

Appunti sull'elaborazione statistica dei dati sperimentali

F. Della Valle

Dipartimento di Fisica, e-mail:dellavalle@ts.infn.it

marzo 2004

Queste note si propongono di fornire un'introduzione non completamente rigorosa e certamente non completa, ma abbastanza autoconsistente, all'elaborazione statistica dei dati sperimentali. La scelta degli argomenti e il taglio sono pensati per un'esposizione di 6-8 ore di fronte a studenti del primo anno di Ingegneria. Sarò grato a chi segnalerà errori o vorrà indirizzarmi commenti.

Indice

1	Generalità	2
2	Misure dirette non ripetute; errore di sensibilità	3
3	Incertezze di misura e cifre significative. Errore relativo e percentuale	5
4	Misure indirette non ripetute; propagazione dell'errore massimo	8
5	Strumenti di misura	10
6	Probabilità e frequenza	13
7	Distribuzione di probabilità	17
8	Misure dirette ripetute. Istogramma; legge normale degli errori	20
9	Distribuzioni derivate	23
10	Media e varianza della media	25
11	Metodo dei minimi quadrati	26

1 Generalità

Lo scopo della Fisica è quello di dare descrizioni quantitative delle leggi che regolano i fenomeni fisici, di formulare cioè espressioni matematiche che legano le grandezze fisiche implicate nei fenomeni naturali.

Cominciamo col definire una grandezza fisica come una caratteristica di un sistema individuata da un'operazione di misura il cui risultato rappresenta, per così dire, l'intensità con cui la grandezza è presente, nelle condizioni date, nel sistema in esame. Si noti come la definizione di grandezza fisica è rimandata direttamente a quella di misura: sono cioè grandezze fisiche tutte e sole le proprietà di un sistema per le quali sia possibile divisare una procedura di misura non ambigua. Tali sono ad esempio le masse, le dimensioni spaziali, gli intervalli di tempo, le velocità, etc. Siamo quindi portati a chiederci come si effettui una misura. Per il momento ci limitiamo a considerare la *misura diretta*, che è la più semplice e sta a fondamento di tutte le altre.

Misurare direttamente una grandezza significa confrontarla quantitativamente con un suo campione a cui viene attribuita convenzionalmente intensità pari a uno e che prende il nome di *unità di misura*. Questa definizione, come vedremo meglio più avanti, implica che esistano, per la grandezza in esame, un criterio operativo di confronto (uguaglianza e disuguaglianza) e una procedura di somma. La scelta dell'unità di misura è largamente arbitraria e dettata solo dalla convenienza: le unità di misura di tutte le grandezze sono cambiate più volte nel corso degli anni per adattarsi alle esigenze sociali, della scienza e della tecnologia.¹ Per una descrizione dei diversi sistemi di unità di misura esistenti si rimanda al corso di Fisica Generale. In ogni caso, per la misura si usano multipli e sottomultipli dell'unità di misura, vale a dire campioni della grandezza le cui intensità, rispetto all'unità di misura, stanno nel rapporto di numeri interi. La descrizione dettagliata del processo di misura diretta sarà l'oggetto del prossimo paragrafo; altri tipi di misura saranno considerati più avanti.

Se una stessa grandezza può essere definita in più modi diversi, questi for-

¹Prima dell'attuale definizione del metro nel Sistema Internazionale come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di $1/299792458$ secondi, che è stata adottata nel 1983, nel 1791 l'Accademia delle Scienze francese preferì definirlo come la decimilionesima parte del meridiano terrestre di Parigi (distanza tra il Polo e l'Equatore) piuttosto che la lunghezza di un pendolo con un certo periodo di oscillazione, per ovviare alla variabilità dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. Rispetto alla definizione, il primo campione risultò più corto di 0.2 mm. Nel 1889 la definizione di metro non faceva più riferimento alle dimensioni terrestri ma soltanto ad un certo campione di platino-iridio mantenuto a pressione atmosferica alla temperatura di 0°C e sostenuto da ben determinati sostegni meccanici. Nel 1960 fu deciso che la definizione di metro fosse legata alla lunghezza d'onda di una certa radiazione atomica del krypton 86.

niscono misure tra loro proporzionali. A titolo di esempio, schematicamente, e senza nessuna pretesa di completezza, notiamo che le lunghezze possono essere ragionevolmente misurate per confronto diretto solo in un intervallo di valori compreso approssimativamente tra 1 mm (10^{-3} m, millimetro) e 1 km (10^3 m, kilometro); per valori più piccoli di questi si ricorre a sofisticati sistemi meccanici (calibri, micrometri, fino a circa $1 \mu\text{m}$ o 10^{-6} m, micrometro), ottici (microscopi, interferometri, fino a circa 1 nm o 10^{-9} m, nanometro), a esperimenti di Fisica Atomica (fino a circa 1 pm o 10^{-12} m, picometro), di Fisica Nucleare (fino a circa 10^{-15} m o 1 fm, femtometro), o di Fisica sub-Nucleare (fino a circa 10^{-18} m o 1 am, attometro; per valori più grandi di 1 km si possono usare gli odometri (fino a circa 10^6 m, 1 Mm, megometro), si passa poi a sistemi elettroottici (fino a circa 10^9 m, 1 Gm, gigometro) o a triangolazioni ottiche (fino a circa 10^{12} m, 1 Tm, terometro); al di là di questo valore rimangono i metodi dell'Astrofisica. Nei casi in cui si possono effettuare le misure usando più di una tecnica si può verificare l'omogeneità delle diverse definizioni di lunghezza.

2 Misure dirette non ripetute; errore di sensibilità

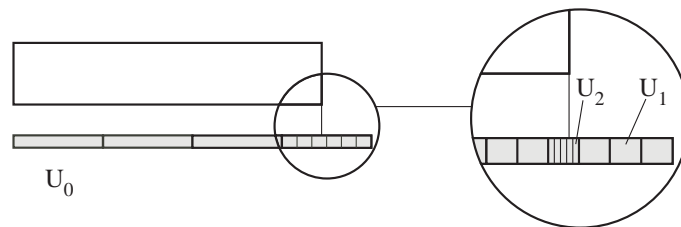


Fig. 1. Misura diretta di lunghezza.

Sia G la grandezza in esame e U_0 la sua unità di misura. Per fare un esempio concreto faremo riferimento ad una misura di lunghezza, ad esempio la dimensione del piano superiore di un tavolo. L'unità di misura potrebbe essere, in questo caso, un regolo sottile di metallo, che andrà orientato secondo la direzione dello spigolo del tavolo con un'estremità allineata con il bordo del tavolo. Si marca quindi il tavolo in corrispondenza della posizione della seconda estremità e si sposta il regolo unitario parallelamente a sé stesso fino a farne coincidere la prima estremità con questo segno. Si ripete l'operazione finché è possibile, determinando così quante unità entrano nella larghezza del tavolo. È evidente che, nel caso generale, alla fine di questa fase della misura

il secondo bordo del tavolo non si troverà in corrispondenza della estremità del regolo campione. Definiamo quindi un sottomultiplo U_1 , indicato in questo caso da una serie di tacche equispaziate sul regolo campione. Anche in questo caso il bordo del tavolo non capiterà in coincidenza con una delle tacche. Si potrà allora definire un secondo e più piccolo sottomultiplo dell'unità suddividendo l'intervallo tra le tacche in parti uguali. Il processo può essere ripetuto più volte, e il risultato della misura viene allora costruito in linea di principio come una somma di termini:

$$\begin{aligned} G &= G_0U_0 + G_1U_1 + G_2U_2 + \dots \\ G_0 &= \text{int} \left(\frac{G}{U_0} \right) \\ G_1 &= \text{int} \left(\frac{G - G_0U_0}{U_1} \right) \\ G_2 &= \text{int} \left(\frac{G - G_0U_0 - G_1U_1}{U_2} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

dove la funzione $\text{int}()$ rappresenta la parte intera della frazione. Dalla descrizione del processo di misura appare evidente che il valore del singolo rapporto

$$\frac{G - \sum_{j=0}^{i-1} G_jU_j}{U_i}$$

non è mai noto: tutto quello che in ciascun confronto si determina è il numero massimo di volte che il sottomultiplo U_i entra nella quantità $G - \sum_{j=0}^{i-1} G_jU_j$. Nel processo di misura evidentemente non occorre dunque mai fare troncamenti: ciascun passo del processo di misura fornisce di già un numero intero.

È anche evidente che in pratica la somma verrà fermata ad un certo ordine i_{max} . A differenza degli altri termini $G_{i_{max}}$ è *arrotondato* e non troncato:

$$G_{i_{max}} = \text{int}' \left(\frac{G - \sum_{i=0}^{i_{max}-1} G_iU_i}{U_{i_{max}}} \right)$$

dove la funzione $\text{int}'()$ rappresenta l'intero più vicino al valore della frazione. Chiameremo la quantità $U_{i_{max}}/2$ *risoluzione* della misura, e la citeremo sempre insieme al risultato della misura. Il risultato di una singola misura diretta è dunque espresso come l'abbinamento di due numeri:

$$G_{mis} \equiv \sum_{i=0}^{i_{max}} G_i \frac{U_i}{U_0}, \quad \Delta G \equiv \frac{1}{2} \frac{U_{i_{max}}}{U_0} \quad [\text{in unità } U_0]. \quad (1)$$

Con questa scrittura si intende dire che l'intensità di G può differire da $G_{mis}U_0$ per una quantità più piccola di $U_{i_{max}}/2$. Per descrivere questa situazione si usa affermare che la quantità $U_{i_{max}}/2$ rappresenta l'incertezza legata alla risoluzione con cui si è effettuata la misura ovvero - con termine forse improprio ma che è ormai passato nel gergo, - l'*errore di sensibilità*. Qui come più avanti nella teoria della misura il termine "errore" non ha il valore che il linguaggio corrente gli assegna, dal momento che nella maggioranza dei casi non sta a suggerire nessuna possibile correzione del risultato della misura, ma è usato come sinonimo di incertezza. In altre parole, la presenza di un "errore" ΔG associato alla misura diretta indica che, nell'eventualità in cui si ripeta la stessa misura migliorandone la risoluzione, si troverà il nuovo valore della misura di G in un punto qualsiasi dell'intervallo $[G_{mis} - \Delta G, G_{mis} + \Delta G]$. A priori, infatti, se ci si basa solo sull'espressione (1), tutti i punti di questo intervallo sono *equiprobabili*. Si noti che la risoluzione di una misura è dimensionalmente omogenea alla grandezza G .

Esercizio. Si effettui la misura diretta di Fig. 1.

Svolgimento:

$$\begin{array}{l}
 G_0 = 3, \quad G_1 = 2, \quad G_2 = 3 \\
 \frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{6}, \quad \frac{U_2}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} \frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{30} \\
 G_{mis} = 3 + \frac{2}{6} + \frac{3}{30} = 3.433 U_0 \quad \Delta G = \frac{1}{60} = 1.7 \cdot 10^{-2} U_0
 \end{array}$$

per cui si può scrivere

$$G = (3.433 \pm .017) U_0$$

Scegliendo di usare una sola cifra significativa per ΔG scriveremo invece

$$G_{mis} = 3.43 U_0, \quad \Delta G = 2 \cdot 10^{-2} U_0$$

Sulle cifre significative si dirà meglio nel prossimo paragrafo.

3 Incertezze di misura e cifre significative. Errore relativo e percentuale

Vedremo più avanti che la conclusione raggiunta sopra non è legata alla particolare misura descritta, ma vale per tutti i tipi di misura, anche se la definizione (e in parte anche il significato) di ΔG possono risultare abbastanza diversi: il risultato di una qualsiasi misura non è un numero che rappresenta

il valore “vero” della grandezza in studio, ma piuttosto una stima, della cui bontà ΔG è un indice. Si può avere anzi ragione di sostenere che un tale “valore vero” non esista affatto. Pensiamo di nuovo alla misura di lunghezza descritta sopra; supponiamo ad esempio, in via di pura ipotesi, di poter disporre di uno strumento di misura con una risoluzione pari alla distanza tra due atomi ($\sim 10^{-10}$ m). Scopriremmo *a*) che gli atomi del tavolo sono in continuo movimento attorno ad una posizione di equilibrio, e che quindi la loro posizione non può essere definita con assoluta precisione; *b*) che se si tiene fisso un estremo del tavolo la posizione dell’altro estremo, osservata con risoluzione atomica, cambia con la temperatura e che variazioni infinitesime - e di fatto incontrollabili - della temperatura danno luogo a variazioni di lunghezza molto più grandi delle distanze interatomiche; *c*) che, a livello atomico, risulta impossibile stabilire se gli atomi che compongono gli strati più esterni della superficie del tavolo appartengano al tavolo o all’ambiente che lo circonda: di fatto vi sono continuamente atomi che si staccano dalla superficie e altri che vi aderiscono, provenendo dall’atmosfera o da altri oggetti che vengono in contatto con la superficie.

Ma ben prima di arrivare ad una tale situazione estrema, l’esperienza mostra che quando la sensibilità non è troppo scarsa (cioè l’“errore” troppo grande) la ripetizione delle misure porta a risultati che differiscono tra loro per più della risoluzione dello strumento di misura. Prendendo nuovamente ad esempio la misura di lunghezza discussa prima, è facile che da una misura all’altra l’allineamento del regolo alle tacche e la tracciatura delle stesse possa essere fatta in modo diverso per motivi che possono avere a che fare, per esempio, con il fatto che la tacca non può mai avere larghezza nulla, che la sua direzione può non essere perfettamente ortogonale allo spigolo del tavolo, che durante l’operazione di tracciatura delle tacche il regolo può spostarsi inavvertitamente, etc. Il complesso di tutte le circostanze che influiscono sul risultato della misura, anche in un caso così semplice, sfugge quindi al completo controllo dello sperimentatore. Anche in questo caso, come vedremo in dettaglio più avanti, si può solo stimare il miglior valore della misura e associare ad esso un numero che descrive la dispersione dei dati.

L’esistenza di una incertezza sperimentale, di qualsiasi natura essa sia, pone delle limitazioni al numero di *cifre significative* (vale a dire di cifre non precedute o seguite da soli zeri) con cui viene presentato il risultato della misura. Si usa scrivere il valore di ΔG con non più di due cifre significative, e si riportano le cifre del valore di G_{mis} solo fino alla posizione dell’ultima cifra di ΔG . Nel caso in cui manchi l’indicazione di ΔG , si assume per questo valore metà dell’unità dell’ultima cifra del valore di G_{mis} .

Gli errori di sensibilità e la dispersione delle misure non rappresentano le uniche fonti di incertezza associate ad una misura. Se ad esempio il campio-

ne dell'unità di misura di lunghezza è costituito di un materiale soggetto a dilatazione termica in misura diversa dall'oggetto della misura, si otterranno risultati differenti operando a temperature diverse. L'incertezza derivante da questa situazione prende il nome di *errore sistematico*, dove il termine "sistematico" sta a ricordare che in principio questo tipo di errore può essere previsto ed eventualmente, a differenza di quello di sensibilità, corretto. Si può pensare, ad esempio, di registrare la temperatura a cui si effettuano le misure e, dalla conoscenza dei coefficienti di dilatazione termica dei materiali in gioco, di dedurre dai dati misurati effettivamente quelli che si sarebbero misurati ad una data temperatura. In alternativa si può provvedere a stabilizzare la temperatura del sistema. In tutti i casi l'incertezza sulla misura della temperatura si traduce in un'incertezza (o "errore") sistematica sulla misura di lunghezza. Occorre però dire che, a parte l'esempio banale che è stato fatto, la correzione degli errori sistematici non è sempre facile da effettuare, e certamente la loro presenza non può essere messa in evidenza finché si usi un solo strumento di misura (un solo campione nel caso della misura diretta) o non si varino le condizioni della misura.

Un modo alternativo di presentare il dato dell'errore di misura è quello dell'*errore relativo* cioè del rapporto tra l'incertezza di misura ΔG e il valore della misura,

$$\Delta G_{rel} \equiv \frac{\Delta G}{G_{mis}}$$

L'errore relativo permette di confrontare misure di grandezze fisiche differenti. Ad esempio, si può facilmente vedere che la misura di una massa di 2 tonnellate con $\Delta M = 5 \text{ kg}$ ($\Delta M_{rel} = 2.5 \cdot 10^{-3}$) è affetta da un'incertezza minore della misura di una lunghezza di 30 cm con un $\Delta L = 1 \text{ mm}$ ($\Delta L_{rel} = 3.3 \cdot 10^{-3}$). A differenza dell'errore di misura, l'errore relativo è un numero puro, e viene talvolta anche presentato - moltiplicato per 100 - come percentuale. Si usa indicare l'errore relativo con lo stesso numero di cifre significative dell'errore assoluto.

Esercizio. Si correggano le cifre significative della seguente tabella di misure; si espliciti l'errore dove è sottinteso; si calcoli l'errore relativo della misura:

G	ΔG	G_{mis}	ΔG_{rel}
1.234	0.12	1.23	$9.8 \cdot 10^{-2}$
1.234	.1	1.2	$8.3 \cdot 10^{-2}$
1.23456	.0001	1.2346	$8 \cdot 10^{-5}$
1	.012	1.000	$1.2 \cdot 10^{-2}$
1234	120	$1.23 \cdot 10^3$	$9.8 \cdot 10^{-2}$
1.2	.05		$4 \cdot 10^{-2}$
1	.5		.5
2	.5		.25

4 Misure indirette non ripetute; propagazione dell'errore massimo

Consideriamo ora una grandezza F legata a G da una relazione funzionale:

$$F = F(G).$$

È chiaro che effettuare una misura di G equivale ad effettuare una determinazione del valore di F :

$$F_{mis} = F(G_{mis}).$$

Ad esempio, si può ottenere la lunghezza L di una circonferenza misurando il diametro D del cerchio e calcolando la relazione $L = \pi D$. Oppure stimare il volume V di un cubo misurando la lunghezza A dello spigolo e usando la formula $V = A^3$.

Se l'errore di sensibilità nella misura di G è piccolo, l'ampiezza dell'intervallo associato all'errore di sensibilità sulla misura di F sarà dato da

$$|F(G_{mis} + \Delta G) - F(G_{mis} - \Delta G)| \approx 2 \left| \left(\frac{dF}{dG} \right)_{G=G_{mis}} \right| \Delta G.$$

Si può assumere quindi

$$\Delta F = \left| \left(\frac{dF}{dG} \right)_{G=G_{mis}} \right| \Delta G.$$

Per i due casi di prima si avrebbe

$$\begin{aligned} L_{mis} &= \pi D_{mis} & \Delta L &= \pi \Delta D \\ V_{mis} &= A_{mis}^3 & \Delta V &= 3A_{mis}^2 \Delta A \end{aligned}$$

Si capisce facilmente che nel caso di funzioni di più variabili, se cioè

$$F = F(A, B, C, \dots)$$

allora

$$F_{mis} = F(A_{mis}, B_{mis}, C_{mis}, \dots)$$

e

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial A} \right| \Delta A + \left| \frac{\partial F}{\partial B} \right| \Delta B + \left| \frac{\partial F}{\partial C} \right| \Delta C + \dots$$

Questa definizione, che usa il valore assoluto delle derivate parziali, corrisponde a riconoscere che il caso peggiore, quello in cui gli errori di sensibilità nelle singole misure primarie concorrono a dare un errore di sensibilità su F che sia massimo, ha probabilità uguale a qualsiasi altro. Effettuando, ad esempio, una misura della velocità media V di un corpo misurando lo spazio L percorso e il tempo T impiegato a percorrerlo, se le incertezze sulle misure sono rispettivamente ΔL e ΔT , l'incertezza sulla misura di velocità è data da

$$\Delta V = \frac{1}{T} \Delta L + \left| -\frac{L}{T^2} \right| \Delta T = \frac{1}{T} \Delta L + \frac{L}{T^2} \Delta T.$$

La propagazione dell'errore massimo nelle espressioni monomie prende una forma particolarmente semplice se ci si riferisce all'errore relativo massimo:

$$G = A^a \cdot B^b \cdot C^c \cdot \dots$$

$$\begin{aligned} \Delta G_{rel} = \frac{\Delta G}{G} &= |a| \frac{\Delta A}{A} + |b| \frac{\Delta B}{B} + |c| \frac{\Delta C}{C} + \dots = \\ &= |a| \Delta A_{rel} + |b| \Delta B_{rel} + |c| \Delta C_{rel} + \dots \end{aligned}$$

Ad esempio, per il caso precedente della velocità media $V = L/T$ si avrebbe semplicemente ($|a| = |b| = 1$)

$$\Delta V_{rel} = \Delta L_{rel} + \Delta T_{rel}$$

Esercizio. Si calcoli l'incertezza ΔS con cui è nota l'area della superficie S di un rettangolo di lati $A = 20.2$ cm e $B = 7.3$ mm.

Svolgimento. Calcoliamo l'errore relativo

$$\Delta S_{rel} = \frac{\Delta S}{S} = \Delta A_{rel} + \Delta B_{rel} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \frac{.05}{20.2} + \frac{.05}{7.3} = 9.3 \cdot 10^{-3}$$

da cui

$$\Delta S = \Delta S_{rel} S = \Delta S_{rel} A B = .14 \text{ cm}^2$$

Esercizio. Si vuole misurare la profondità h di un pozzo lasciandovi cadere dentro un sasso e misurando il tempo t intercorso tra la partenza

del sasso e il l'istante in cui lo sperimentatore sente il rumore dell'urto sul fondo del pozzo. Si mostri che l'espressione

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

è affetta da un errore sistematico dovuto al fatto che il suono si propaga a velocità v , la si corregga e si calcoli l'errore di sensibilità Δh in funzione della risoluzione Δt .

Si calcolino le espressioni ottenute per $v = 300 \text{ m}$, $t_{mis} = 2.1 \text{ s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 0.05 \text{ s}$.

Svolgimento. L'espressione corretta per h è data da

$$h = \frac{1}{2}g \left(t - \frac{h}{v} \right)^2$$

che è un'equazione di secondo grado in h , la cui soluzione è

$$h_{mis} = \frac{v^2}{g} \left(1 - \sqrt{1 + 2g t_{mis}/v} \right) + v t_{mis} = 20.2 \text{ m}$$

$$\Delta h = \left| \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_{mis}} \Delta t = v \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2g t_{mis}/v}} \right) \Delta t = 0.9 \text{ m}$$

La formula semplificata avrebbe invece dato

$$h_{mis} = \frac{1}{2}g t_{mis}^2 = 21.6 \text{ m}$$

con una differenza (di natura sistematica) per eccesso di 1.4 m. Un'altra fonte di incertezza sistematica in questa misura è la resistenza dell'aria, che porta anch'essa a sovrastimare la profondità.

5 Strumenti di misura

La gran parte delle misure viene effettuata con apposite apparecchiature che permettono il confronto della grandezza in esame con l'unità di misura e che prendono il nome di *strumenti di misura*. A ciascun valore della grandezza in esame corrisponde un numero se lo strumento è *digitale*, la posizione (angolare o lineare) di un indice su una scala graduata su cui generalmente sono marcati i valori della grandezza in esame se lo strumento è *analogico*. La risoluzione di una misura strumentale è quindi legata alla risoluzione con cui viene letta la scala graduata secondo la legge di propagazione degli errori in una misura indiretta. Sia G la grandezza in esame e Z quella realmente osservata. Valgono relazioni del tipo

$$G = G(Z) \quad \Delta G = \left| \frac{dG}{dZ} \right| \Delta Z$$

Generalmente il valore di ΔG può essere desunto direttamente dalla scala graduata di uno strumento analogico, ovvero corrisponde alla metà della cifra meno significativa usata da uno strumento digitale. La quantità $|dG/dZ|^{-1}$ è una caratteristica dello strumento che prende il nome di *sensibilità*; un valore alto della sensibilità significa che a piccole variazioni della grandezza da misurare corrispondono grandi cambiamenti della grandezza osservata Z .

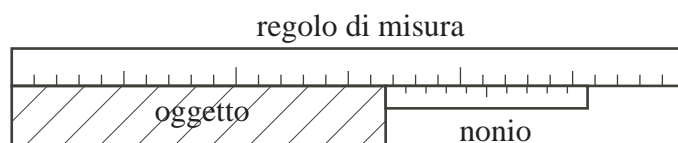


Fig. 2. Nonio.

Talvolta, la sensibilità di lettura di una scala analogica può essere migliorata mediante l'uso di un *nonio*, un piccolo regolo scorrevole, graduato in modo tale che n divisioni della scala del nonio corrispondano a $n - 1$ divisioni della scala principale. Questo significa che la distanza d fra le tacche tracciate sulla scala del nonio è più piccola della distanza D tra le tacche della scala principale per una quantità pari a D/n . Con riferimento alla figura, supponiamo di effettuare una misura diretta di lunghezza; come si è già visto, in generale, il secondo estremo dell'oggetto da misurare verrà a cadere tra due tacche della scala principale; il nonio, che va posizionato di seguito all'oggetto, permette di stimare, con sensibilità D/n , la frazione di tacca residua. Infatti, se chiamiamo x la quantità di cui lo zero del nonio è spostato verso destra rispetto ad una tacca della scala principale, la prima tacca del nonio dista dalla successiva tacca della scala principale di $x - D/n$, la seconda di $x - 2D/n$, e così via. Se la k -ma divisione del nonio coincide (o quasi) con la posizione di una tacca principale si ha, evidentemente, $x = kD/n$. Nel caso riportato in figura, la misura dell'oggetto ottenuta con l'uso del nonio è di 16.7 unità della scala principale.

Oltre alla risoluzione e alla sensibilità, altre caratteristiche di uno strumento di misura sono la *giustezza*, la *ripetibilità*, la *prontezza*, e la *portata*, che è il massimo valore della grandezza misurabile con lo strumento.

La prontezza è misurata dal valore di un tempo che caratterizza la velocità di risposta dello strumento.

La giustezza (detta anche *accuratezza*) esprime la massima deviazione possibile del risultato della misura dal risultato di una misura ideale. La giustezza è legata al massimo errore sistematico che lo strumento può introdurre nella misura. Può assumere valori diversi a seconda del valore della misura:

questo è evidente per tutti gli strumenti che possono lavorare con portata variabile, ma vale anche all'interno di un'unica scala (non linearità dello strumento). Essendo espressione dell'errore sistematico, la giustezza gioca quindi lo stesso ruolo della risoluzione, e ne prende il posto quando sia più grande di questa. Questa situazione è quella che si presenta più frequentemente: generalmente le caratteristiche dei singoli componenti di uno strumento sono note solo per essere comprese all'interno di un'intervallo massimo di variabilità. In linea puramente teorica si può pensare di eliminare questo effetto (o ridurlo al di sotto della soglia di sensibilità) attraverso una taratura dello strumento, da effettuarsi immediatamente prima o dopo ciascuna misura con un campione della grandezza G di valore noto. Un'errata o mancata taratura dello strumento può portare a veri e propri errori di misura. Come è stato già sottolineato, l'errore sistematico non è evidenziabile finché si usi un solo strumento di misura non tarato, ma può solo essere stimato (incertezza sistematica), generalmente a partire dalle informazioni fornite dal costruttore dello strumento. Esistono anche strumenti detti *assoluti*, che non richiedono taratura in quanto il loro funzionamento fornisce la misura basandosi su una legge fisica; un esempio di questo tipo di strumenti è il manometro di MacLeod.

La ripetibilità (detta anche *precisione*) esprime la capacità di uno strumento di dare risposte uguali nelle stesse condizioni. Indipendentemente da quanto lo strumento sia giusto, è possibile ed anzi normale che misure diverse di una stessa grandezza diano valori diversi. I motivi più vari possono determinare un tale comportamento: può essere l'attrito dell'ago dell'indicatore negli strumenti analogici, o un'interferenza elettromagnetica nella circuiteria, o una variabilità della resistenza di un contatto elettrico, etc.. Quello che accomuna tutte queste situazioni è che esse sfuggono al controllo dell'operatore. Se così non fosse, la causa potrebbe essere individuata e neutralizzata; o, anche, la misura potrebbe essere corretta per l'influenza della perturbazione, trattata quindi come un errore sistematico. Questo non è il caso generale.

Si noti, poi, che nella progettazione degli strumenti di misura si tende ad avere un bilanciamento delle prestazioni in sensibilità e in ripetibilità: infatti, dal momento che la precisione determina sostanzialmente il prezzo dello strumento, non è conveniente avere strumenti molto ripetibili e poco sensibili, giacché ripetibilità significa avere una piccola dispersione dei risultati, per sfruttare appieno la quale occorre abbinarla con una piccola risoluzione e quindi con un'alta sensibilità dello strumento. Di contro, strumenti ad alta sensibilità ma scarsa ripetibilità danno incertezze di misura non corrispondenti alla sensibilità, bensì determinate dalla dispersione dei dati. Come nel caso precedente, lo strumento avrebbe delle capacità che nella pratica non possono essere sfruttate, e il tempo e i soldi investiti nella progettazione di

uno strumento siffatto non sarebbero ben spesi. Occorre quindi, invece, che le due caratteristiche risultino opportunamente bilanciate. Per questo motivo è il più delle volte inutile cercare di leggere su una scala graduata piccole frazioni della sua risoluzione: molto probabilmente la risoluzione nella lettura di Z non è stata migliorata dal costruttore perché la ripetibilità non lo consente.

Ci dobbiamo ora porre il problema di come trattare i risultati di risultati di misure ripetute, e di come ricavare da essi un valore per l'incertezza. Prima di fare questo introduciamo i concetti di probabilità e di densità di probabilità.

6 Probabilità e frequenza

Il termine probabilità è comunemente usato, per indicare, più o meno correttamente, una stima riguardo ad un evento di cui non si abbiano informazioni sufficienti per prevederne l'esito con certezza. La teoria della probabilità si è sviluppata su basi matematiche a partire dal '600 inizialmente sul tema dei giochi d'azzardo, ma può essere (ed è) utilmente applicata ad un ventaglio molto più vasto di situazioni. Si applica in tutti quei casi in cui una situazione si può presentare con modalità diverse in circostanze apparentemente identiche, quando non si voglia o non sia possibile specificare completamente le condizioni iniziali e i meccanismi secondo cui il sistema evolve. Ad esempio, il lancio di una moneta o di un dado è certamente un evento deterministico, ma di fatto risulta impossibile controllarlo in modo da ottenere un risultato prefissato: la minima variazione delle condizioni iniziali porta a risultati completamente diversi. Esperimenti di questo tipo prendono il nome di esperimenti *casuali*, il cui risultato è cioè affidato al caso, e i loro risultati sono *variabili casuali*.

Pensiamo ad un tale esperimento che possa svolgersi secondo n modalità diverse. Queste modalità siano mutuamente esclusive e siano, per così dire, su un piede di parità: non vi sia cioè, *a priori*, nessun motivo di ritenere che una o più di esse avvenga in via preferenziale. Per avere degli esempi si può pensare al lancio di una moneta ($n = 2$) o al lancio di un dado ($n = 6$), all'estrazione di un numero nel gioco del Lotto ($n = 90$). Sia E una qualsiasi espressione logica che assuma il valore 1 (vero) o il valore 0 (falso) in ciascuna delle n modalità di svolgimento dell'esperimento. Per fissare le idee possiamo pensare all'estrazione di una biglia da una scatola che ne contiene n , ciascuna numerata con un numero diverso. L'evento a cui siamo interessati potrebbe essere l'estrazione di uno dei numeri x_1, \dots, x_m ($m < n$) su cui abbiamo

puntato:

$$E = \{x : x \in \{x_1, \dots, x_m\}\}$$

Definiamo *probabilità a priori* dell'evento E il rapporto

$$P(E) = \frac{n_E}{n}$$

tra il numero n_E di modalità dell'esperimento in cui l'espressione E è verificata, e il numero totale $n = n_E + n_{\bar{E}}$ di casi ugualmente possibili. Nel nostro caso evidentemente n è il numero totale di biglie contenute nella scatola, e n_E vale m . La probabilità vale allora m/n e assume dunque valori tra 0 e 1. Il primo caso ($P = 0$) esprime l'impossibilità *a priori* di E , e il secondo ($P = 1$) la sua certezza (sempre *a priori*). Il primo caso si verifica, ad esempio se, nel gioco del Lotto, abbiamo puntato solo su numeri inferiori a 1 e superiori a 90; il secondo se includiamo nella nostra giocata del Lotto tutti i novanta numeri che possono essere estratti ($m = n$). Analogamente, la probabilità che esca la testa nel lancio della moneta vale 0.5; la croce ha anch'essa probabilità 0.5; la probabilità che esca una data faccia del dado è $1/6$, mentre la probabilità che una data faccia non esca è il complemento all'unità di questo valore, cioè $5/6$.

Dalla definizione risulta immediatamente evidente che le probabilità di eventi indipendenti si sommano:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Questa proprietà è già stata implicitamente enunciata sopra a proposito della probabilità dell'estrazione del Lotto.

Supponiamo ora di effettuare N volte l'esperimento. Definiamo *frequenza dell'evento E* il rapporto

$$f(E) = \frac{N_E}{N}$$

tra il numero N_E di volte in cui l'esperimento si è svolto secondo una modalità in cui E è stata verificata, e il numero $N = N_E + N_{\bar{E}}$ totale di prove. È evidente che la frequenza cambia al crescere del numero totale di prove, ma è un fatto sperimentale che al crescere di N le oscillazioni della frequenza diminuiscono di ampiezza, e il suo valore converge a quello della probabilità *a priori*. L'esperienza ha portato a formulare il seguente postulato, noto come "legge empirica del caso": al crescere del numero delle prove la frequenza tende a stabilizzarsi attorno ad un valore limite che coincide con la probabilità *a priori*:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_E}{N} = \frac{n_E}{n}.$$

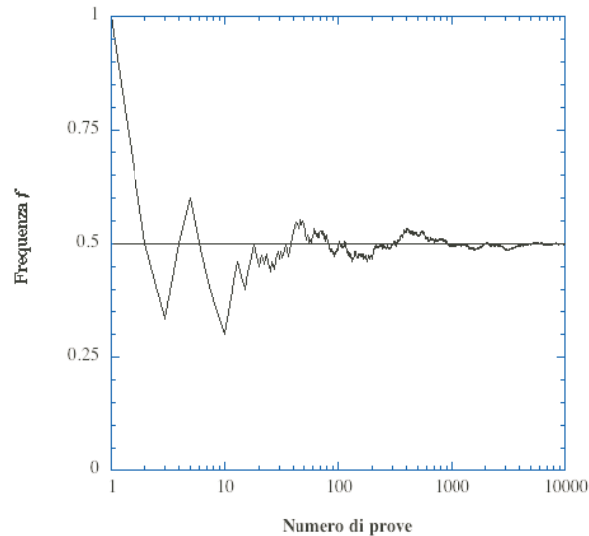


Fig. 3. Frequenza del risultato testa (o croce) nel lancio di una moneta, in funzione del numero di prove. Si noti la scala logaritmica dell'ascissa.

In questa enunciazione si è usato il formalismo dell'analisi matematica, secondo la quale una funzione f converge ad un valore f_0 per $x \rightarrow +\infty$ se, scelto un ϵ piccolo a piacere, esiste un x_0 tale che, per qualsiasi $x > x_0$, $|f(x) - f_0| < \epsilon$. È evidente però che la frequenza non è una funzione matematica, ma un risultato sperimentale, per il quale il numero di prove (la x della definizione di limite) rimane sempre un numero finito. Senza volere entrare nelle sottigliezze del ragionamento, si dirà solo che in realtà la legge empirica del caso enunciata sopra significa soltanto che *la probabilità che la frequenza sia un numero sensibilmente diverso dalla probabilità diminuisce al crescere del numero N di tentativi*. Detto in altri termini, *mi aspetto che in media, su n prove, n_E siano favorevoli a E* . Una conseguenza interessante (e molto spesso sottovalutata) della legge empirica del caso è che se al crescere del numero di prove persiste una differenza tra $f(E)$ e $P(E)$, cresce anche la probabilità che sia stata valutata erroneamente $P(E)$. Per esempio, se un certo numero non viene estratto al Lotto per troppo tempo, anziché puntare su questo ritardatario occorrerà prendere in considerazione l'ipotesi che questo numero non sia in effetti nell'urna insieme agli altri. Questo approccio equivale a stimare la probabilità a partire dalle frequenze, cosa che talvolta rappresenta l'unico modo di farlo. Prima di entrare nel vivo dell'argomento dobbiamo però andare avanti con la teoria della probabilità.

Si vuole adesso studiare la probabilità composta. Sia E_2 una seconda

espressione logica, indipendente da E_1 , concernente i risultati dell'esperimento, e si voglia calcolare la probabilità che si verifichino entrambi gli eventi. Facendo riferimento ad esempio all'estrazione di due palline numerate si può pensare, affinché gli eventi siano indipendenti, di avere due urne identiche da ciascuna delle quali si estrae una pallina, oppure di avere una sola urna nella quale viene rimessa la prima pallina subito dopo l'estrazione. Infatti, se la seconda pallina viene estratta senza rimettere a posto la prima, le condizioni per la seconda prova non sono identiche a quelle della prima, e le prove non sono più indipendenti; le formule presentate qui non valgono in questo caso, per il quale si rimanda ai corsi di Teoria della Probabilità. È facile convincersi che la probabilità *a priori* che siano verificate contemporaneamente sia E_1 che E_2 è data dal prodotto delle probabilità singole:

$$P(E_1 \text{ e } E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{n_{E_1}}{n} \frac{n_{E_2}}{n}.$$

Esercizio. Si stimino le probabilità di ciascuno dei possibili risultati del lancio contemporaneo di due dadi.

Svolgimento. Per contare il numero di casi possibili notiamo che ciascuna faccia del primo dado può essere abbinata, nel lancio, a ciascuna delle sei facce del secondo. Il numero di casi possibili è dunque $n = 36$, e ciascuno di essi ha dunque probabilità $1/36$. Questo numero è anche, correttamente, il quadrato della probabilità del singolo lancio.

Il risultato 2 (risp. 12) può essere ottenuto in un unico caso, cioè se i due dadi mostrano entrambi le facce 1 (risp. 6); la sua probabilità è dunque $1/36$.

Il risultato 3 (risp. 11) può essere ottenuto solo in due casi, se il primo dado mostra la faccia 1 (risp. 6) e il secondo la faccia 2 (risp. 5) o viceversa; la sua probabilità è dunque $2/36$.

Il risultato 4 (risp. 10) può essere ottenuto in tre modi diversi: se entrambi i dadi mostrano la faccia 2 (risp. 5) oppure se il primo mostra la faccia 1 (risp. 6) e il secondo la faccia 3 (risp. 4) o viceversa; la sua probabilità è dunque $3/36$.

Il risultato 5 (risp. 9) può essere ottenuto in quattro modi diversi: se il primo dado mostra la faccia 1 (risp. 6) e il secondo la faccia 4 (risp. 3) o viceversa, oppure se il primo dado mostra la faccia 2 (risp. 5) e il secondo la faccia 3 (risp. 4) o viceversa; la sua probabilità è dunque $4/36$.

Il risultato 6 (risp. 8) può essere ottenuto in cinque modi diversi: se entrambi i dadi mostrano la faccia 3 (risp. 4), oppure se il primo dado mostra la faccia 1 (risp. 6) e il secondo la faccia 5 (risp. 2) o viceversa, o anche se il primo dado mostra la faccia 2 (risp. 5) e il secondo la faccia 4 (risp. 3) o viceversa; la sua probabilità è dunque $5/36$.

Il risultato 7 può essere ottenuto in sei modi diversi: se il primo dado mostra la faccia 1 e il secondo la faccia 6 o viceversa, oppure se il primo dado mostra la