatte sui sistemi di riferimento, $\ddot{\vec{r}}$ e $\dot{\vec{r}}$ sono gli stessi nei due sistemi. Quindi, dopo aver postulato l'esistenza di un sistema di riferimento inerziale per derivare l'equazione (III.4), si è in grado di misurare i vettori posizione, velocità, e accelerazione del sistema non rotante che ha l'origine nel centro del corpo di massa M . La massa m di satellite artificiale orbitante attorno la Terra, un pianeta o il Sole è sempre molto minore di M . La (III.4), con buona approssimazione, si può scrivere come segue:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{GM}{r^3} \vec{r} = \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \quad (\text{III.5})$$

dove $\mu = GM = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3 / \text{s}^2$ per la Terra e $\mu = 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3 / \text{s}^2$ per il Sole.

L'equazione del moto in coordinate polari diventa:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (\text{III.6})$$

L'accelerazione trasversale è nulla in quanto, dalle ipotesi iniziali, risulta che il sistema è soggetto alle sole forze gravitazionali e che il moto è centrale:

$$a_T = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (\text{III.8})$$

dove h è il modulo del momento angolare specifico che è una costante del moto. Ponendo $r = 1/u$ e derivando rispetto al tempo

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} \quad (\text{III.9})$$

$$\ddot{r} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{r}}{d\theta} \quad (\text{III.10})$$

si ottiene l'equazione (III.11) che ha come soluzione generale la (III.12):

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (\text{III.11})$$

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - B)] \quad (\text{III.12})$$

Assumendo le condizioni iniziali su θ in modo che $B = 0$, si ottiene la

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{III.13})$$

La (III.13) è l'equazione polare di una sezione conica; se $e < 1$ la (III.13) è l'equazione polare di un'ellisse di eccentricità e e con fuoco in T (Figura III.1.1). La (III.13) si scrive anche, in forma più riconoscibile, come segue:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{III.14})$$

Per dimostrare che $h^2 / \mu = p$ basta calcolare l'equazione (III.13) per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e compiere semplici operazioni algebriche ricordando che $r_p + r_a = 2a$.

Le componenti trasversale e radiale della velocità sono rispettivamente:

$$r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cos \theta) \quad (\text{III.15})$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e \sin \theta \quad (\text{III.16})$$

La velocità totale al quadrato è:

$$\dot{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (\text{III.17})$$

III.1.2. Energia meccanica e momento angolare specifici

Per un'orbita non perturbata l'energia meccanica (specifica) si conserva:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{III.18})$$

Nella (III.18) si è indicato con v^2 il quadrato della velocità (\dot{r}^2). Con la condizione al contorno che l'energia potenziale all'infinito è zero, l'energia meccanica specifica è sempre negativa per un'orbita ellittica. Se l'energia aumenta e tende a zero, l'ellisse diventa sempre più grande e l'orbita tende a diventare parabolica ($a \rightarrow \infty$, $e \rightarrow 1$).

Con l'equazione dell'energia, si deriva che la velocità di un satellite in un'orbita circolare di raggio r_0 è:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad (\text{III.19})$$

mentre la velocità di fuga dall'attrazione terrestre da una stessa distanza r_0 è:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \quad (\text{III.20})$$

Un'altra grandezza associata con l'orbita di un satellite è il momento angolare specifico definito come:

$$\vec{h} = \sqrt{\mu p} \vec{n} \quad (\text{III.21})$$

dove \dot{n} è la normale al piano dell'orbita. Per un sistema a due corpi, il momento angolare si conserva sia in modulo che in direzione. Il piano di un'orbita definita dai vettori posizione e velocità rimane fisso nello spazio inerziale.

Poichè il raggio vettore "spazza" aree uguali in tempi uguali, il tempo impiegato a spazzare l'area dell'ellisse (periodo dell'orbita), è dato dal rapporto area su velocità "aereolare":

$$\tau = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu p} / 2} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (\text{III.22})$$

e la velocità angolare media del satellite è:

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (\text{III.23})$$

III.1.3. Equazioni del moto in termini di anomalia eccentrica

Si definisce anomalia eccentrica l'angolo φ indicato in Figura III.1.2; lo si ottiene circoscrivendo un cerchio di raggio a attorno l'ellisse e tracciando una linea perpendicolare all'asse maggiore che passa per il punto P (satellite). La linea interseca il cerchio nel punto Q . Dalla figura risulta immediatamente:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{\cos \varphi - e}{1 - e \cos \varphi} \\ \text{sen } \vartheta &= \frac{a \sqrt{1-e^2}}{r} \text{sen } \varphi \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

L'equazione del moto in termini di anomalia eccentrica diventa:

$$r = a(1 - e \cos \varphi) \quad (\text{III.25})$$

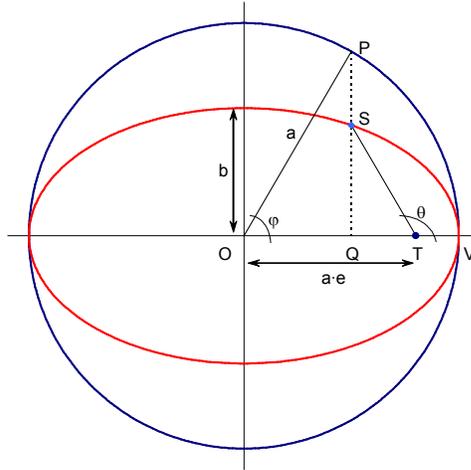


Figura III.1.2: Anomalia eccentrica, φ

Un'altra grandezza importante è l'anomalia media che è definita da:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) \quad (\text{III.26})$$

dove t_p è l'istante di passaggio del satellite al periapside. L'equazione (III.26) si ottiene dalla seconda legge di Keplero: il rapporto fra l'area VST di Figura III.1.2 ed il tempo impiegato a percorrerla ($t - t_p$) è uguale al rapporto fra l'area dell'orbita ellittica ed il periodo. Se indichiamo con A l'area VST si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{A}{t - t_p} = \frac{\pi ab}{\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} ab \quad (\text{III.27})$$

Il valore di A si calcola come differenza fra l'area VSQ e l'area TSQ. Quest'ultima è un triangolo di base $ae - a \cos \varphi$ e di altezza $\frac{b}{a}(a \sin \varphi)$; l'area VSQ è data da $\frac{b}{a}$ (area VPQ). In definitiva

$$A = \frac{ab}{2}(\varphi - e \sin \varphi) \quad (\text{III.28})$$

$$t - t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(\varphi - e \sin \varphi) \quad (\text{III.29})$$

$$M = \varphi - e \sin \varphi \quad (\text{III.30})$$

L'equazione (III.30) è l'equazione di Keplero; tramite essa si può calcolare l'anomalia vera, θ , e quindi l'equazione del moto. L'equazione di Keplero è

trascendente in φ ; non c'è quindi la possibilità di calcolare analiticamente φ . Bisogna derivare soluzioni approssimate (grafiche o analitiche). M si può ottenere dalla

$$M = \sqrt{\frac{\mathcal{X}}{a^3}}(t - t_p) - 2\pi k + M_0 \quad (\text{III.31})$$

con k una costante intera. Una volta determinata l'anomalia eccentrica, combinando le equazioni (III.24) e (III.25), si ottiene l'anomalia vera:

$$\cos \vartheta = \frac{e - \cos \varphi}{e \cos \varphi - 1} \quad (\text{III.32})$$

III.1.4. Elementi orbitali

Si definiscono gli elementi di un'orbita, cioè 5 parametri necessari per specificare le caratteristiche di un'orbita ellittica (Tabella III.1.2) ed un sesto parametro necessario per localizzare con precisione la posizione di un satellite lungo la sua orbita ad un dato istante.

Tabella III.1.2: Parametri del moto orbitale

<p>Due parametri che definiscono l'orientazione del piano orbitale:</p> <ul style="list-style-type: none"> •• i, l'angolo di inclinazione del piano orbitale relativamente al piano dell'equatore terrestre, e •• Ω, l'ascensione retta del nodo ascendente¹ <p>Un parametro per l'orientazione del moto del piano orbitale:</p> <ul style="list-style-type: none"> •• ω, l'angolo fra il nodo ascendente ed il perigeo, misurato attorno l'orbita nella direzione del moto <p>Un parametro che per la dimensione dell'orbita:</p> <ul style="list-style-type: none"> •• a, il semiasse maggiore <p>Un parametro di forma dell'orbita:</p> <ul style="list-style-type: none"> •• e, l'eccentricità <p>Un parametro temporale:</p> <ul style="list-style-type: none"> •• t_P, istante di passaggio al periapside
--

¹Nodo ascendente è il punto dell'orbita dove un satellite attraversa il piano equatoriale muovendosi da sud a nord; l'ascensione retta del nodo ascendente, Ω , è l'angolo nel piano equatoriale, misurato verso est dalla direzione dell'equinozio di primavera (punto γ) al nodo ascendente dell'orbita. Il punto γ è il nodo ascendente dell'orbita terrestre attorno il Sole.

Esistono altri parametri che definiscono l'orbita di un satellite: tra questi ricordiamo 1) l'argomento della latitudine u , cioè l'angolo, misurato sul piano dell'orbita, fra il nodo ascendente ed il raggio vettore del satellite all'istante t_0 , e 2) la longitudine del satellite, cioè l'angolo, misurato sul piano dell'orbita, fra la direzione dell'equinozio di primavera (punto γ) ed il raggio vettore del satellite. In Figura III.1.3 sono rappresentati tutti i parametri menzionati sopra.

III.1.5. Equazioni del moto di un satellite in presenza di forze esterne

L'equazione del moto del satellite s nel campo di forza della gravitazionale della Terra, assumendo $m = 1$, la presenza di forze esterne \vec{f} e che queste ultime siano piccole rispetto le forze gravitazionali, si scrive in forma vettoriale nella seguente maniera:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{f} \quad (III.33)$$

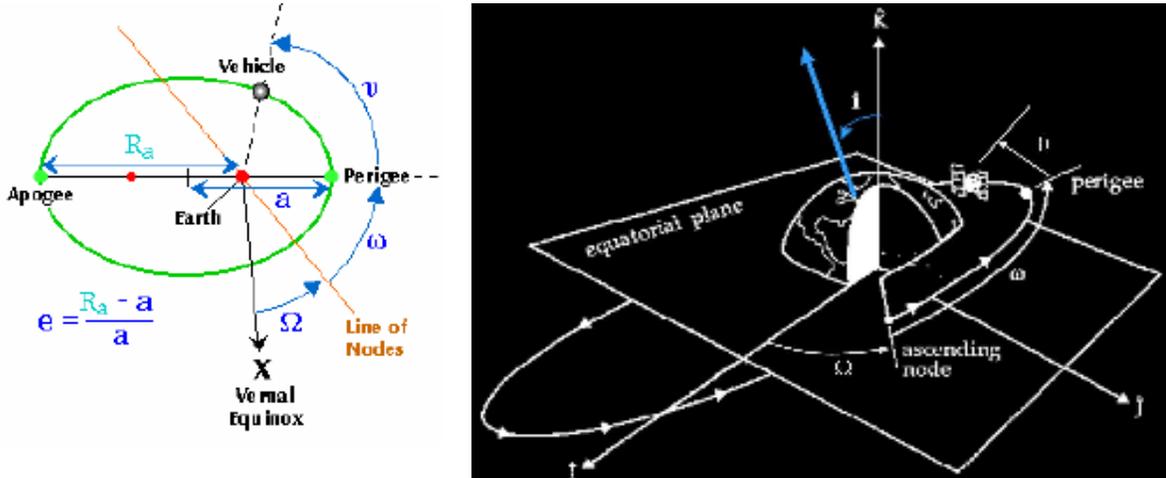


Figura III.1.3: Parametri orbitali

In questo caso il piano dell'orbita non è più fisso ma varia nel tempo. Istante per istante l'orbita su cui si muove il satellite coincide con un'orbita di riferimento lungo cui un satellite si muoverebbe se a quell'istante si annullassero tutte le accelerazioni che perturbano il moto; tale orbita di riferimento si dice "osculante". Osculare è il termine scientifico per baciare. Il termine dà il senso del contatto; nel nostro caso il contatto avviene fra l'orbita vera (perturbata) e quella di riferimento o osculante. Si definisce piano osculante il piano che contiene T , S ed il vettore velocità \dot{v} ad ogni istante. Si nota che i vettori posizione e velocità del satellite, \dot{v} e \dot{r} , sono gli stessi che nell'orbita osculante; \ddot{r} è differente. Dopo un tempo δt , il satellite giace su una nuova orbita osculante data dal vettore posizione $\vec{r} + \dot{\vec{r}}\delta t$ e dal vettore velocità $\dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}\delta t$. Poichè $\ddot{\vec{r}}$ ha un valore diverso da quello dell'orbita non perturbata, gli elementi dell'orbita osculante al tempo $t + \delta t$ saranno diversi da quelli al tempo t . Si esprime il cambio di elementi orbitali in termini di $\dot{f}(f_r, f_i, f_n)$.

Le componenti del vettore \dot{f} si riferiscono ad un sistema di coordinate che ha l'asse principale R lungo il raggio vettore istantaneo, \dot{r} , l'asse T è ruotato di 90° in direzione di anomalia vera crescente. R e T giacciono sul piano osculante. Il terzo asse N, indicato da un versore \dot{n} , è perpendicolare a R e T.

Dall'equazione dell'energia (III.18), differenziando si ottiene:

$$\frac{1}{\mu} \dot{r} \cdot \ddot{r} = \frac{-\dot{r} \cdot \dot{r}}{r^3} + \frac{\dot{a}}{2a^2} \quad (\text{III.34})$$

Da qui si deriva

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{r} \cdot \dot{f} \quad (\text{III.35})$$

e, tramite le componenti radiali e tangenziali della velocità (III.15 e III.16), si ottiene la **prima** equazione delle orbite perturbate:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [f_r e \sin \vartheta + f_t (1 + e \cos \vartheta)] \quad (\text{III.36})$$

Altre due equazioni si ottengono partendo dal momento angolare specifico che è un vettore parallelo a \dot{n} ; la direzione di \dot{n} è determinata da Ω e da i .

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \sqrt{\mu p} \vec{n} \quad (\text{III.37})$$

Differenziando l'equazione precedente rispetto il tempo si ottiene:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{f}} = \sqrt{\mu p} (\dot{\vec{n}} + \frac{\dot{p}}{2p} \vec{n}) \quad (\text{III.38})$$

Si indichi con \dot{B} la velocità angolare di \dot{n} e si consideri il vettore $\dot{\vec{n}} = \dot{B} \wedge \vec{n}$. \dot{B} ha come componenti $\dot{\Omega}$ in direzione dell'asse di rotazione terrestre (asse z) e di/dt in direzione della linea dei nodi che a sua volta è perpendicolare all'asse z (vedi Figura III.1.3). Se si chiama \dot{K} il versore lungo l'asse z e \dot{I} quello lungo la linea dei nodi e \dot{J} quello che completa la terna cartesiana ortogonale e che identifica la direzione dell'apice, il punto di massima latitudine nord dell'orbita, si ottiene:

$$\dot{\vec{n}} = \dot{B} \wedge \vec{n} = \dot{\Omega} \text{sen} i \vec{I} - \frac{di}{dt} \vec{J} \quad (\text{III.39})$$

Indicando con u l'angolo $\omega + \theta$, si derivano le componenti di $\vec{r} \wedge \dot{\vec{f}}$ nel piano orbitale:

- rf_n perpendicolare a \dot{r}
- $rf_n \text{ sen } u$, lungo \dot{I}
- $-rf_n \text{ cos } u$, lungo \dot{J} .

Proiettando l'equazione (III.38) lungo le direzioni \dot{I} e \dot{J} rispettivamente si trovano la seconda e terza equazione delle orbite perturbate:

$$\boxed{\dot{\Omega} \text{sen } i = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} rf_n \text{ sen } u} \quad (\text{III.40})$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} rf_n \text{ cos } u} \quad (\text{III.41})$$

Proiettando la stessa equazione lungo \dot{h} si ottiene:

$$\dot{p} = 2rf_t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \quad (\text{III.42})$$

e, ricordando 1) che $\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e}$ e 2) la relazione (III.25) che dà l'equazione del moto espressa in termini di anomalia eccentrica, si deriva la quarta equazione delle orbite perturbate:

$$\boxed{\dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} [f_r \text{ sen } \vartheta + f_t (\text{cos } \vartheta + \text{cos } \varphi)]} \quad (\text{III.43})$$

L'ultima (quinta) delle equazioni delle orbite si deriva ricordando che la velocità angolare del satellite che si muove nel piano osculante dell'orbita è data dalla $(\dot{\omega} + \dot{\vartheta})\bar{n}$, mentre il piano ha una sua velocità angolare attorno l'asse terrestre con componente $\dot{\Omega} \text{cos } i$ in direzione di \dot{h} . Allora si ha:

$$\bar{h} = \sqrt{\mu p} \bar{n} = r^2 (\dot{\omega} + \dot{\vartheta} + \dot{\Omega} \text{cos } i) \bar{n} \quad (\text{III.44})$$

L'equazione precedente si può scrivere, in termini scalari, come:

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega} \text{cos } i = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{\vartheta} \quad (\text{III.45})$$

$\dot{\vartheta}$ si può derivare differenziando rispetto il tempo l'equazione del moto (III.13):

$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{\text{sen } \vartheta} \left[-\frac{\dot{e}}{e^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) + \frac{1}{e} \left(\frac{\dot{p}}{r} - \frac{\dot{r}p}{r^2} \right) \right] \quad (\text{III.46})$$

Ricordando l'espressione (III.16) per la componente \dot{r} della velocità, l'equazione delle orbite (III.13), l'equazione (III.43) che calcola \dot{e} , la (III.42) che dà \dot{p} , e derivando $\text{sen } \vartheta$ e $\text{cos } \vartheta$ in termini dell'anomalia eccentrica, si ottiene la quinta equazione delle orbite:

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-f_r \cos \vartheta + f_t \left(1 + \frac{r}{p} \right) \text{sen } \vartheta \right] \quad (\text{III.47})$$

III.1.6. Effetti della triassialità della Terra

Nella derivazione dell'equazione del moto per orbite imperturbate si era assunto che la Terra fosse sferica ed omogenea. In realtà la Terra non è sferica nè omogenea. Le deviazioni più importanti sono dovute alla rotazione terrestre; altri effetti, come la leggera forma a pera e le variazioni del raggio equatoriale sono meno importanti ma sufficienti ad influenzare un satellite in un'orbita equatoriale (vedi schema in Figura III.1.4). In Tabella III.1.3 si dà una schema riassuntivo.

Rotazione terrestre	Rigonfiamento equatoriale e appiattimento ai poli: raggio polare è 21 km più corto del raggio medio equatoriale
Forma a pera	Centro di massa a sud dell'equatore
Variazione del raggio equatoriale	Recente scoperta della fisica spaziale; produce asimmetria gravitazionale nel piano equatoriale ($\Delta r \approx 70m$).

Tabella III.1.3: Triassialità della Terra

Dato il potenziale gravitazionale della Terra, si può calcolare l'accelerazione prendendone il gradiente: $\vec{a} = -\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{k}$. Le derivate sono calcolate rispetto un sistema di riferimento geocentrico in un sistema di riferimento di coordinate equatoriali. La funzione geopotenziale si può scrivere nella seguente forma:

$$\Phi = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n P_n(\text{sen } \lambda) \right] \quad (\text{III.48})$$

dove il primo termine è il potenziale della terra supposta sferica, il secondo termine ($n=2$) tiene conto dell'appiattimento della Terra ($J_2 = 1.08263 \times 10^{-3}$ è una costante adimensionale, R_{eq} è il raggio equatoriale della Terra, P_2 è il polinomio di Legendre del secondo ordine con argomento il seno della latitudine geocentrica, λ , i termini di ordine più alto rappresentano l'asimmetria all'equatore ($J_3 = -2.54 \times 10^{-6}$, etc.)

Il potenziale generato dalla non sfericità della Terra produce variazioni periodiche in tutti gli elementi orbitali. Gli effetti dominanti sono variazioni secolari

- nell'ascensione retta del nodo ascendente, e
- dell'argomento del perigeo.

Nel primo caso il piano orbitale ruota attorno l'asse terrestre in direzione opposta al moto del satellite; il rigonfiamento dell'equatore produce la forza aggiuntiva dovuta all'aumento di attrazione gravitazionale. Lo spostamento è una specie di effetto giroscopico; il cambio di direzione del moto è perpendicolare sia alla direzione originale del moto che alla direzione della forza perturbante. Il fenomeno si chiama regressione dei nodi.

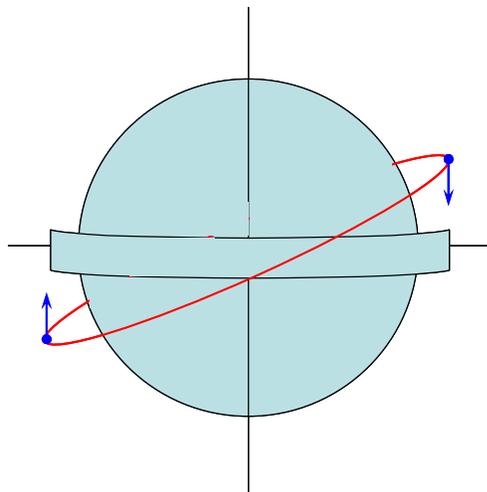


Figura III.1.4: Per dare un'idea visiva dell'effetto si rappresenta la Terra come una sfera circondata da una fascia equatoriale di materia in eccesso che rappresenta il rigonfiamento all'equatore.

Si noti che i nodi si muovono verso ovest per orbite progressive o dirette e verso est per orbite retrograde

Se $i < 90^\circ$, Ω diminuisce continuamente mentre i rimane costante:

$$\dot{\Omega} \approx -9.97 \left(\frac{R_{eq}}{a}\right)^{3.5} (1 - e^2)^{-2} \cos i \quad \text{gradi/giorno} \quad (\text{III.49})$$

Per quanto riguarda l'argomento del perigeo, l'asse maggiore dell'orbita ruota nel piano orbitale in modo che l'argomento del perigeo aumenta secondo la seguente relazione:

$$\dot{\omega} \approx 4.98 \left(\frac{R_{eq}}{a}\right)^{3.5} (1 - e^2)^{-2} (5 \cos^2 i - 1) \quad \text{gradi/giorno} \quad (\text{III.50})$$

L'effetto della variazione di ω è rilevante nella posizione della linea degli apsi, cioè la linea che congiunge il perigeo con l'apogeo: il satellite accelera o decelera a

secondo del valore di i . Il rigonfiamento all'equatore causa, per piccoli i , una maggior curvatura dell'orbita rispetto al caso di massa centrale a simmetria sferica; il risultato è che l'orbita rimane nello stesso piano ma la posizione dell'apogeo cambia continuamente. Lo spostamento è nella direzione del moto del satellite se i è minore di 63.4 gradi o maggiore di 116.6 gradi; altrimenti è opposta al moto del satellite.

In Tabella III.1.4 si danno alcuni esempi di effetti della triassalità su Ω e ω per alcune orbite scelte. Dalla suddetta tabella risulta che l'orbita detta Molniya è molto eccentrica ed ha un periodo di circa 12 ore (2 rivoluzioni al giorno). L'inclinazione orbitale è $i = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$, cioè è scelta in modo tale che $\Delta\omega = 0$. Per le orbite Molniya il perigeo è nell'emisfero sud e quindi il satellite rimane nell'emisfero nord (attorno all'apogeo) per circa 11 ore. Tipiche altezze del perigeo variano da 200 a 1000 km.

Parametri orbitali	$\Delta\Omega$ (°/giorno)	$\Delta\omega$ (°/giorno)
Shuttle: a=6700 km e=0; i=28°	-7.35	12.05
a=26600 km e=0 i=60°	0.033	0.008
Orbita geosincrona a=42160 km e=0; i=0°	-0.013	0.025
Orbita ellittica Molniya: a=26600 km e=0.75; i=63.4°	-0.30	0.00

Tabella III.1.4: Esempi di $\dot{\Omega}$ e di $\dot{\omega}$

Nelle orbite sincrone con il Sole, in cui $\dot{\Omega}$ è uguale alla velocità angolare della Terra attorno al Sole (0.9856 gradi/giorno), il piano orbitale del satellite rimane approssimativamente fisso relativamente al Sole. Per dati valori di a ed e , si usa la III.47 per determinare l'inclinazione dell'orbita sincrona con il Sole.

Oltre le variazioni secolari di Ω e ω i J_n causano perturbazioni periodiche di alcuni elementi orbitali. La più importante è un'oscillazione della distanza del perigeo causata dalla terza armonica.

$$r_p - r_{pe} \approx -6.8 \text{sen } i \text{sen } \omega \quad \text{km} \quad (\text{III.51})$$

dove r_{pe} è il valore equatoriale (cioè quando $\omega = 0^\circ$).

Ci sono altre perturbazioni (in genere piccole) causate dalla variazione della gravità con la longitudine; di queste non ce ne occupiamo.

III.1.7. Effetto dell'attrito atmosferico

Poichè la densità dell'aria diminuisce rapidamente con l'altezza, un satellite avente un'orbita altamente eccentrica subirà gli effetti della resistenza dell'aria soltanto attorno al perigeo dove, in prima approssimazione, perderà velocità.

Ciò fa sì che il satellite non raggiungerà la stessa distanza dell'orbita precedente all'apogeo. La distanza dell'apogeo viene ridotta mentre quella al perigeo rimane essenzialmente costante.

Un satellite che si muove con velocità \dot{v}_a rispetto l'aria (cioè relativamente all'atmosfera rotante) è soggetto a forze aereodinamiche che possono essere identificate in due componenti:

- la forza d'attrito in direzione opposta a \dot{v}_a che ha modulo

$$m|\ddot{r}| = \frac{1}{2} \rho v_a^2 S C_D \quad (\text{III.52})$$

dove ρ è la densità dell'aria, S la sezione d'urto del satellite perpendicolare alla direzione del moto, C_D un coefficiente adimensionale di attrito;

- una forza \dot{L} che giace sul piano perpendicolare a \dot{v}_a e che produce un momento \dot{M} attorno al centro di massa. \dot{L} si chiama "spostamento aereodinamico attorno il centro di massa" ed include effetti dovuto al gradiente di gravità, al campo magnetico della terra, etc.

Nella maggior parte dei satelliti si applicano forze di controllo (con piccoli sistemi a getto, o sistemi a torsione magnetica ("magnetic torquers"), o sistemi a ruote ("rotating wheels"). Per satelliti non controllati \dot{L} e \dot{M} sono grandezze destabilizzanti per l'assetto del satellite. In quanto segue ignoreremo tali tipi di forze o momenti.

Il valore di C_D , per un'altezza che eccede 180 km è di circa 2.2. Per un'orbita di eccentricità fra 0 e 0.2 ed un'altezza del perigeo da 180 a 500 km il valore di C_D varia da 2.1 a 2.2 se il satellite è sferico, da 2.1 a 2.25 se il satellite è cilindrico ed inclinato relativamente al vettore velocità, è 2.2 se la base piana è perpendicolare al vettore velocità.

Le variazioni approssimate di a ed e per rivoluzione, nel caso di orbita circolare ($e = 0$), sono:

$$\Delta a_{rev} \approx 2\pi \left(\frac{C_D S}{m} \right) a^2 \rho \quad (\text{III.53})$$

$$\Delta e \approx 0 \quad (\text{III.54})$$

Il coefficiente $m/C_D S$ è chiamato coefficiente balistico ed è calcolato come una costante per ogni satellite. La vita media in numero di rivoluzioni di un satellite orbitante è data dalla seguente relazione:

$$\nu = - \frac{H}{\Delta a_{rev}} \quad (\text{III.55})$$

dove H è l'altezza di scala della densità dell'atmosfera.

III.1.8. Forze gravitazionali del Sole e della Luna

Le forze gravitazionali del Sole e della Luna producono variazioni periodiche su tutti gli elementi orbitali, e variazioni secolari su Ω , ω e sull'anomalia vera. Le variazioni secolari sono causate dalla precessione dell'orbita attorno il polo dell'eclittica: i valori di θ variano molto poco mentre sono più importanti, specialmente per orbite alte, le variazioni di Ω e ω . Per orbite quasi circolari le variazioni secolari approssimate dovute alla Luna ed al Sole sono (in gradi/giorno; n è il numero di rivoluzioni per giorno).

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_L &= -3.38 \times 10^{-3} \frac{\cos i}{n} \\ \dot{\Omega}_S &= -1.54 \times 10^{-3} \frac{\cos i}{n} \\ \dot{\omega}_L &= 1.69 \times 10^{-3} \frac{4 - 5 \operatorname{sen}^2 i}{n} \\ \dot{\omega}_S &= 0.77 \times 10^{-3} \frac{4 - 5 \operatorname{sen}^2 i}{n}\end{aligned}\tag{III.56}$$

III.1.9. Perturbazioni dovute alla pressione di radiazione solare

Queste perturbazioni producono variazioni periodiche di tutti gli elementi orbitali. Gli effetti sono maggiori per satelliti con basso coefficiente balistico, di piccola massa e grande superficie frontale. L'accelerazione della pressione di radiazione è

$$a = -4.5 \times 10^{-8} \frac{S}{m} \quad \text{m/s}^2 \tag{III.57}$$

dove S è la sezione dell'area del satellite esposto alla luce solare e m la massa del satellite in kg. Per satelliti su orbite più alte di 800 km l'effetto della pressione di radiazione è prevalente rispetto quello dovuto all'attrito atmosferico. L'opposto è vero per orbite più basse.

III.2. Generalità sulle orbite

III.2.1. Orbite progressive e retrograde

Orbite dirette o progressive sono quelle in cui il satellite è lanciato da ovest verso est. L'energia rotatoria della Terra contribuisce all'energia del veicolo di lancio e quindi si ha bisogno di minor energia da parte del lanciatore. Orbite retrograde sono quelle per cui il lancio avviene da est verso ovest; bisogna dare al lanciatore energia supplementare per vincere l'energia rotazionale della Terra.

Si noti che c'è una dipendenza del guadagno (perdita) di energia dalla latitudine. È massimo all'equatore dove è maggiore la velocità di rotazione terrestre e diminuisce con l'aumentare della latitudine. Inoltre c'è una dipendenza da i , l'angolo di inclinazione del piano orbitale relativamente al piano dell'equatore. Più grande è l'inclinazione, minore è l'effetto. Per un'orbita polare non c'è contributo della rotazione terrestre, indipendentemente dalla latitudine della base di lancio.

III.2.2. Velocità orbitale dei satelliti

Per la conservazione del momento angolare, la velocità di un satellite in un'orbita ellittica diminuisce continuamente finché non raggiunge l'apogeo, dove è minima, per poi aumentare continuamente finché non raggiunge il perigeo, dove è massima.

Dalla III.17 che dà il quadrato della velocità totale si derivano le velocità al perigeo e all'apogeo:

$$v_p = \sqrt{\frac{\chi(2a - r_p)}{ar_p}} \tag{III.58}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\chi \cdot r_p}{a(2a - r_p)}}$$

Per un satellite che ha un'altezza di orbita al perigeo di 490 km ($r_p = 6860$ km) e all' apogeo di 1790 km ($r_a = 8160$ km) la velocità al perigeo è di 7.95 km/s e quella all'apogeo è di 6.68 km/s.

III.2.3. Periodo siderale e sinodico

Si definiscono preliminarmente il "giorno solare apparente" ed il giorno "siderale".

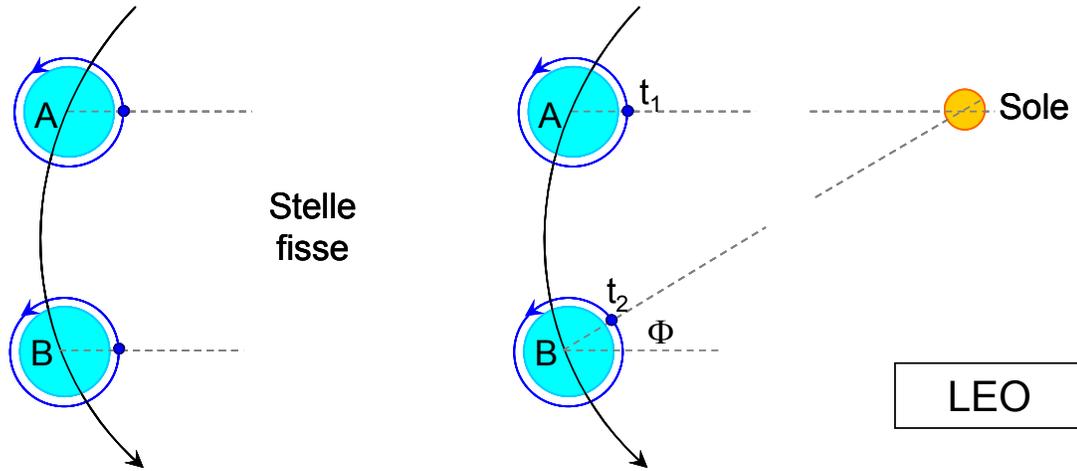


Figura III.2.1: Periodi siderali (sinistra) e sinodici (destra).

Il primo è l'intervallo di tempo fra due transiti del Sole sopra il meridiano locale. La Terra compie un po' più di un giro completo attorno il suo asse relativamente alle stelle fisse a causa del moto orbitale attorno al Sole che è, giornalmente, di $1/365$ dell'orbita. Il giorno siderale (che è di 24 ore siderali) è definito come l'intervallo di tempo in cui la Terra compie una rotazione attorno il suo asse relativamente alle stelle fisse. Il giorno siderale è di $23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}}$; quello solare apparente è di 24 ore.

Il periodo siderale è il tempo di rivoluzione di un satellite relativamente alle stelle fisse. Il periodo sinodico è il periodo di rivoluzione di un satellite relativamente al Sole. In Figura III.2.1 vengono schematizzati i due casi.

Per illustrare il calcolo dei periodi sinodici dei satelliti artificiali si usa un sistema geocentrico. Precedentemente si è definito periodo sinodico di un satellite il tempo fra due successivi passaggi del satellite sopra un meridiano terrestre. Richiamandosi al grafico di Figura III.2.2 dove è rappresentato schematicamente il centro della Terra (C), la posizione di un meridiano (M), ed il satellite (S). Sia t_1 l'istante del passaggio del satellite sopra un dato meridiano e t_2 l'istante in cui il satellite passa nuovamente sopra lo stesso meridiano. Le posizioni di M e S nei due istanti sono indicate con gli indici 1 e 2 rispettivamente. Per la definizione data, il periodo sinodico è l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$. Poichè la velocità angolare del satellite (in un'orbita LEO) è maggiore di quella della Terra, il satellite avrà descritto un'angolo di $2\pi + \Phi$ mentre la Terra avrà descritto un angolo Φ .

$$2\pi + \Phi = \frac{2\pi}{\tau_S} (t_2 - t_1) \quad (III.59)$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{\tau_M} (t_2 - t_1)$$

dove τ_S è il periodo orbitale (siderale) del satellite e τ_M τ_T quello della Terra; eliminando Φ , si ottiene:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\tau_S} - \frac{1}{\tau_M} \quad (III.60)$$

Per un satellite in orbita bassa (LEO) ed equatoriale, il periodo siderale è di circa 90 minuti mentre quello sinodico è di circa 5 minuti maggiore (si noti che se il satellite ha un'orbita retrograda, è vero il contrario). All'aumentare dell'altezza dell'orbita, entrambi i periodi aumentano, ma quello sinodico aumenta più rapidamente. Per un satellite geostazionario in orbita circolare a 35880 km di altezza, il periodo siderale è di 24 ore; il periodo sinodico è infinito. Ad orbite più alte il periodo sinodico diminuisce e può, ad orbite altissime, diventare minore di quello siderale pur senza mai diventare minore di 24 ore.

Per la relazione fra periodo siderale e sinodico della Luna e dei pianeti valgono relazioni simili. Nell'ipotesi che un pianeta P abbia una distanza eliocentrica maggiore di quella della Terra, T , e riferendosi alla Figura III.2.2 (ci mettiamo in un sistema in cui il Sole è al centro, l'orbita della Terra è rappresentata dal cerchio interno e quella di un pianeta da quello esterno) valgono le equazioni III.2.2 e III.2.3 con τ_T al posto di τ_S (essendo la velocità angolare della Terra maggiore di quella del pianeta per la terza legge di Keplero) e con τ_p al posto di τ_M .

Si dice che la Terra ed il pianeta sono in congiunzione quando i punti S, T, P sono allineati; sono in opposizione quando il pianeta giace sempre sulla linea Sole-Terra ma dalla parte opposta al Sole.

Poichè l'intervallo fra due successive congiunzioni è il periodo sinodico del pianeta e poichè il periodo orbitale della Terra è 1 anno, si ottiene la seguente relazione fra periodo orbitale, τ_p , e sinodico, $T_p = t_2 - t_1$, del pianeta:

$$\frac{1}{\tau_p} = 1 - \frac{1}{T_p} \quad (\text{III.61})$$

Le formule che abbiamo derivato per descrivere il moto di un pianeta attorno il Sole sono applicabili anche per descrivere il moto della Luna attorno alla Terra. Si usa un sistema geocentrico e si definisce periodo sinodico l'intervallo fra due successive "lune nuove" (congiunzione Terra, Luna e Sole). Si ha "luna nuova" quando le longitudini geocentriche del Sole e della Luna sono le stesse. Adesso si usa un sistema geocentrico ed il Sole come "satellite esterno" ($\tau_S = 365$ giorni). Essendo il periodo siderale della Luna, $\tau_L = 27.3$ giorni, dalla III.60 siderale deriva che il periodo sinodico della Luna è di 29.5 giorni.

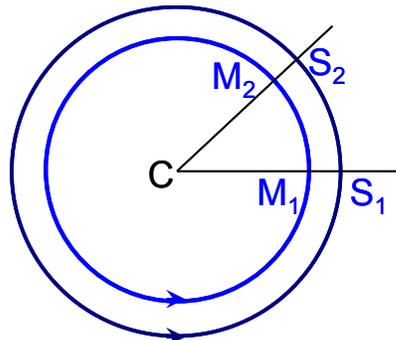


Figura III.2.2: Si rappresentano il centro della Terra (C) e le posizioni di un meridiano (M) e di un satellite (S).

III.2.4 Diagrammi d'orbita

Un diagramma d'orbita è la traccia dei punti formati dall'intersezione del vettore posizione del satellite con la superficie della Terra. Il numero di orbite che un satellite fa in un giorno è $1440/\tau_{\text{SAT}}$ (il periodo del satellite è misurato in minuti). Durante ogni orbita la terra ruota di

$$\frac{360 \times \tau_{\text{SAT}}}{1440} = \frac{\tau_{\text{SAT}}}{4} \text{ gradi} \quad (\text{III.62})$$

Ad esempio, durante un'orbita dello Shuttle, che è di circa 90 minuti, lo spostamento in gradi della Terra è di 22.5 gradi. Il corrispondente diagramma d'orbita è riportato in Figura III.2.3.

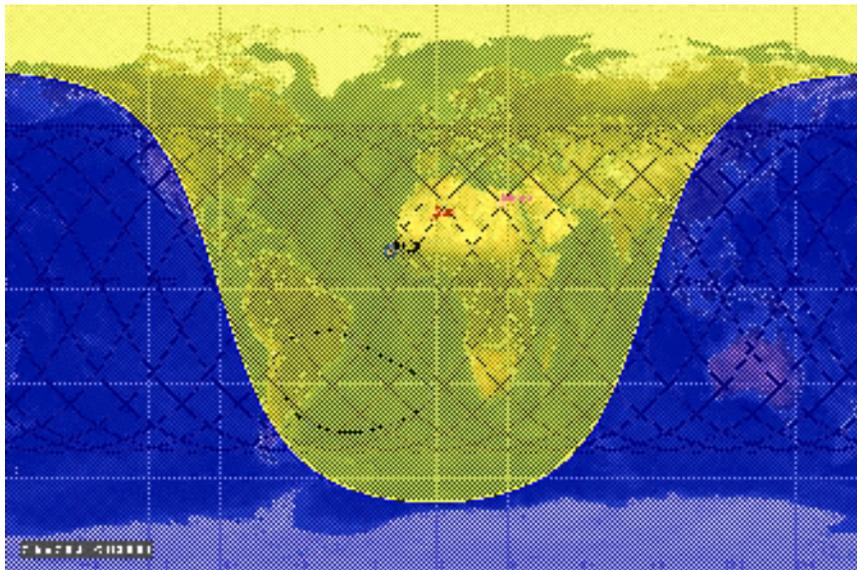


Figura III.2.3: Diagramma d'orbita della ISS (International Space Station) nella proiezione di Mercatore.

III.2.5. Orbite Lagrangiane

Le orbite che abbiamo trattato finora sono orbite kepleriane dedotte dalle leggi del moto dei due corpi. C'è una classe di orbite, semplici da trattare, che si deducono dalle leggi del moto dei tre corpi: le orbite Lagrangiane. Come si può vedere dalla Figura III.2.4, i "punti di Lagrange" o di "librazione" fra due corpi celesti che ruotano l'uno attorno all'altro (Terra e Luna) sono i cinque punti tali che un oggetto posto su uno di essi è in equilibrio. I tre punti di Lagrange che giacciono sulla congiungente Terra-Luna sono punti di equilibrio instabile; ogni piccola perturbazione fa allontanare l'oggetto. Invece i punti L4 e L5 che formano triangoli equilateri con la Terra e la Luna sono punti di equilibrio stabile.

Un satellite posto vicino un punto Lagrangiano L4 o L5, se ha la corretta velocità, rimane fisso nella stessa posizione rispetto la Terra e la Luna. Questi punti sono le possibili locazioni delle colonie permanenti nello spazio. Un esempio di sistemi posti in punti Lagrangiani sono 14 asteroidi chiamati "troiani" che sono situati in un punto Lagrangiano stabile del sistema Giove-Sole.

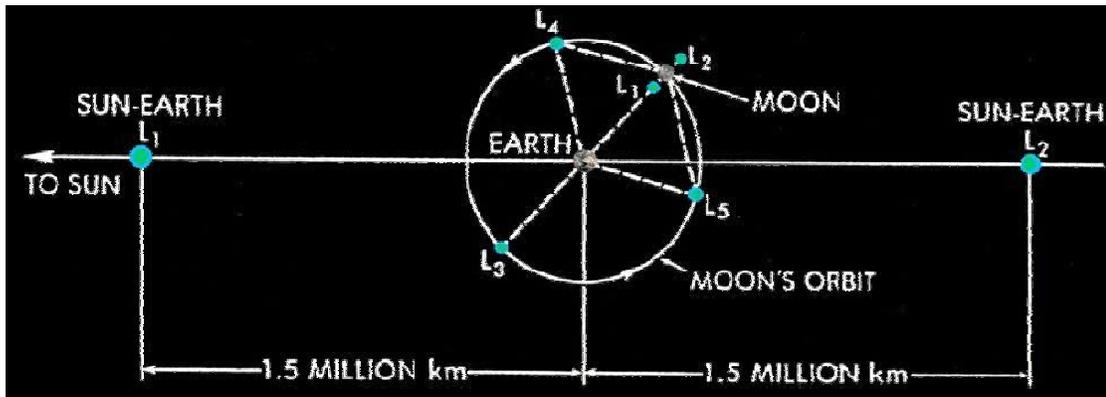


Figura III.2.4: Punti Lagrangiani del sistema Terra-Luna e Sole-Terra.

III.2.6. Sonde interplanetarie

Abbiamo visto che ogni oggetto che si muove su un'orbita ellittica attorno un pianeta è un satellite del pianeta. Se la velocità dell'oggetto è maggiore della velocità di fuga dal pianeta, allora l'oggetto è una "sonda interplanetaria" che viaggia con traiettoria iperbolica relativamente al pianeta e che, dopo averlo lasciato, viaggia con orbita parabolica attorno al Sole. Infine se tale oggetto acquista energia sufficiente per sfuggire all'attrazione gravitazionale del Sole, esso diventa una "sonda interstellare".

III.3. Cambiamenti d'orbita

III.3.1. Ellissi di trasferimento di Hohmann

Si tratta di determinare la traiettoria di minima energia per lo spostamento di un satellite da un'orbita ad un'altra. Il problema per orbite complanari fu studiato da W. Hohmann. Si considera dapprima il caso di trasferimento da un'orbita terrestre ad un'orbita su un'altro pianeta. Si assume che le orbite dei pianeti siano circolari e complanari. Hohmann dimostrò che la traiettoria che richiede meno energia è quella in cui il satellite lascia la Terra in direzione tangente all'orbita terrestre ed entra nell'orbita dell'altro pianeta tangenzialmente all'orbita di quest'ultimo. In Figura III.3.1 sono date rappresentazioni di orbite di trasferimento da una orbita LEO (Low Earth Orbit) ad una GEO (GEOstationary orbit) tramite una GTO (Geostationary Transfer Orbit).

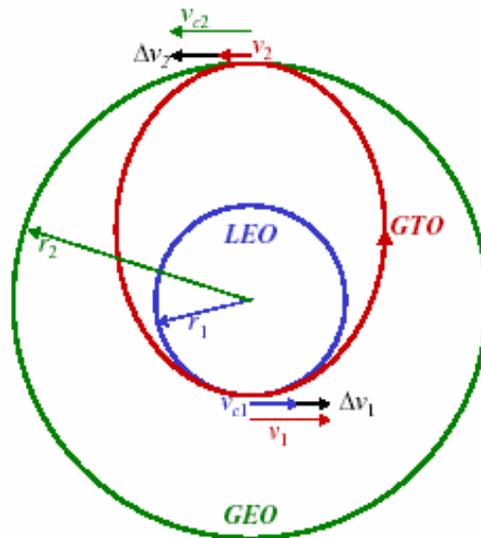


Figura III.3.1: Orbite di Hohmann da una LEO ad una GEO tramite una GTO.

Un fattore non trascurabile per il trasferimento di orbite è la scelta del periodo di lancio. Nel caso di trasferimento dall'orbita terrestre all'orbita di un'altro pianeta bisogna calcolare esattamente le posizioni relative dei pianeti; il pianeta dove si vuole trasferire l'orbita deve arrivare all'apside dell'orbita di trasferimento allo stesso istante del satellite. Per esempio le posizioni relative della Terra e di Venere soddisfano questi requisiti ogni 19 mesi; quelle della Terra e Marte ogni 24 mesi.

Gli stessi argomenti valgono per il trasferimento di un satellite tra due orbite circolari e complanari. In Tabella III.3.1 sono dati le equazioni ed i valori numerici che si riferiscono al trasferimento di un satellite da un'orbita circolare bassa di raggio $r_A=6570$ km ad un'orbita circolare geostazionaria di raggio $r_B=42160$ km.

Parametri ed equazioni	Valori numerici
r_A	6570 km
r_B	42160 km
$a = \frac{r_A + r_B}{2}$	24365 km
$v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}}$	7.79 km/s
$v_B = \sqrt{\frac{\mu}{r_B}}$	3.08 km/s
$v_{TA} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right)}$	10.25 km/s
$v_{TB} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_B} - \frac{1}{a} \right)}$	1.59 km/s
$\Delta v_A = v_{TA} - v_A $	2.46 km/s
$\Delta v_B = v_{TB} - v_B $	1.49 km/s
$\Delta v_{tot} = \Delta v_A + \Delta v_B$	3.95 km/s
$transfer = t_t = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$	315 min

Tabella III.3.1: Trasferimento di Hohmann

Si possono avere anche traiettorie più corte e che richiedono meno tempo per il trasferimento. Per queste orbite corte si richiede un maggior consumo di energia. L'energia necessaria aumenta inversamente con il tempo impiegato per il trasferimento. Il vantaggio di un'orbita corta è che è più facile guidare il satellite; lo svantaggio è che il carico di combustibile necessario va ad occupare spazio che altrimenti sarebbe usato per altri carichi come, ad esempio, la strumentazione scientifica.

Le traiettorie più corte richiedono che le orbite di trasferimento intersechino entrambe le orbite circolari. In Figura III.3.2 sono schematizzate alcune orbite possibili ed impossibili. Nelle orbite possibili la distanza del periapside dell'orbita di trasferimento deve essere minore o uguale al raggio dell'orbita circolare interna e la distanza dell'apoapside deve essere maggiore o uguale al raggio dell'orbita circolare esterne secondo le seguenti relazioni:

$$r_{peri} = \frac{p}{1+e} \leq r_1$$

$$r_{apo} = \frac{p}{1-e} \geq r_2$$

(III.63)

r_{peri} e r_{apo} sono le distanze del periapside e apoapside rispettivamente. Nel diagramma eccentricità - latus rectus di Figura III.3.3, l'area tratteggiata indica le coppie di valori (p, e) che soddisfano le condizioni III.63 e che quindi permettono il trasferimento d'orbita. I valori di p ed e sulle linee di bordo corrispondono a trasferimenti tangenti alle orbite circolari.

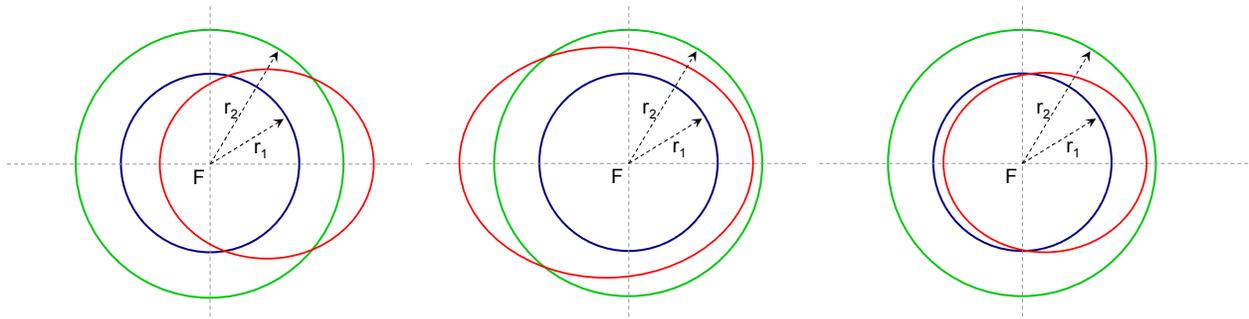


Figura III.3.2: Orbite di trasferimento possibili ed impossibili. L'orbita a sinistra è possibile perchè $r_{\text{peri}} < r_1$ e $r_{\text{apo}} > r_2$; l'orbita in mezzo è impossibile perchè $r_{\text{peri}} > r_1$; l'orbita a destra è impossibile perchè $r_{\text{apo}} < r_2$.

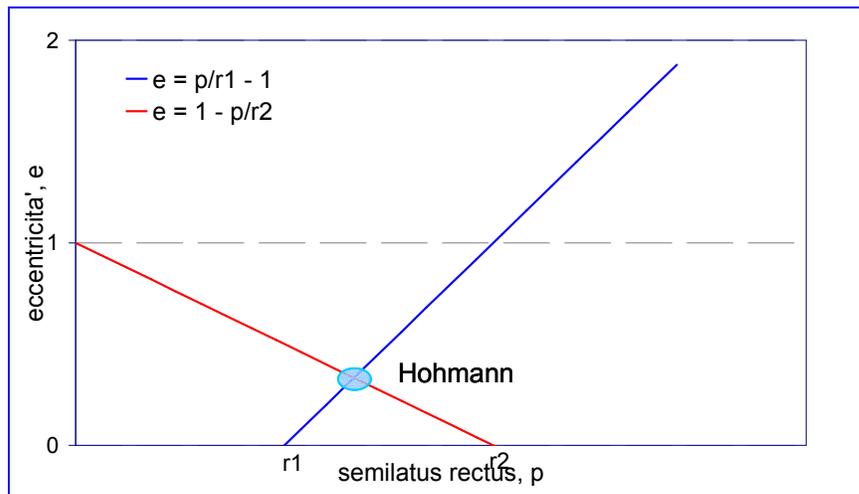


Figura III.3.3: Diagrammi p-e.

III.3.2. Variazioni del piano dell'orbita

Per variare l'inclinazione di un'orbita bisogna modificare il vettore velocità con una componente Δv perpendicolare al piano dell'orbita. In figura III.3.5 vengono rappresentate due possibili diagrammi vettoriali che corrispondono ad una variazione del piano senza modifica della dimensione dell'orbita ed una variazione sia del piano che della dimensione dell'orbita rispettivamente.

Cambiamenti di orbita sono molto dispendiosi in termini di energia richiesta. Per minimizzare l'energia si cambia il piano nella fase di minima velocità del satellite,

cioà all'apogeo. In altri casi si lancia il satellite su un'orbita più alta di quanto richiesto dalla missione per poi scendere all'orbita voluta.

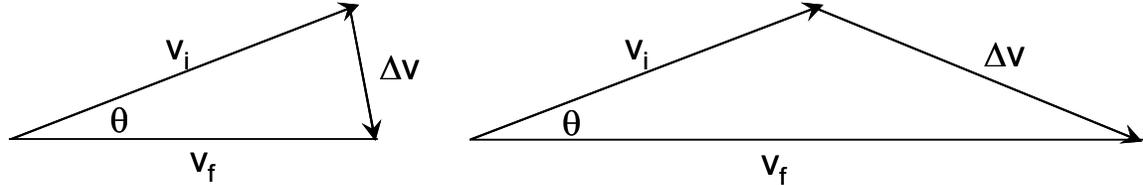


Figura III.3.5: Rappresentazione vettoriale di variazioni "semplici" (i moduli delle velocità iniziali e finali sono gli stessi) e "combinate". Quest'ultime corrispondono a variazioni sia di inclinazione che di dimensioni del piano orbitale del satellite.

Si dà di seguito un esempio di cambiamento sia di piano che di inclinazione di un'orbita: da una LEO inclinata ad un'orbita geostazionaria equatoriale. Si possono considerare due possibili strategie per l'operazione. La prima consiste nel fare il cambiamento in due passi successivi: un trasferimento del tipo Hohmann per cambiare altezza dell'orbita ed una variazione di inclinazione del piano. La seconda consiste nel combinare assieme i due movimenti.

Nel primo caso, prendendo come esempio il caso descritto nel paragrafo precedente e quantificato in Tabella III.3.1, abbiamo visto che la variazione di velocità necessaria per entrare in un'orbita geosincrona è di 3.95 km/s. Dall'orbita geosincrona, per variare i , si deve incrementare il modulo della velocità di ulteriori 1.49 km/s. Questo valore si ottiene da semplici relazioni geometriche illustrate in Figura III.3.5, ricordando che i deve variare da un valore di 28° a 0° . La variazione totale del modulo di velocità è allora $\Delta v_{tot} = 5.54$ km/s.

Nel secondo caso, per valutare la variazione di velocità nel caso di moto combinato si usa la seguente equazione che si deriva dalla Figura III.3.5:

$$\Delta v_{tot}^2 = v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \theta \quad (III.64)$$

Usando i valori di v_i e v_f dati in Tabella III.3.1 ed un valore di $\theta = 28^\circ$, si ottiene $\Delta v_{tot} = 4.29$ km/s, un valore più conveniente, in termini di energia, del precedente.

III.3.3. "Appuntamenti" in orbita

Il trasferimento da un'orbita ad un'altra diventa più complicato se bisogna "intercettare" un'altro oggetto. Bisogna che l'intercettore ed il "bersaglio" arrivino contemporaneamente al punto di "rendez-vous". Il caso di due orbite circolari e complanari è illustrato in Figura III.3.6. L'intercettore rimane nell'orbita iniziale (di raggio r_1) finchè il moto relativo dell'intercettore e del bersaglio (che ha un'orbita circolare di raggio $r_2 > r_1$) ha la geometria desiderata. Il tempo necessario si chiama "tempo di attesa", ed è definito dalla III.65:

$$t_W = \left| \frac{\phi_i - \phi_f - 2k\pi}{\omega_{in} - \omega_{ber}} \right| \quad (III.65)$$

dove ϕ_i è l'angolo di separazione iniziale fra intercettore e bersaglio, ϕ_f è l'angolo di separazione necessario per il "rendez-vous", k è il numero delle opportunità di "rendez-vous" (per la prima opportunità, $k = 0$), ω_{in} e ω_{ber} sono le velocità angolari di intercettore e bersaglio rispettivamente. L'angolo α_L (vedi Figura III.3.6, $\phi_{in} = 0$)

$$\alpha_L = \omega_{ber} t_H \quad (III.66)$$

è detto l'angolo di precedenza (in inglese "lead angle"). Il tempo di volo per un trasferimento di Hohmann è indicato con t_H .

All'istante t_0 si fa partire l'intercettore su un'orbita di Hohmann. Il tempo totale di "rendez-vous" è allora dato da

$$t_{tot} = t_0 + t_H \quad (III.67)$$

Il denominatore della III.65 rappresenta il moto relativo fra intercettore e bersaglio. Se le due orbite sono poco differenti, il denominatore diventa molto piccolo ed il tempo di attesa molto grande; al limite diventa infinito quando le due orbite sono uguali. In quest'ultimo caso, i due satelliti non si possono mai intercettare e l'intercettore deve cambiare orbita per centrare il bersaglio. Se l'intercettore è dietro il bersaglio; per raggiungerla deve immettersi in un'orbita ellittica "interna" con periodo uguale al tempo necessario a raggiungere il punto di "rendez-vous" da parte del bersaglio. Per un intercettore situato davanti il bersaglio il cambiamento d'orbita deve avvenire "esternamente" con vincoli simili a quelli del precedente caso.

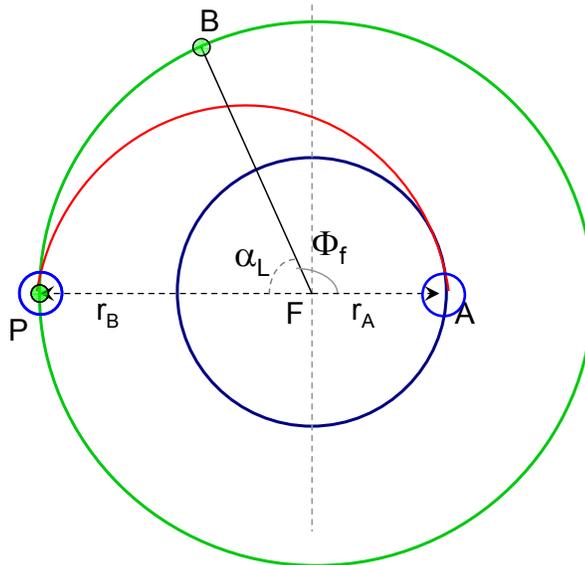
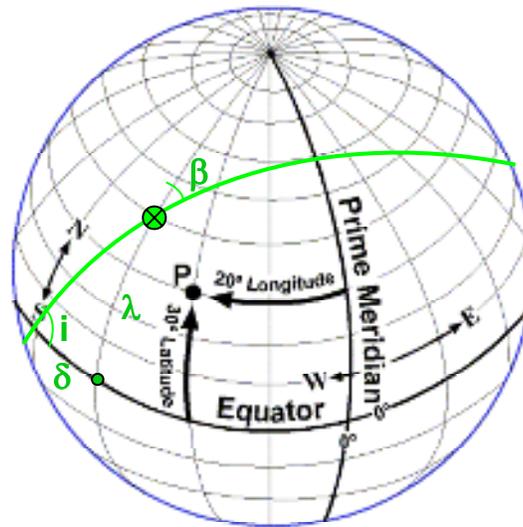


Figura III.3.6: Geometria di "rendez-vous" fra due orbite circolari e complanari.

III.3.4. Finestre di lancio

Il problema è simile a quello degli appuntamenti in orbita: bisogna determinare l'esatto istante di lancio (finestra di lancio) per l'immissione del satellite nel piano orbitale voluto. Poichè il piano orbitale è fisso nello spazio inerziale, la finestra di lancio è l'istante in cui sito di lancio sulla superficie della Terra ruota attraverso il piano dell'orbita scelto. Dalla Figura III.3.7 si vede che la finestra di lancio dipende dalla latitudine e longitudine del sito di lancio e dall'inclinazione dell'orbita. Il fatto che il sito di lancio deve passare attraverso il piano orbitale, pone restrizioni sui valori dell'inclinazione dell'orbita possibili dalla latitudine del sito di lancio:

- non si hanno finestre di lancio per $\lambda > i$ per orbite dirette o per $\lambda > 180^\circ - i$ per orbite retrograde,
- si ha una finestra di lancio per $\lambda = i$ o $\lambda = 180^\circ - i$,
- si hanno due finestre di lancio per $\lambda < i$ o $\lambda < 180^\circ - i$.



Tony Kirvan 11-8-97

Figura III.3.7: Geometria della "finestra di lancio" per lanci vicini al nodo ascendente.

L'azimuth di lancio, β , è l'angolo misurato in senso orario da nord al vettore velocità. Se esiste una finestra di lancio, la relazione che lega l'angolo di azimuth all'inclinazione dell'orbita ed alla latitudine del sito di lancio è

$$\sin \beta = \frac{\cos i}{\cos \lambda} \quad (\text{III.68})$$

Definiamo adesso gli angoli δ fra il nodo dell'orbita più vicino (ascendente o discendente) e la longitudine del sito di lancio, misurato sul piano equatoriale, e LST (local sidereal time) misurato all'istante del lancio fra il punto γ e la longitudine del sito di lancio. Valgono le seguenti relazioni (δ è positivo per orbite dirette e negativo per orbite retrograde, Ω è l'ascensione retta del nodo ascendente dell'orbita):

$$\cos \delta = \frac{\cos \beta}{\sin i}$$

$$LST = \Omega + \delta \quad (\text{III.69})$$

$$LST = \Omega + 180^\circ - \delta$$

Resta da valutare con che velocità dobbiamo lanciare da Terra il satellite affinché arrivi in orbita con la velocità giusta. Se si indica con v_0 la velocità a fine combustione (velocità di "burnout") e si adotta un sistema di coordinate topocentrico sul piano dell'orizzonte si ha

$$v_{sud} = -v_0 \cos \phi \cos \beta$$

$$v_{est} = v_0 \cos \phi \sin \beta - v_\lambda \quad (\text{III.70})$$

$$v_z = v_0 \sin \phi$$

dove ϕ è l'angolo della traiettoria al "burnout", β è l'azimuth di lancio e $v_\lambda = 464.5 \cos \lambda$ m/s è la velocità della Terra al sito di lancio. L'equazione (III.70) non include le perdite di velocità dovute agli attriti e alla gravità. Tali perdite sono di circa 1500 km/s. Si può calcolare la velocità di "burnout" dall'equazione dell'energia se si conosce il semiasse maggiore dell'orbita e il raggio dell'orbita al "burnout".

III.3.5 Aggiustamenti dell'orbita

Spesso è necessario correggere l'orbita quando forze perturbative ne hanno modificato i parametri. Si considerano due casi: il primo è il caso di un satellite che deve avere tracce a terra ripetibili; il secondo è quello di un satellite in un'orbita equatoriale geosincrona.

Per avere "ground tracks" ripetibili, un satellite deve avere un numero intero di rivoluzioni per numero intero di giorni. Il periodo del satellite deve essere:

$$\tau = \frac{m}{k} \quad (\text{III.71})$$

dove m è il numero di giorni siderali (1 giorno siderale ha 1436.068046 minuti) e k è il numero di rivoluzioni. Ad esempio, un satellite che orbita attorno alla Terra 16 volte al giorno (siderale) avrà un periodo di 89.75 minuti ed un semiasse maggiore di 6640 km.

Per tener conto dello spostamento del piano orbitale dovuto alla non sfericità della Terra, si calcola la variazione, $\Delta\Omega$, dell'ascensione retta del nodo ascendente. Il nuovo periodo diventa:

$$\tau_N = \tau + \frac{\Delta\Omega}{\omega_{\text{Terra}}} \quad (\text{III.72})$$

Se si usa l'esempio dato precedentemente e si assume un'orbita di altezza del perigeo di 120 km ed inclinazione di 45 gradi, il nuovo periodo diventa di 88.20 minuti ed il semiasse maggiore è 6563 km.

Si deve tener conto anche della rotazione del perigeo attorno l'orbita soprattutto se l'orbita è non-circolare e la missione impone limiti di altezza del perigeo sopra punti specifici, Una possibilità è di scegliere l'inclinazione dell'orbita in modo che l'inclinazione del perigeo sia fissa. Ciò si ottiene quando $\dot{\omega} = 0$, cioè con $i = 63.4^\circ$ per un'orbita diretta e $i = 116.4^\circ$ per un'orbita retrograda. Se altri vincoli rendono questa scelta impossibile, allora bisogna mantenere l'orbita con manovre orbitali.

Si può modificare la posizione del perigeo variando l'angolo della traiettoria di una quantità $\delta\vartheta$. Si agisce unicamente sulla direzione del vettore velocità; si deriva il $|\delta v'|$ dall'equazione del cambiamento di piano di un'orbita (III.64).

Un ulteriore motivo di degradazione di un'orbita LEO che deve avere "ground tracks" ripetibili è l'attrito atmosferico ("atmosferic drag") che provoca la riduzione del semiasse maggiore. Poiché il periodo diminuisce con a , la traccia appare spostata verso est. La corrispondente variazione di periodo è:

$$\delta\tau = 2\pi\delta\left(\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\right) = \frac{3\pi\delta a}{a} \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (\text{III.73})$$

dove $\sqrt{\mu/a^3}$ è la velocità angolare media di un'orbita ellittica.

In quest'ultimo caso bisogna tenere sotto controllo sia a che $\delta\tau$ fino al momento in cui è necessaria una correzione. Allora si agisce sulla velocità tangenziale quando il satellite è al perigeo.

Per orbite circolari di raggio a , le variazioni per orbita sono:

$$\begin{aligned} \Delta a &= -\frac{2\pi\rho a^2}{C_B} \\ \Delta\tau &= -\frac{6\pi^2\rho a^2}{C_B v} \\ \Delta v &= \frac{\pi\rho a v}{C_B} \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

dove v è la velocità circolare e $C_B = m/(C_{DA})$ è il coefficiente balistico.

Per le orbite equatoriali geosincrone le sole perturbazioni sono dovute alla non sfericità della Terra ed all'interazione gravitazionale con il Sole e la Luna.

La prima produce un'accelerazione trasversale, cioè nel piano dell'orbita, che risulta in un moto periodico attorno uno dei due valori stabili di longitudine: a circa

75° e 225° di longitudine est. Se il satellite è posto ad una longitudine qualsiasi, tenderà a spostarsi verso la longitudine stabile più vicina. Il moto si chiama "East-West drift" e può raggiungere anche i 180 gradi e periodi di 900 giorni. Per compensare tale effetto, se un satellite deve stare alla longitudine l , bisogna variare la velocità del satellite di

$$\Delta v = 1.715 \text{sen}(2|l - l_s|) \text{ m/s/anno} \quad (\text{III.75})$$

dove l_s è la longitudine del punto stabile più vicino.

Il Sole e la Luna causano un'accelerazione perpendicolare al piano dell'orbita che produce uno "North-South drift". Se α è l'angolo fra fra il piano delle orbite della Luna e del satellite e γ l'angolo fra l'eclittica ed il piano dell'orbita, le equazioni approssimate per le correzioni in velocità (in m/s/anno) sono:

$$\Delta v_{Luna} = 102.67 \cos \alpha \text{sen } \alpha$$

$$\Delta v_{Luna} \approx 36.93, i = 0^\circ$$

(III.76)

$$\Delta v_{Sole} = 40.17 \cos \gamma \text{sen } \gamma$$

$$\Delta v_{Sole} \approx 14.45, i = 0^\circ$$

Dopo il completamento di una missione, si può voler far rientrare il satellite o lasciando decadere l'orbita se si tratta di un'orbita bassa, oppure variando la velocità per accelerare il processo. Oppure si può trasferirlo in un'orbita che non possa disturbare altri esperimenti.