Università di Trieste - Facoltà di Ingegneria
A.A. 1999-00 - Sessione Autunnale
Prova scritta di Fisica Generale I del 7-9-00

Esercizio 1

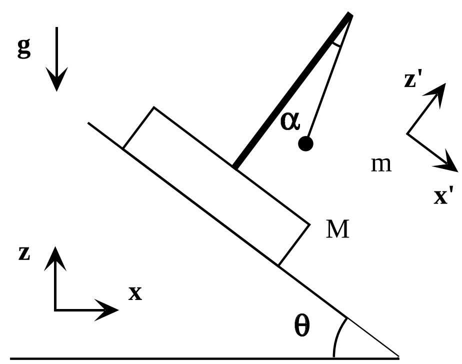
Sotto l'azione della forza di gravità una slitta di massa M scivola lungo un piano scabro (coefficiente di attrito μ_d) inclinato di un angolo θ. Sulla slitta, appeso ad un filo, si trova un corpo puntiforme di massa m, fermo rispetto alla slitta. Si determini:

a) l'accelerazione $\mathbf{a}$ del sistema;

b) l'angolo α a cui il filo si dispone rispetto all'asta di sostegno perpendicolare al piano inclinato; si calcoli la tensione $\mathbf{T}$ del filo;

c) si discuta la possibilità di definire, per un corpo di massa m, una funzione energia potenziale U' in un sistema di riferimento solidale con la slitta ed eventualmente se ne indichi l'espressione.

Si assuma nei calcoli: $\mu_d = 0.17$, $\theta = 37°$, $m = 270$ g.



Svolgimento:

a) L'equazione del moto della slitta si scrive

$$(M+m)\,\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_a = (M+m)\,\mathbf{a};$$

separando le due componenti normale e parallela al piano inclinato (quindi secondo gli assi x' e z') si ha

$$(m+M)\,g\sin\theta - \mu_d N = (m+M)\,a$$

$$-(m+M)\,g\cos\theta + N = 0$$

da cui

$$\mathbf{a} = g\,(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)\,\hat{\mathbf{x}}' = 4.57\,\hat{\mathbf{x}}'\ \mathrm{m/s^2}$$

b) la direzione definita dall'angolo α è quella della tensione $\mathbf{T}$ che, se la massa m è ferma rispetto alla slitta, fa equilibrio alla risultante $\mathbf{F}$ delle forze reali e apparenti che agiscono su m. Nelle notazioni del Rosati

$$-\mathbf{T} = \mathbf{F} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_{tr} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a}.$$

La tensione $\mathbf{T}$ si scrive allora

$$\mathbf{T} = -mg\ \cos\theta\, \mu_d\, \hat{\mathbf{x}}' + mg\ \cos\theta\, \hat{\mathbf{z}}' = (-0.359\, \hat{\mathbf{x}}' + 2.11\, \hat{\mathbf{z}}')\ \mathrm{N}$$

e

$$\alpha = -\arctan\frac{T_{x'}}{T_{z'}} = \arctan\mu_d = 9.65°;$$

c) In un sistema di riferimento inerziale in cui il corpo è soggetto alla sola forza peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$

$$U = mgz = -m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = -\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}.$$

Si può pensare che il sistema di riferimento non inerziale solidale alla slitta possegga un'accelerazione di gravità

$$\mathbf{g}' = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Per analogia si avrà quindi

$$U' = -m\,\mathbf{g}'\cdot\mathbf{r}' = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}' = mg\ \cos\theta\ (-\mu_d\, x' + z')\,.$$

Esercizio 2

Un cubo rigido di lato a e densità di massa uniforme ρ ruota attorno ad un asse fisso perpendicolare ad una delle facce e passante per il centro di massa. Il momento d'inerzia I del cubo è dato dall'espressione

$$I = \frac{\rho\, a^5}{6}.$$

Si supponga di effettuare N_a misure della lunghezza dello spigolo del cubo e N_ρ misure della sua densità.

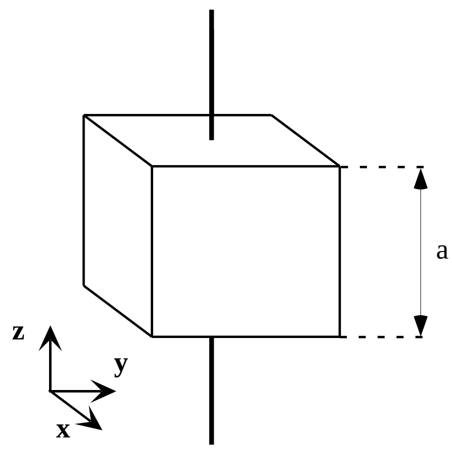
a) Si stimino le varianze σ_a^2 e σ_ρ^2 delle distribuzioni di probabilità delle misure di a e di ρ.

b) Si stimi il valore più probabile $\bar{I}$ del momento d'inerzia e la sua deviazione standard $\sigma_{\bar{I}}$.

c) Si ricavi l'espressione del momento d'inerzia data sopra.

Si assuma nei calcoli:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i [cm]	36.2	36.2	36.0	35.9	36.2	36.0	35.9	35.6
ρ_i [10^3 kg/m^3]	5.91	5.69	5.41	5.01	5.33			



Svolgimento:

a)

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{N_a} \frac{a_i}{N_a} = 36.0 \text{ cm} \qquad \sigma_a^2 = \sum_{i=1}^{N_a} \frac{(a_i - \bar{a})^2}{N_a - 1} = 0.04 \text{ cm}^2$$

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{N_\rho} \frac{\rho_i}{N_\rho} = 5.47\ 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad \sigma_\rho^2 = \sum_{i=1}^{N_\rho} \frac{(\rho_i - \bar{\rho})^2}{N_\rho - 1} = 0.12\ 10^6\ \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^6}$$

b)

$$\bar{I} = \frac{\bar{\rho}\,\bar{a}^5}{6} = 5.51 \text{ kg m}^2$$

$$\sigma_{\bar{I}} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial I}{\partial \rho}\right)_{\rho=\bar{\rho}}\right]^2 \sigma_{\bar{\rho}}^2 + \left[\left(\frac{\partial I}{\partial a}\right)_{a=\bar{a}}\right]^2 \sigma_{\bar{a}}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\bar{I}^2}{\bar{\rho}^2}\frac{\sigma_\rho^2}{N_\rho} + 5\,\frac{\bar{I}^2}{\bar{a}^2}\frac{\sigma_a^2}{N_a}} = 0.16 \text{ kg m}^2.$$

c) Si consideri una sezione del cubo compresa tra i due piani di equazione $x = x_0$ e $x = x_0 + dx$. Il momento d'inerzia della sezione rispetto ad un asse parallelo all'asse z e passante per il centro della lastra quadrata vale

$$dI_{cm} = 2\,\rho\,a\,dx \int_0^{\frac{a}{2}} y^2\,dy = \frac{\rho\,a^4\,dx}{12}.$$

Per il teorema di Huyghens-Steiner il momento d'inerzia della lastra rispetto all'asse z può essere scritto come

$$dI = dI_{cm} + dm\,x^2 = \frac{\rho\,a^4\,dx}{12} + \rho\,a^2 dx\;\;x^2;$$

integrando

$$I = \frac{\rho\,a^4}{6}\int_0^{\frac{a}{2}} dx + 2\,\rho\,a^2 \int_0^{\frac{a}{2}} x^2\,dx = \frac{\rho\,a^5}{6}.$$

Esercizio 3

Un cilindro adiabatico è diviso in due sezioni da un setto adiabatico in cui è praticato uno stretto foro. Il cilindro è chiuso alle due estremità da due pistoni mobili adiabatici. Nelle condizioni iniziali il pistone di destra si trova a ridosso del setto forato; la sezione di sinistra, di volume V_1, contiene n moli di un gas di van der Waals che segue l'equazione di stato

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

I pistoni vengono mossi contemporaneamente verso destra finché il pistone di sinistra si trova a ridosso del setto forato; il movimento dei due pistoni viene fatto in modo tale che le pressioni ai due lati del setto forato abbiano costantemente i valori P_1 e $P_2 < P_1$. Nota la differenza delle temperature $T_2 - T_1$ tra le due sezioni del cilindro si determinino:

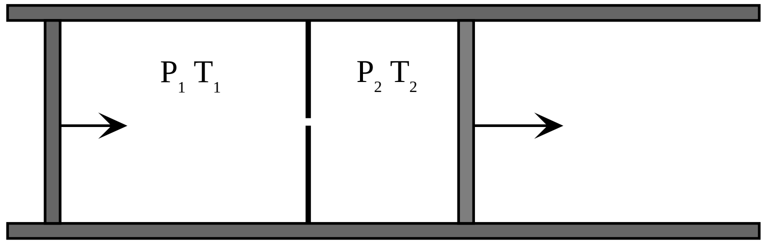
a) le variabili di stato del gas negli stati iniziale e finale; ove necessario, nel calcolo si trascurino i termini che contengono il prodotto ab delle due costanti che figurano nell'equazione di van der Waals;

b) il lavoro W svolto dal gas nella trasformazione;

c) l'espressione della variazione di entropia ΔS del gas di van der Waals, sapendo che l'energia interna del gas può essere scritta come

$$U = -\frac{an^2}{V} + nc_V T + \text{costante};$$

si calcoli la formula ottenuta per la trasformazione in esame.



Si assuma nei calcoli: $V_1 = 3.0\ \ell$, $n = 1.0$ moli, $P_1 = 2.8$ atm, $P_2 = 1.8$ atm, $T_2 - T_1 = -1.4$°C, $a = 2.1\ \ell^2$ atm/(mole)^2, $b = 0.092\ \ell$/mole.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned} T_1 = & \ \frac{1}{nR}\left(P_1 + \frac{an^2}{V_1^2}\right)(V_1 - nb) = & 107.5 \text{ K} \\ T_2 = & & 106.1 \text{ K}; \end{aligned}$$

se invece di usare l'equazione di van der Waals si usasse quella dei gas perfetti

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = 102.4 \text{ K}.$$

Per il calcolo del volume V_2 scriviamo di nuovo l'equazione di stato, e sviluppiamo i prodotti trascurando il termine in ab:

$$\begin{aligned} \left(P_2 + \frac{an^2}{V_2^2}\right)(V_2 - nb) &= nRT_2 \\ P_2 V_2^2 - (nbP_2 + nRT_2)V_2 + an^2 &\approx 0 \end{aligned}$$

$$V_2 \approx \frac{nbP_2 + nRT_2 + \sqrt{(nbP_2 + nRT_2)^2 - 4an^2 P_2}}{2P_2} = 4.68\ \ell;$$

b)

$$W = P_2 V_2 - P_1 V_1 = 0.024\ \ell \,\text{atm} = 2.43 \text{ J}$$

c)

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \\ &= \frac{1}{T}\left(an^2 \frac{dV}{V^2} + nc_V dT\right) + \left(\frac{nR}{V - nb} - \frac{an^2}{TV^2}\right) dV = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V - nb} \\
\Delta S &= nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}
\end{aligned}
$$

per il I Principio della Termodinamica

$$W + \Delta U = 0$$

$$P_2V_2 - P_1V_1 - an^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) + nc_V \left(T_2 - T_1 \right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
c_V = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[P_2V_2 - P_1V_1 - an^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \right] &= 0.197 \ \frac{\ell \, \text{atm}}{\text{mole K}} \\
&= 19.9 \ \frac{\text{J}}{\text{mole K}}
\end{aligned}
$$

$$\Delta S = nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} = 0.0348 \ \frac{\ell \, \text{atm}}{\text{K}} = 3.53 \ \frac{\text{J}}{\text{K}}$$