Università di Trieste - Facoltà di Ingegneria
A.A. 1999-00 - Sessione Estiva
Prova scritta di Fisica Generale I del 15-06-00

Esercizio 1

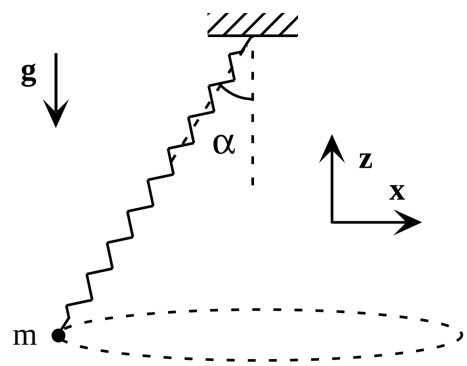
Un grave di massa m è sospeso all'estremo libero di una molla di costante elastica k. Con il corpo in quiete la molla si allunga di una quantità $\Delta\ell$. Si mette poi in rotazione il grave in un piano orizzontale lungo una traiettoria circolare di raggio R; sia α l'angolo tra l'asse della molla e la verticale. Si calcoli:

a) la costante elastica k della molla e la velocità del corpo;

b) la differenza di energia meccanica ΔE del sistema tra le configurazioni mobile e statica;

c) il lavoro $\mathcal{L}^{(e)}$ che si deve compiere dall'esterno per porre il corpo in rotazione e il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto da tutte le forze applicate al corpo.

Si assuma nei calcoli: $m = 0.10$ kg, $\Delta\ell = 7.5$ cm, $R = 15$ cm, $\alpha = 37°$.



Svolgimento:

a) Dal caso statico

$$k = \frac{mg}{\Delta\ell} = 13.1 \text{ N/m};$$

nel caso dinamico, detta ℓ_0 la lunghezza a riposo della molla e ℓ la lunghezza effettiva, le due componenti della prima equazione cardinale della Dinamica si scrivono:

$$k(\ell - \ell_0)\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \qquad k(\ell - \ell_0)\cos\alpha = mg,$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{R\,\Delta\ell\,k\,\tan\alpha}{m}} = \sqrt{R\,g\,\tan\alpha} = 1.05\ \mathrm{m/s};$$

b) se fosse $\ell_0 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\,g\,\tan\alpha\,(R + \Delta\ell\tan\alpha) = 7.63\ 10^{-2}\ \mathrm{J},\end{aligned}$$

mentre per $\ell_0 \neq 0$ bisogna tenere conto anche della variazione dell'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned}\ell &= \ell_0 + \frac{\Delta\ell}{\cos\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha} \\ \ell_0 &= \frac{R}{\sin\alpha} - \frac{\Delta\ell}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

e quindi fissare $\Delta\ell$, R e α equivale a fissare ℓ_0. Si ha quindi

$$\begin{aligned}mg\Delta z &= mg(\ell_0 + \Delta\ell - \ell\cos\alpha) = mg(1-\cos\alpha)\left(\frac{R}{\sin\alpha} - \frac{\Delta\ell}{\cos\alpha}\right) = \\ &= 3.07\ 10^{-2}\ \mathrm{J};\end{aligned}$$

c)

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,R\,g\,\tan\alpha = 5.54\ 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

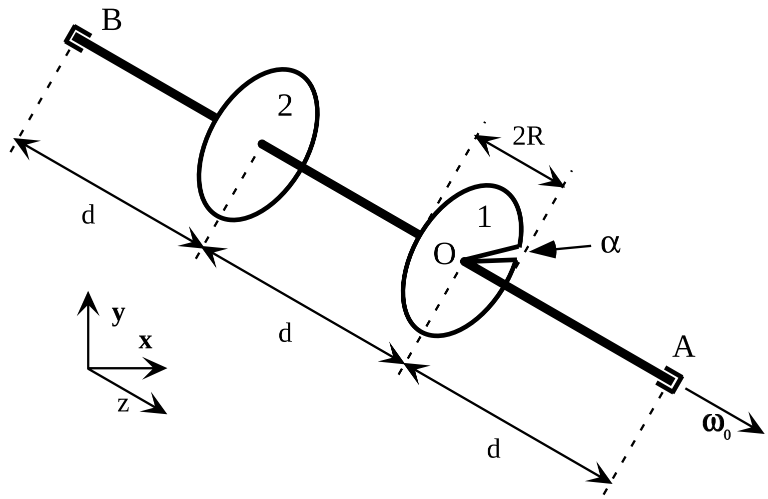
Esercizio 2

Due dischi di raggio R e densità superficiale di massa σ sono montati su uno stesso asse a distanza d tra loro e dai vincoli lisci che sostengono l'asse. Nel primo disco è praticata una fenditura triangolare di apertura angolare $\alpha \ll 1$ (il settore circolare è approssimabile con un triangolo), che all'istante $t = 0$ è orientata in direzione $\mathbf{x}$. Tutto il sistema ruota con velocità angolare ω_0. Supponendo trascurabile la forza di gravità si calcoli:

a) i momenti d'inerzia dei due dischi I_1 e I_2 rispetto all'asse di rotazione;

b) l'espressione in funzione del tempo delle forze $\mathbf{F}_1(t)$ e $\mathbf{F}_2(t)$ che l'asse esercita su ciascun disco;

c) l'espressione in funzione del tempo delle forze $\mathbf{F}_A(t)$ e $\mathbf{F}_B(t)$ che i vincoli esercitano sull'asse.



Si assuma nei calcoli: $R = 15$ cm, $\sigma = 0.10$ g/cm^2, $\alpha = 5°$, $\omega_0 = 1.8910^2$ rad/s.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 = 7.95\ 10^{-4}\ \text{kg m}^2 \\ I_1 &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) I_1 = 7.84\ 10^{-4}\ \text{kg m}^2. \end{aligned}$$

b) Detta

$$\mathbf{r}_1(t) = r_1\,(\cos\phi(t), \sin\phi(t), 0) = r_1\,(\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t, 0)$$

la posizione del centro di massa del disco 1 rispetto al centro di rotazione, si ha

$$\mathbf{F}_1(t) = m_1\,\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\omega_0^2\,\sigma\pi R^2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\,\mathbf{r}_1(t).$$

Per calcolare r_1 basta calcolare $\mathbf{r}_1$ a $t = 0$:

$$\mathbf{r}_1(0) = \frac{\sigma \int_0^R \int_{\frac{\alpha}{2}}^{2\pi - \frac{\alpha}{2}} \mathbf{r}\; r\; dr\; d\phi}{\sigma\pi R^2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \mathbf{r}\; r\; dr\; d\phi}{\pi R^2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)} - \frac{\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \mathbf{r}\; r\; dr\; d\phi}{\pi R^2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)};$$

per simmetria il primo termine è nullo, come anche la componente y del secondo. Essendo $\alpha \ll 1$ si ha $\cos\phi \approx 1$ e il calcolo si riduce quindi a

$$r_1 = -\frac{\displaystyle\int_0^R r^2\, dr \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\phi}{\pi R^2 \left(1 - \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)} = -\frac{\alpha R}{3\pi \left(1 - \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)}.$$

Si ha quindi

$$F_1 = -\omega_0^2\, \sigma \pi R^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\, r_1 = \frac{1}{3}\omega_0^2\, \alpha\sigma R^3 = 3.51 \text{ N}$$

$F_2(t) = 0$ giacché il disco ruota attorno al suo centro di massa.

c) Calcolato rispetto al centro del disco 1 il momento angolare del sistema è costante (ha la sola componente z). Il momento totale delle forze dovute ai vincoli, calcolato rispetto allo stesso punto, deve dunque essere nullo:

$$\mathbf{O}A \times \mathbf{F}_A(t) + \mathbf{O}B \times \mathbf{F}_B(t) = \mathbf{0}.$$

Contemporaneamente deve valere

$$\mathbf{F}_A(t) + \mathbf{F}_B(t) = \mathbf{F}_1(t).$$

Si ha quindi

$$\mathbf{F}_B(t) = \mathbf{F}_1(t) - \mathbf{F}_A(t)$$

$$(\mathbf{O}B - OA) \times \mathbf{F}_A(t) = \mathbf{O}B \times \mathbf{F}_1(t)$$

e quindi

$$\mathbf{F}_A(t) = \frac{2}{3}\,\mathbf{F}_1(t) \qquad \mathbf{F}_B(t) = \frac{1}{3}\mathbf{F}_1(t)$$

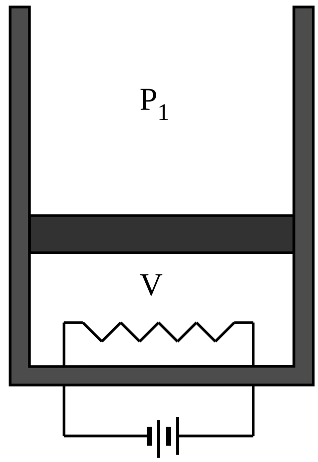
Esercizio 3

Un numero n di moli di aria inizialmente a temperatura T_1 e pressione P_1 vengono riscaldate a pressione costante sino a che il loro volume triplica. Assumendo che l'aria si comporti come un gas perfetto si calcoli:

a) il volume V_2, la temperatura T_2 e la pressione P_2 finali;

b) la variazione di entropia ΔS calcolata nell'ipotesi che il processo sia quasi statico e quella $\Delta S'$ calcolata nell'ipotesi che non lo sia;

c) il calore assorbito Q, il lavoro svolto $\mathcal{L}$ e la variazione ΔU dell'energia interna, nelle ipotesi che il processo sia quasi statico e che non lo sia.



Si assuma nei calcoli: $n = 1.0$, $T_1 = 27°\mathrm{C}$, $P_1 = 1.0$ atm.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned} V_2 &= 3V_1 = \frac{3nRT_1}{P_1} = 7.39\ 10^{-2}\ \mathrm{m}^3 \\ T_2 &= \frac{P_2V_2}{nR} = 3T_1 = 900\ \mathrm{K} = 627°\mathrm{C} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \Delta S = \Delta S' &= \int \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\mathrm{rev}} = nc_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \\ &= \frac{7}{2} R \ln 3 = 32.0\ \mathrm{J/K} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= P_1(V_2 - V_1) = 2P_1V_1 = 2nRT_1 = 4.99\ 10^3\ \mathrm{J} \\ Q &= nc_p(T_2 - T_1) = 7RT_1 = 1.75\ 10^4\ \mathrm{J} \\ \Delta U &= Q - \mathcal{L} = 5RT_1 = 1.25\ 10^4\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Il lavoro e – di conseguenza – il calore non dipendono dalla staticità della trasformazione.