Università di Trieste - Facoltà di Ingegneria
A.A. 1999-00 - Sessione Invernale
Prova scritta di Fisica Generale I del 27-01-00

Esercizio 1

Per effetto della forza di gravità una slitta di massa M inizialmente ferma discende un piano inclinato di 45° lungo una rotaia disposta nella direzione $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$ (vedi figura). Sulla slitta è appoggiato un grave di massa m. Supponendo che la rotaia sia priva di attrito e che il corpo m rimanga fermo rispetto alla slitta, si calcoli:

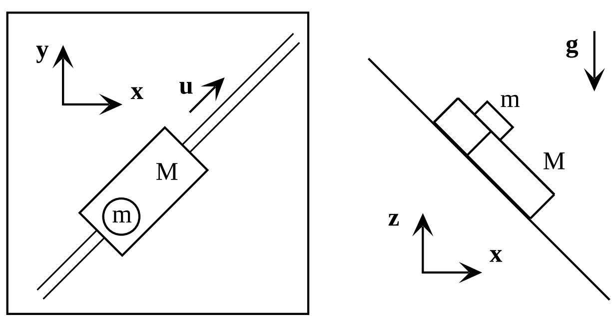
a) la forza $\mathbf{R}$ esercitata dalla rotaia sulla slitta in ogni punto della traiettoria;

b) la forza d'attrito $\mathbf{F}_a$ che si esercita sul corpo di massa m;

c) il minimo coefficiente d'attrito $\mu_{s,min}$ necessario affinché il corpo non si stacchi dalla slitta.

Si assuma nei calcoli: M=20 Kg, m = 60 Kg.

Suggerimento: si usino i due sistemi di riferimento del laboratorio e solidale alla slitta con un versore nella direzione della rotaia, il secondo ortogonale al piano inclinato e il terzo ortogonale ai primi due.



Svolgimento:

a) definiamo il versore normale al piano della slitta $\mathbf{u}_N = (1/\sqrt{2})(1, 0, 1)$ e un terzo versore normale alla traiettoria

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u} \times \mathbf{u}_N = (1/\sqrt{6})(1, -2, -1).$$

Nel sistema di riferimento non inerziale della slitta l'equazione del moto della massa m, nelle notazioni del Rosati, è

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_a - m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_{Co} = m\mathbf{a}_R$$

che, se la massa m è ferma rispetto alla slitta, si riduce a

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_a - m\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{0} \tag{1}$$

mentre quella della slitta si scrive, nel sistema del laboratorio

$$(M+m)\mathbf{g} + \mathbf{R} = (M+m)\mathbf{a}_{tr}$$

che proiettata lungo $\mathbf{u}$, essendo $\mathbf{R} \perp \mathbf{u}$, si riduce a

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{u} = a_{tr} = g/\sqrt{3}.$$

In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (M+m)(\mathbf{a}_{tr} - \mathbf{g}) = (M+m)\,\frac{g}{3}\,(1,1,2) = \\ &= (261.6, 261.6, 523.2) \text{ N}. \end{aligned}$$

b) È chiaro che, affinché l'equazione (1) sia consistente con l'ipotesi $\mathbf{a}_R = \mathbf{0}$, deve valere che $\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{u} = 0$. Proiettiamo l'equazione (1) nella direzione di $\mathbf{u}_3$:

$$F_a = -mg/\sqrt{6} = -240 \text{ N}.$$

c) Per calcolare il minimo coefficiente d'attrito proiettiamo l'equazione (1) lungo $\mathbf{u}_N$: $N = mg/\sqrt{2}$. Si ha quindi $|F_{a,max}| = \mu_s|N| = \mu_s mg/\sqrt{2}$ e imponendo che sia $|F_{a,max}| = |F_a| = mg/\sqrt{6}$ si ottiene

$$\mu_{s,min} = 1/\sqrt{3} = 0.577.$$

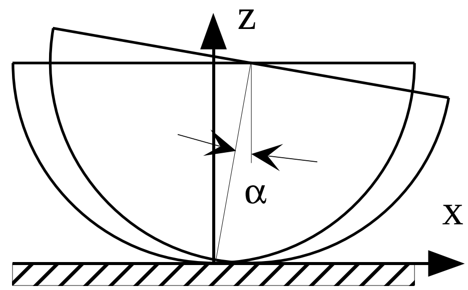
Esercizio 2

Una lastra semicircolare di raggio R e massa m, appoggiata su un piano su cui rotola senza strisciare, oscilla ad una frequenza ν. Nell'ipotesi che l'ampiezza angolare α_0 delle oscillazioni sia tale che $\alpha_0^2 \approx 0$ si calcoli:

a) la posizione del centro di massa del sistema a riposo e quando sia ruotato di un angolo α. Si espliciti l'intensità e il verso della forza $\mathbf{F}$ esercitata dal vincolo sul semicerchio;

b) il momento d'inerzia del semicerchio rispetto all'asse passante per il centro di massa;

c) la frequenza dell'oscillazione.



Si assuma nei calcoli: R=30 cm, m=1.2 Kg.

Nota:

$$\mathrm{D}(\pm x^2 + a)^{\frac{3}{2}} = \pm 3x\sqrt{\pm x^2 + a}$$

Svolgimento:

a) Calcolo della coordinata z_G del centro di massa per il cilindro a riposo:

$$\begin{aligned} z_{G,0} &= R - \frac{\sigma \int_0^R 2\sqrt{R^2 - z^2} z dz}{\sigma \pi R^2/2} = R - \frac{\left[-\frac{2}{3}(R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R}{\pi R^2/2} = \\ &= R - \frac{4R}{3\pi} = (1 - \xi)R = 0.173\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Quando il semicerchio ruota di un angolo α, il punto di contatto si sposta da $x = 0$ a $x = \alpha R$. Il centro del cerchio si mantiene sulla verticale del punto di contatto, ad un'altezza R dal piano. Il centro di massa si trova invece ad una quota data da $z_G = R - \xi R \cos\alpha$, che per $\alpha \approx 0$ vale $z_G \approx z_{G,0}$. Questo significa che l'equazione del moto nella direzione z si scrive $m\ddot{z}_G = 0$, e la forza in questa direzione è nulla: il peso del corpo è equilibrato dalla componente normale della reazione del piano.

Per quanto riguarda la coordinata x, si avrà: $x_G = \alpha R - \xi R \sin\alpha \approx \alpha R(1 - \xi) = \alpha z_G$, e l'intensità della componente della forza in questa direzione vale $m\ddot{\alpha} z_G$. In definitiva

$$\mathbf{F} = m(\ddot{\alpha} z_G, 0, g)$$

b) Il momento d'inerzia rispetto al centro del cerchio è la metà del momento d'inerzia di un cerchio completo:

$$I_C = \frac{1}{2}\sigma \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{1}{4} m R^2.$$

Per il teorema di Huyghens-Steiner si ha allora

$$I_G = I_C - m\xi^2 R^2 = mR^2\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right) = 7.55\ 10^{-3}\ \mathrm{kgm}^2.$$

c) Scriviamo la componente y della II equazione cardinale della dinamica rispetto al centro di massa del semicerchio:

$$M_{Gy} = -mg\alpha\xi R - m\ddot{\alpha} z_G^2 = \dot{L}_{Gy} = I_G\ddot{\alpha}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} mR^2\left[(1-\xi)^2 + \frac{1}{4} - \xi^2\right]\ddot{\alpha} &= -mg\xi R\alpha \\ \ddot{\alpha} = -\frac{g}{R}\,\frac{16}{15\pi - 32}\,\alpha &= -\omega^2\alpha \\ \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi\sqrt{15\pi - 32}}\sqrt{\frac{g}{R}} &= 0.936\ \mathrm{Hz}. \end{aligned}$$

Esercizio 3

In un ambiente adiabatico n_1 moli di acqua (massa molecolare $P_1 = 18$ g/mole) inizialmente a temperatura T_1 scambiano calore a pressione atmosferica con una massa M_2 di mercurio (massa atomica $P_2 = 201$ g/mole) inizialmente a temperatura T_2. Si calcoli:

a) la temperatura finale d'equilibrio T_e;

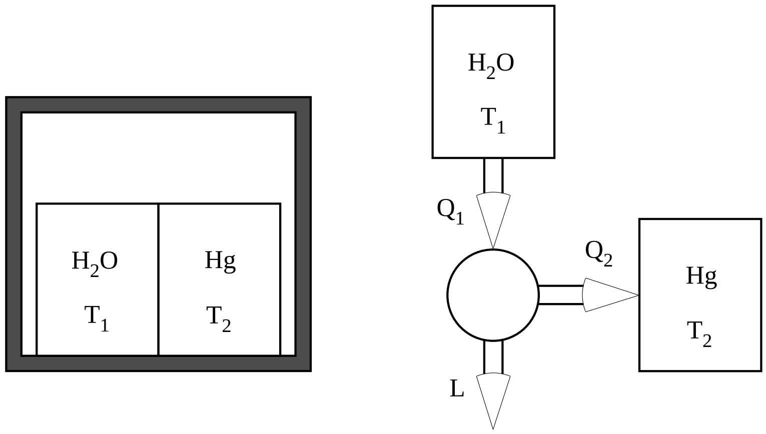
b) la variazione di entropia ΔS.

c) Supponendo invece che l'equilibrio termico dei due corpi venga raggiunto non per contatto termico ma usando ciascuno dei due corpi come sorgente di calore per fare funzionare una macchina di Carnot reversibile, si calcoli la nuova temperatura di equilibrio T'_e.

Si assuma nei calcoli: n_1=5.6 10^4, T_1=100° C, M_2=8.0 10^4 Kg, $T_2 = -30°$ C, $C_{P2} = 6.7$ cal/mole K.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} C_{P1} &= c_{P1}P_1 = 18\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{mole\ K}} = 75.3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mole\ K}} \\ C_1 &= n_1 C_{P1} = 4.22\ 10^6\ \mathrm{J/K} \\ c_{P2} &= C_{P2}/P_2 \\ C_2 &= M_2 c_{P2} = M_2 C_{P2}/P_2 = 1.12\ 10^7\ \mathrm{J/K} \end{aligned}$$



a)

$$T_e = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} = 278.8 \text{ K} = 5.7°\text{C}$$

b)

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{\delta Q_1}{T_1} + \int \frac{\delta Q_2}{T_2} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{C_1 dT_1}{T_1} + \int_{T_2}^{T_e} \frac{C_2 dT_2}{T_2} = \\ &= C_1 \ln \frac{T_e}{T_1} + C_2 \ln \frac{T_e}{T_2} = 2.98\, 10^5 \text{ J/K}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} &= 0 \\ C_1 \ln \frac{T_e'}{T_1} &= -C_2 \ln \frac{T_e'}{T_2} \\ {T'}_e^{1+\frac{C_2}{C_1}} &= T_1 T_2^{\frac{C_2}{C_1}} \\ T_e' &= T_1^{\frac{C_1}{C_1+C_2}} T_2^{\frac{C_2}{C_1+C_2}} = 273.5 \text{ K} = 0.3°\text{C}\end{aligned}$$