Università di Trieste - Facoltà di Ingegneria
A.A. 1999-00 - Sessione Estiva
Prova scritta di Fisica Generale I del 29-06-00

Esercizio 1

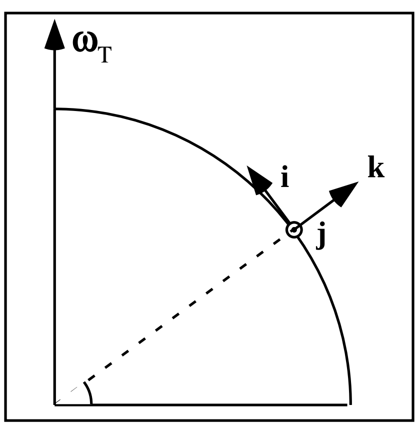
Alla latitudine λ un treno di massa m percorre un binario orizzontale inzialmente diretto verso Nord che piega poi in direzione Ovest descrivendo un'arco di circonferenza di raggio di curvatura R. Il treno frena in curva secondo la legge $v(t) = v_0 - at$ sul tratto compreso tra $\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$. Assimilando il treno ad un punto materiale si determini:

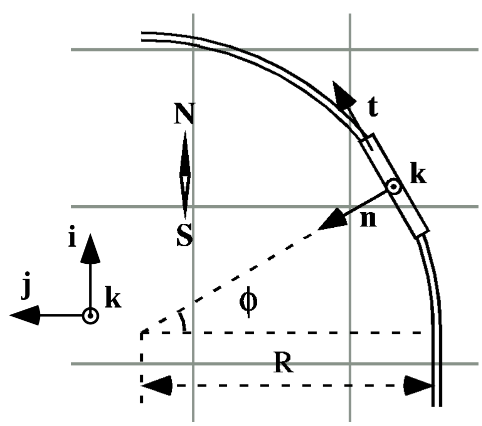
a) il tempo T impiegato dal treno a percorrere la curva;

b) la forza di Coriolis $\mathbf{F}_C$ che agisce sul treno a causa del moto di rotazione della terra attorno al proprio asse con velocità angolare ω_T; si calcolino le componenti della forza secondo i versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ indicati nella figura di sinistra quando il treno è all'inizio e quando il treno è alla fine della curva (la terna $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è solidale con la terra);

c) l'espressione in funzione di t della forza $\mathbf{F}$ che i binari esercitano sul treno nell'approssimazione $\omega_T = 0$; si calcolino le componenti della forza secondo i versori $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$ indicati nella figura di destra (la terna $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$ è solidale con il treno). Si calcolino per $t = 0$ le espressioni ottenute.

Si assuma nei calcoli: $\lambda = 37°$, $m = 2.0\,10^3$ t, $R = 4.0\,10^3$ m, $v_0 = 200$ km/h, $a = 0.12$ m/s^2, $g = 9.81$ m/s^2.





Svolgimento:

a) per il tempo impiegato dal treno a percorrere la curva deve valere

$$\frac{\pi}{2}\,R = v_0 T - \frac{1}{2}\,a\,T^2$$

da cui

$$T = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - \frac{\pi\,R}{a}} = 132 \text{ s}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_C &= & -2\,m\,\omega_T \times \mathbf{v} & \\
F_C(0) = [F_C(0)]_j &= & -2\,m\,\omega_T\,v_0\,\sin\lambda & = -9.73\;10^3 \text{ N} \\
[F_C(T)]_i &= & 2\,m\,\omega_T\,(v_0 - aT)\,\sin\lambda & = 6.96\;10^3 \text{ N} \\
[F_C(T)]_k &= & -2\,m\,\omega_T\,(v_0 - aT)\,\cos\lambda & = -9.23\;10^3 \text{ N}
\end{aligned}$$

c) per l'accelerazione del treno può scriversi

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{n}} = -a\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{n}};$$

la forza esercitata dai binari sul treno vale quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(t) &= -m\,a\,\hat{\mathbf{t}} + m\,\frac{(v_0 - at)^2}{R}\,\hat{\mathbf{n}} + mg\,\hat{\mathbf{k}} \\
F(0) &= \left(-2.40\;10^5\,\hat{\mathbf{t}} + 1.54\;10^6\,\hat{\mathbf{n}} + 1.96\;10^7\,\hat{\mathbf{k}}\right) \text{ N}
\end{aligned}$$

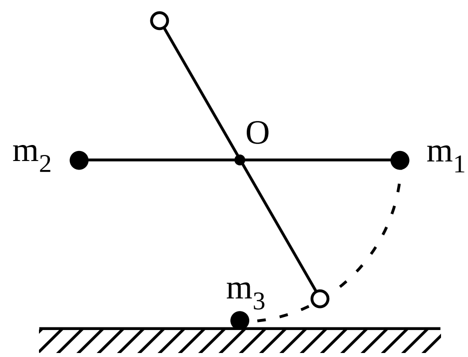
Esercizio 2

Un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza ℓ è vincolata a ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Agli estremi dell'asta sono fissate due sferette di dimensioni trascurabili di masse m_1 e m_2. L'asta è inizialmente orizzontale e viene poi lasciata libera di ruotare. Quando l'asta raggiunge la posizione verticale la sferetta m_1 urta anelasticamente una sferetta di massa m_3 che si trova in quiete e prosegue poi il suo moto insieme alla sferetta m_1. Si calcoli:

a) la velocità angolare dell'asta e la sua accelerazione angolare alla partenza e immediatamente prima dell'urto;

b) la velocità v' della sferetta m_1 subito dopo l'urto;

c) l'impulso I_R della reazione vincolare.



Si assuma nei calcoli: $\ell = 0.30$ m, $m_1 = 0.30$ kg, $m_2 = m_1/3$, $m_3 = m_1 + m_2$.

Svolgimento:

a) Alla partenza, rispetto al p;olo O la seconda equazione cardinale della dinamica si scrive

$$m_1\, g\, \frac{\ell}{2} - m_2\, g\, \frac{\ell}{2} = I\alpha_0$$

dove

$$I = (m_1 + m_2)\frac{\ell^2}{4}$$

da cui

$$\omega_0 = 0 \qquad \alpha_0 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\,\frac{2g}{\ell} = \frac{g}{\ell} = 32.7 \text{ rad/s}^2;$$

immediatamente prima dell'urto, la conservazione dell'energia meccanica permette di scrivere

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 + (m_2 - m_1)\, g\, \frac{\ell}{2} = 0$$

da cui

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\,\frac{4g}{\ell}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} = 8.09 \text{ rad/s} \qquad \alpha_1 = 0;$$

b) detto

$$I' = (m_1 + m_2 + m_3)\,\frac{\ell^2}{4} = 2\, I$$

il momento d'inerzia dopo l'urto, per la conservazione del momento angolare totale vale

$$I\omega_1 = I'\omega'$$

$$v' = \omega' \frac{\ell}{2} = \frac{I}{I'}\,\omega_1 \frac{\ell}{2} = \frac{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2)\, g\, \ell}}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \sqrt{\frac{g\ell}{8}} = .607 \text{ m/s};$$

c) l'impulso della reazione vincolare nell'urto è dato dalla variazione di quantità di moto nell'urto; ha direzione orizzontale; il verso positivo è da sinistra verso destra

$$I_R = (-m_1 + m_2 - m_3)\,v' - (-m_1 + m_2)\,\omega_1 \frac{\ell}{2} = -\frac{m_1\sqrt{2g\ell}}{2} = -0.364 \text{ Ns}.$$

Esercizio 3

Un numero n di moli di Argon subiscono una trasformazione politropica reversibile di equazione PV^x = costante da uno stato (P_0, V_0, T_0) ad uno stato (P_1, V_1, T_1). Assumendo che l'Argon si comporti come un gas perfetto si calcoli:

a) il lavoro svolto $\mathcal{L}$;

b) la variazione di entropia ΔS del gas nella trasformazione;

c) il calore specifico molare c_x della politropica. Si disegni la trasformazione nel piano di Clapeyron insieme all'isoterma e all'adiabatica che passano per il punto (V_0, P_0).

Si assuma nei calcoli: n =1.0, $x = 1.5$, $P_0 = 1$ atm, $V_0 = 22.4\ \ell$, $T_0 = 0.01°$C, $T_1 = T_0 - 26$ K.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{\text{politropica}} P dV = P_0 V_0^x \int_{V_0}^{V_1} V^{-x} dV = \\ &= P_0 V_0^x \frac{1}{1-x} \left(V_1^{1-x} - V_0^{1-x} \right). \end{aligned}$$

Usando l'equazione di stato dei gas perfetti, l'equazione della politropica può scriversi come

$$T V^{x-1} = \text{costante}$$

da cui

$$V_1^{1-x} = \frac{T_1}{T_0}\, V_0^{1-x}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1-x}\, P_0\, V_0 \frac{T_1 - T_0}{T_0} = 432 \text{ J};$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{T} &= \frac{PdV}{T} + \frac{dU}{T} = nR\frac{dV}{V} + nc_V\frac{dT}{T} \\
\Delta S &= \int \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} = nR\ln\frac{V_1}{V_0} + n\,c_V\ln\frac{T_1}{T_0} = \\
&= nR\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{1-x}} + n\,c_V\ln\frac{T_1}{T_0} = 0.416\ \text{J/K};
\end{aligned}$$

c)

$$\delta Q = P\,dV + n\,c_V\,dT$$

differenziando l'equazione di stato e quella della politropica si ottiene

$$\frac{dP}{P} + x\,\frac{dV}{V} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

da cui

$$(1-x)\,\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$\begin{aligned}
dQ &= \frac{1}{1-x}\,\frac{PV}{T}\,dT + n\,c_V\,dT = \left(\frac{nR}{1-x} + n\,c_V\right)\,dT = \\
&= n\,\frac{(c_P - c_V) +\ (1-x)\,c_V}{1-x}\,dT = n\,\frac{\gamma - x}{1-x}\,c_V\,dT
\end{aligned}$$

e quindi

$$c_x \equiv \left(\frac{1}{n}\,\frac{dQ}{dT}\right)_{\text{politropica}} = \frac{\gamma - x}{1-x}\,c_V = -0.994\ \text{cal/(mole K)}.$$

La politropica è intermedia tra l'isoterma e l'adiabatica.