Università di Trieste - Facoltà di Ingegneria
A.A. 1999-00 - Sessione Invernale
Prova scritta di Fisica Generale I del 13-01-00

Esercizio 1

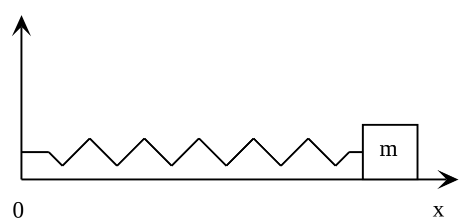
Un corpo puntiforme di massa m è posto all'estremo libero di una molla ideale di lunghezza a riposo ℓ e oscilla su un piano orizzontale privo di attrito. Osservando che l'ampiezza del moto armonico è d, e l'accelerazione all'estremo destro della traiettoria vale a, si calcoli:

a) la frequenza di oscillazione;

b) la velocità del corpo nella posizione di equilibrio.

c) Si scriva la relazione tra la forza agente sul punto materiale e la posizione del corpo nel sistema di riferimento dato, e la relazione più generale che esprime la forza in funzione del tempo.

Si assuma nei calcoli: $m = 1.0$ g, $d = 2.0$ mm, $a = -8.0\ 10^3$ m/s^2.



Svolgimento:

a) Nel punto di coordinata $x = \ell + d$ l'accelerazione vale $a = -\omega^2 d$, da cui

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{|a|}{d}} = 3.18\ 10^2\ \text{Hz}.$$

b) Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica. L'energia è puramente potenziale all'estremo della traiettoria e puramente cinetica quando il corpo attraversa la posizione di equilibrio:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2$$

da cui

$$v = \omega d = \sqrt{|a|d} = 4.0\ \text{m/s}$$

c)

$$
\begin{aligned}
F(x) &= -m\omega^2(x-\ell) \\
F(t) &= -m\omega^2[x(t)-\ell] = -m\omega^2 d\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

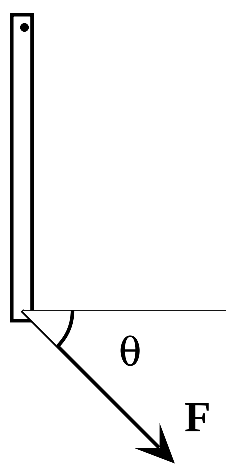
Una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa M si trova in posizione verticale ed è incernierata all'estremo superiore. L'estremità libera è colpita da una forza impulsiva di intensità F per una durata temporale τ. Calcolare:

a) il momento angolare acquisito dalla sbarra;

b) il valore massimo U_0 dell'energia potenziale della sbarra e la corrispondente posizione h del centro di massa;

c) la reazione vincolare a cui è sottoposta la sbarra nel momento in cui si ferma nel punto più alto.

Si assuma nei calcoli: $\ell = 1.0$ m, $M = 2.5$ kg, $F = 150$ N, $\theta = 45°$, $\tau = 2.0\ 10^{-2}$ s, $g = 9.81$ m/s^2.



Svolgimento:

a) Rispetto al punto in cui la sbarra è incernierata $I\alpha = M^{(e)} = F\cos\theta\ell$. Scrivendo $\alpha = \Delta\omega/\tau$, si ha

$$L = I\Delta\omega = F\cos\theta\ell\tau = 2.12\ \text{Nms}.$$

b) Usiamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{F^2\tau^2\cos^2\theta\ell^2}{2I} = \frac{F^2\tau^2\cos^2\theta\ell^2}{2\lambda\int_0^\ell x^2dx} = \frac{3F^2\tau^2\cos^2\theta}{2M} = \\ &= 2.7 \text{ J}, \\ h &= \frac{U_0}{Mg} = \frac{3F^2\tau^2\cos^2\theta}{2M^2g} = 0.11 \text{ m}. \end{aligned}$$

c) Scriviamo la I equazione cardinale della dinamica nel momento in cui la sbarra si ferma in alto: $\mathbf{R} + M\mathbf{g} = M\mathbf{a}$. Detto ϕ l'angolo che la sbarra forma con la verticale nel momento in cui la sbarra si ferma in alto, per l'accelerazione del centro di massa si ha $a = \alpha\ell/2$ con direzione tangente al cerchio di raggio $\ell/2$ e centro sul perno:

$$\mathbf{a} = -\alpha\frac{\ell}{2}(\cos\phi, \sin\phi).$$

L'accelerazione angolare segue dalla II equazione cardinale della dinamica: $I\alpha = Mg\sin\phi\ell/2$. L'angolo ϕ viene da considerazioni geometriche:

$$\frac{\ell}{2}\cos\phi = \left(\frac{\ell}{2} - h\right),$$

$\phi = \arccos(1 - 2h/\ell)$. Si ottiene quindi

$$\mathbf{R} = M\mathbf{a} - M\mathbf{g} = -Mg\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{12}, \frac{\sin^2\phi}{12} - 1\right) = (-0.996, 23.7) \text{ N}.$$

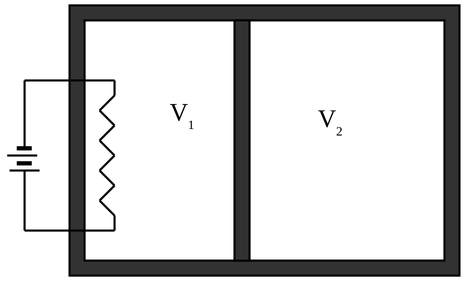
Esercizio 3

Un cilindro isolato termicamente di volume V_0 è diviso in due parti da un setto adiabatico in grado di scorrere senza attrito. Nella prima camera vi sono n moli di un gas perfetto biatomico, nella seconda vi siano $2n$ moli dello stesso gas. Inizialmente le due sezioni hanno la stessa temperatura T_0 e sono all'equilibrio meccanico. Con un processo quasi statico si somministra calore alla prima sezione finché i due volumi risultano uguali. Si calcoli:

a) pressione e temperatura delle due sezioni, prima e dopo il processo;

b) il calore fornito e la variazione di entropia delle due sezioni;

c) la temperatura T_e che il sistema raggiunge dopo la rimozione del setto di separazione.



Si assuma nei calcoli: V_0=30 L, n=1.0, T_0=300 K.

Svolgimento:

a) consideriamo la sezione del cilindro che viene compressa. Si avrà:

$$\begin{aligned}
T_0\left(\frac{2}{3}V_0\right)^{\gamma-1} &= T_2\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma-1} \\
T_2 = T_0\left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma-1} &= 336.6 \text{ K} \\
\Delta U_2 = 2nC_V(T_2 - T_0) &= 2nC_V T_0\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \\
L_2 &= -\Delta U_2
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la pressione

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{3nRT_0}{V_0} = 2.49\ 10^5 \text{ Pa} \\
P_2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma} P_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma}\frac{3nRT_0}{V_0} = 3.73\ 10^5 \text{ Pa}
\end{aligned}$$

e sono le stesse pressioni che si trovano nella prima sezione. Si ha allora $P_1V_0/2 = nRT_1$ da cui

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma}\frac{P_0V_0}{2nR} = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma} T_0 = 2T_2 = 673.2 \text{ K} \\
\Delta U_1 &= nC_V(T_1 - T_0) = nC_V T_0\left[2\left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \\
L_1 &= -L_2.
\end{aligned}$$

b) Per quanto riguarda il calore e l'entropia

$$Q = \Delta U_1 + L_1 = \Delta U_1 + \Delta U_2 = nC_V(4T_2 - 3T_0)$$

$$
\begin{aligned}
&= 3nC_V T_0 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^{\gamma} - 1 \right] = 9.28\ 10^3 \text{ J} \\
\frac{\delta Q}{T} &= \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \\
S_1 - S_0 &= nC_V \ln \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^{\gamma} + nR \ln \frac{3}{2} = nC_P \ln \frac{3}{2} + \gamma n C_V \ln \frac{4}{3} = \\
&= 20.2 \text{ J/K}
\end{aligned}
$$

c) Il processo in questione equivale alle due espansioni libere isoterme seguite dal contatto termico. La temperatura di equilibrio vale

$$
T_e = \frac{nT_1 + 2nT_2}{3n} = \frac{4}{3} T_2 = \left(\frac{4}{3} \right)^{\gamma} T_0 = 448.8 \text{ K}
$$