1 Problema 1

1.1 domanda (a)

Le forze applicate al corpo, quando esso si trova in C'' nel tratto $\overline{CC'}$ a contatto con la molla, sono, nella discesa: la forza di gravita‘ $\vec{F}_g$, la reazione normale del piano $\vec{R}_n$, la forza di attrito $\vec{F}_a$, la forza elastica $\vec{F}_e$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= m\vec{g} = mg\sin\theta\hat{\imath} + mg\cos\theta\hat{\jmath} &(1)\\ \vec{R}_n &= -mg\cos\theta\hat{\jmath} &(2)\\ \vec{F}_a &= -\mu_d|R_n|\hat{\imath} = -\mu_d mg\cos\theta\hat{\imath} &(3)\\ \vec{F}_e &= -kx\hat{\imath}, &(4) \end{aligned}$$

avendo introdotto due versori $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ (Figura 1) per le direzioni rispettivamente parallela e normale al piano inclinato, e coordinate x a partire dal punto C, preso come origine per ottenere la forma piu‘ semplice per l'andamento della forza elastica $\vec{F}_e$ in funzione della posizione. Nello stesso punto C'', durante la risalita, le forze applicate al corpo sono uguali, ad eccezione della forza d'attrito, che ha verso opposto:

$$\vec{F'}_a = -\vec{F}_a = \mu_d mg\cos\theta\hat{\imath} \tag{5}$$

1.2 domanda (b)

Nel tratto in discesa $\overline{BC} = L\hat{\imath}$, per il teorema dell'energia cinetica, la variazione dell'energia cinetica e‘ uguale al lavoro totale delle forze applicate. Indicando con $\vec{v}_B = 0$ e $\vec{v}_C$ la velocita‘ iniziale e quella finale rispettivamente, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = &(6)\\ &= \frac{1}{2}mv_C^2 = L_{tot}(B\to C) = &(7)\\ &= (\vec{F}_g + \vec{R}_n + \vec{F}_a)\cdot\overline{BC} = &(8)\\ &= mgL(\sin\theta - \mu_d\cos\theta), &(9) \end{aligned}$$

utilizzando nei calcoli le componenti dei vettori definite sopra. Si ricava quindi la velocita‘ richiesta:

$$v_C = \sqrt{2gL(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)} = 2.85 m/s. \tag{10}$$

1.3 domanda (c)

Nel successivo tratto di percorso $\overline{CC'}$ agisce anche la forza elastica della molla, che a differenza delle altre non e' costante; il suo contributo al lavoro totale dev'essere valutato con un integrale. Anche qui conviene applicare il teorema dell'energia cinetica, per esempio tra le posizioni iniziale B e finale C', entrambe corrispondenti a velocita' nulle $\vec{v}_B = \vec{v}_{C'} = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta E_c &= \frac{1}{2}mv_{C'}^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = 0 = && (11)\\
&= L_{tot}(B \to C') = && (12)\\
&= (\vec{F}_g + \vec{R}_n + \vec{F}_a) \cdot \overline{BC'} + \int_0^{x_0} (-kx)dx = && (13)\\
&= mg(L + x_0)(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) - \frac{1}{2}kx_0^2 && (14)
\end{aligned}$$

Questa equazione di secondo grado nell'incognita x_0 puo' essere messa nella forma:

$$x_0^2 - 2Ax_0 - 2AL = 0 \tag{15}$$

con:

$$A = \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu_d \cos\theta) = 4.055 \times 10^{-3} m \tag{16}$$

da cui si ottiene come soluzione positiva fisicamente significativa:

$$x_0 = A + \sqrt{A^2 + 2AL} = A(1 + \sqrt{1 + 2\frac{L}{A}}) = 9.4 \times 10^{-2} m = 9.4 cm \tag{17}$$

1.4 domanda (d)

La perdita di energia cinetica e quindi di velocita' (al secondo passaggio $v'_C < v_C$) nel percorso chiuso $C \to C' \to C$, con $\overline{CC'} = x_0\hat{i} = -\overline{C'C}$ e' chiaramente dovuta alla sola forza di attrito, essendo tutte le altre forze conservative e quindi a lavoro nullo su un percorso ciclico. L'applicazione del teorema dell'energia cinetica fornisce quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta E_c &= \frac{1}{2}mv_C'^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = 0 = && (18)\\
&= L_{tot}(C \to C) = && (19)\\
&= \vec{F}_a \cdot \overline{CC'} + \vec{F'}_a \cdot \overline{C'C} = && (20)\\
&= (-\mu_d mg \cos\theta)x_0 + (\mu_d mg \cos\theta)(-x_0) = && (21)\\
&= -2\mu_d mg x_0 \cos\theta && (22)
\end{aligned}$$

da cui:

$$v'_C = \sqrt{v_C^2 - 4\mu_d m g x_0 \cos\theta} = 2.79 m/s \tag{23}$$

2 Problema 2

2.1 domanda (a)

Immediatamente dopo l'urto, il centro di massa ha le seguenti coordinate nel sistema di riferimento definito in Figura 2 (origine coincidente con il corpo puntiforme di massa m, asse y lungo l'asta rigida, asse x ad esso ortogonale e parallelo alla direzione iniziale del moto del dischetto di massa $3m$):

$$x_{cm} = 0 \tag{24}$$

$$y_{cm} = \frac{(m+3m)\cdot 0 + 2m \cdot L}{6m} = \frac{1}{3}L \tag{25}$$

2.2 domanda (b)

Essendo nulla la risultante delle forze esterne, si conserva la quantita' di moto totale e quindi la velocita' del centro di massa; questa puo' essere ad esempio ottenuta dalla quantita' di moto totale iniziale, divisa per la massa totale del sistema m_{tot}:

$$v_{x,cm} = \frac{P_{x,tot}}{m_{tot}} = \frac{3mv}{6m} = \frac{1}{2}v \tag{26}$$

$$v_{y,cm} = \frac{P_{y,tot}}{m_{tot}} = 0 \tag{27}$$

2.3 domanda (c)

Essendo nullo il momento risultante delle forze esterne, si conserva il momento angolare totale. Considerando come polo il centro di massa G si ottiene, per il momento angolare totale iniziale (i) e finale (f):

$$L_{G,i} = 3mv\frac{1}{3}L = mvL \tag{28}$$

$$L_{G,f} = I_G \omega_f \tag{29}$$

dove il momento d'inerzia I_G per il sistema totale, dopo l'urto, e':

$$I_G = (m + 3m)(\frac{1}{3}L)^2 + 2m(\frac{2}{3}L)^2 = \frac{4}{3}mL^2 \qquad (30)$$

da cui eguagliando si ottiene:

$$\omega_f = \frac{L_{G,i}}{I_G} = \frac{3v}{4L} \qquad (31)$$

2.4 domanda (d)

L'energia cinetica iniziale e':

$$K = \frac{1}{2}(3m)v^2; \qquad (32)$$

quella finale e', utilizzando la scomposizione in moto traslatorio del centro di massa e rotatorio attorno al centro di massa (teorema di Koenig, sostituendo le espressioni trovate per I_G e ω_f):

$$K' = \frac{1}{2}m_{tot}v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_f^2 = \frac{9}{8}mv^2. \qquad (33)$$

Quindi la frazione richiesta e':

$$\frac{K - K'}{K} = \frac{\frac{3}{2}mv^2 - \frac{9}{8}mv^2}{\frac{3}{2}mv^2} = \frac{1}{4}. \qquad (34)$$

3 Problema 3

3.1 Domanda (a)

Nella trasformazione reversibile AB il lavoro si puo' calcolare come integrale, numericamente uguale all'area del trapezio delimitato dalla linea AB nel piano (p, V):

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{V_A}^{V_B} pdV = && (35) \\ &= \frac{p_A + p_B}{2}(V_B - V_A) = && (36) \\ &= 3.0 litri \cdot atm = 304J && (37) \end{aligned}$$

Per un gas ideale biatomico il calore molare $C_V = (5/2)R$, dove R e' la costante universale dei gas, e vale l'equazione di stato:

$$pV = nRT \tag{38}$$

per cui la variazione di energia interna si puo' calcolare come:

$$\begin{aligned}
\Delta U_{AB} &= U_B - U_A = n\frac{5}{2}R(T_B - T_A) = &(39)\\
&= \frac{5}{2}nR(\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}) = &(40)\\
&= \frac{5}{2}(p_B V_B - p_A V_A) = &(41)\\
&= 23.7 litri \cdot atm = 2.41 \times 10^3 J &(42)
\end{aligned}$$

e, dal primo principio della termodinamica:

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = 2.71 \times 10^3 J \tag{43}$$

Nella seconda trasformazione BC, isoterma, $T_B = T_C$ e quindi l'energia interna non varia:

$$\Delta U_{BC} = 0 \tag{44}$$

allora, dal primo principio della termodinamica, utilizzando l'equazione di stato per eliminare la temperatura T_B esprimendola in funzione dei parametri noti:

$$\begin{aligned}
Q_{BC} &= L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} pdV = &(45)\\
&= nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = &(46)\\
&= p_B V_B \log \frac{V_C}{V_B} = &(47)\\
&= p_B V_B \log \frac{p_B}{p_C} = p_B V_B \log \frac{p_B}{p_A} &(48)\\
&= 13.2 litri \cdot atm = 1.34 \times 10^3 J &(49)
\end{aligned}$$

dove si e' fatto uso delle equazioni $p_B V_B = p_C V_C$ (isoterma BC) e $p_C = p_A$ (isobara CA) per ricondursi ai valori noti dei parametri.

Infine nella terza trasformazione CA, isobara, si ha:

$$L_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} pdV = p_A(V_A - V_C) = \quad (50)$$

$$= -9.5 litri \cdot atm = -9.63 \times 10^2 J \quad (51)$$

dove, come in precedenza, si sono usate le equazioni dell'isoterma e dell'isobara per ottenere $V_C = p_B V_B / p_C = p_B V_B / p_A = 12 litri$. La corrispondente variazione di energia interna e‘:

$$\Delta U_{CA} = nC_V(T_A - T_C) = \frac{5}{2} nR(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR}) = \quad (52)$$

$$= \frac{5}{2} p_A(V_A - V_C) = \quad (53)$$

$$= -23.7 litri \cdot atm = -2.41 \times 10^3 J \quad (54)$$

ed il calore scambiato Q_{CA} si puo‘ calcolare sia utilizzando il primo principio sia utilizzando il valore noto del calore molare a pressione costante per un gas ideale biatomico $C_p = (7/2)R$:

$$Q_{CA} = L_{CA} + \Delta U_{CA} = -3.37 \times 10^3 J \quad (55)$$

$$Q_{CA} = nC_p(T_A - T_C) = \frac{7}{2} p_A(V_A - V_C) = \quad (56)$$

$$= -33.2 litri \cdot atm = -3.37 \times 10^3 J \quad (57)$$

3.2 Domanda (b)

Il rendimento del ciclo vale e‘ dato dal rapporto tra lavoro totale del ciclo $L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = Q_{tot} = Q_{ass} + Q_{ced}$ e calore assorbito $Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{BC}$, o anche utilizzando il lavoro ceduto $Q_{ced} = Q_{CA}$:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = \quad (58)$$

$$= 1 + \frac{-3.37 \times 10^3}{(2.71 + 1.34) \times 10^3} = 0.168 \quad (59)$$

3.3 Domanda (c)

Essendo l'entropia una funzione di stato, la sua variazione totale su un ciclo e‘ nulla:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0 \quad (60)$$

per cui basta calcolare due delle tre variazioni per ottenere anche la terza, ad esempio:

$$\Delta S_{AB} = -(\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}) \tag{61}$$

Per completezza, calcoliamo separatamente le tre variazioni, partendo in ciascun caso dalla definizione e utilizzando le relazioni gia' acquisite:

$$\begin{aligned}
\Delta S_{AB} &= \int_A^B (\frac{dQ}{T})_{rev} = \int_A^B (\frac{pdV + dU}{T})_{rev} = & (62)\\
&= \int_A^B (\frac{nRT}{V}\frac{dV}{T} + nC_V\frac{dT}{T}) = & (63)\\
&= nR(\log\frac{V_B}{V_A} + \frac{5}{2}\log\frac{T_B}{T_A}) = 3.65J/K & (64)\\
\Delta S_{BC} &= \int_B^C (\frac{dQ}{T})_{rev} = \frac{Q_{BC}}{T_B} = 0.91J/K & (65)\\
\Delta S_{CA} &= \int_C^A (\frac{dQ}{T})_{rev} = nC_P\int_C^A \frac{dT}{T} = & (66)\\
&= n\frac{7}{2}R\log\frac{T_A}{T_C} = -4.56J/K & (67)
\end{aligned}$$

dove le temperature possono essere espresse in funzione delle grandezze note o esplicitamente ricavate come:

$$\begin{aligned}
T_A &= \frac{p_A V_A}{nR} = 305K & (68)\\
T_B &= T_C = \frac{p_B V_B}{nR} = 1463K & (69)
\end{aligned}$$