Fisica Generale I

Misure di grandezze fisiche e incertezze di misura

Lezione 3

Facoltà di Ingegneria

Livio Lanceri

Indice

Abbiamo imparato:

- Origine e classificazione delle incertezze (errori) di misura
- Rappresentazione delle incertezze
- Stima delle incertezze in misure **diritte** **non ripetute**
- "propagazione" degli errori in misure **indirette** **non ripetute**

Adesso: passiamo alla descrizione delle misure dirette ripetute…

- Media e deviazione standard
- Deviazione standard della media

… all' interpretazione dei risultati in termini probabilistici (prossima lezione)

- Probabilita` e distribuzione di probabilita`
- La distribuzione normale (Gauss)
- Intervalli di confidenza

… e alle misure indirette ripetute

- "propagazione" degli errori riveduta e corretta

Misure dirette ripetute

La statistica ci aiuta…

"analisi statistica" degli "errori accidentali"

A proposito: statistica = ?

I metodi statistici

- Sono stati sviluppati per descrivere i dati empirici e sono usati da tutte le scienze (e tecniche) sperimentali

- Fanno uso di vari strumenti matematici (analisi, **calcolo delle probabilita`**)

- Affrontano diversi problemi:
  - La **descrizione** sintetica dei dati empirici
    - distribuzioni, medie, dispersioni, correlazioni…
  - Il confronto tra dati e teoria o tra diversi insiemi di dati
    - Determinazione di **parametri**
    - **Test di ipotesi** ($\Rightarrow$ decisioni), su parametri o distribuzioni
  - L'interpretazione probabilistica dei risultati
    - (diversi approcci: "frequentista", "bayesiano",…)

- Noi ci limiteremo a considerazioni molto semplici su alcuni aspetti descrittivi (Medie e deviazioni standard, distrib.gaussiana, intervalli di confidenza)

Una misura fatta durante la lezione - 1

Misure dirette ripetute della lunghezza di un banco

A. Usando fotocopie di un righello →

Campo di misura 20 cm

Costante di lettura c = 1 mm

B. Con un regolo metallico →

Campo di misura 100 cm

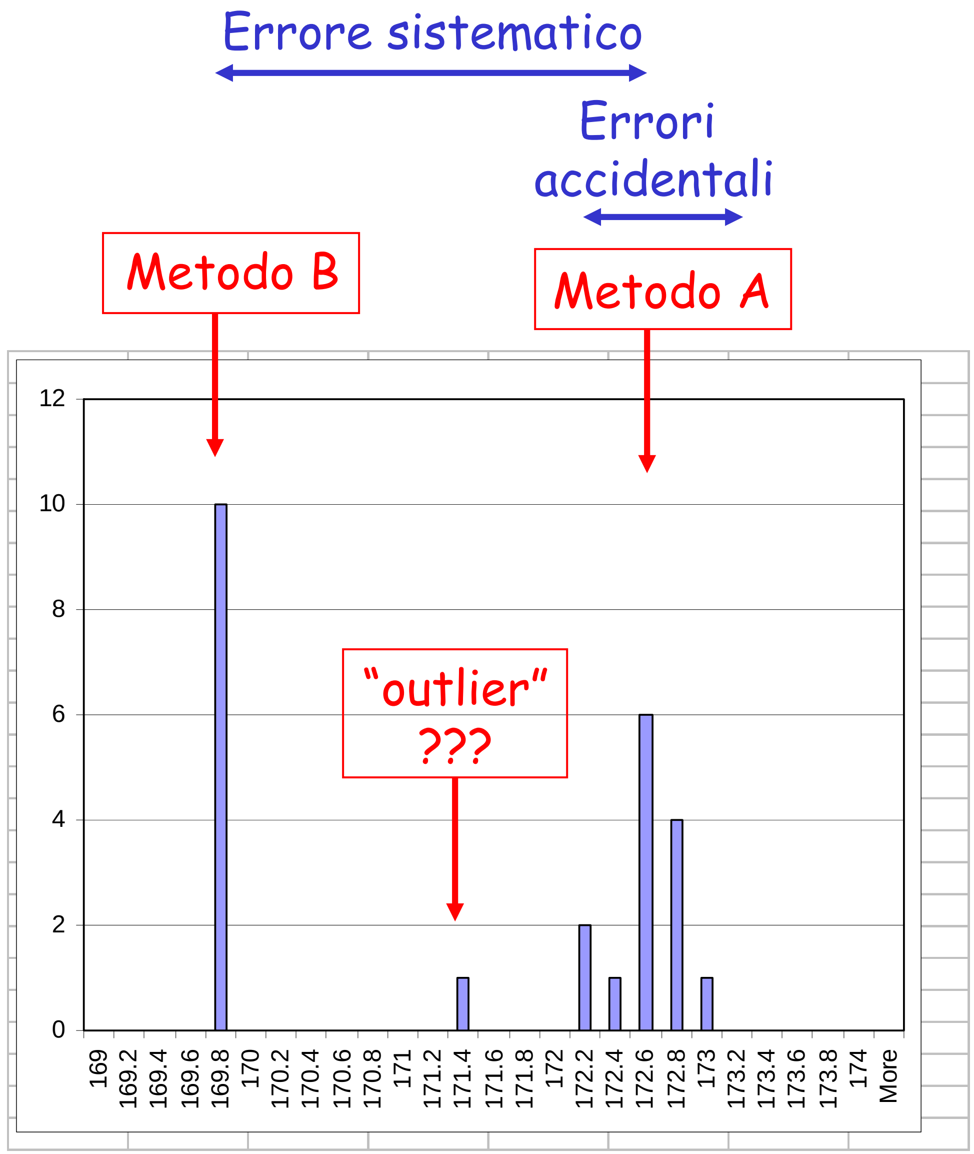
Costante di lettura c = 1 mm

metodo	Indice	operatore	xi(cm)
A	1	SS	172.6
A	2	SS	172.5
A	3	LL	172.2
A	4	LL	172.7
A	5	SD	172.3
A	6	SD	172.6
A	7	GS	171.4
A	8	GM	172.1
A	9	LB	172.8
A	10	LB	172.6
A	11	LL	172.8
A	12	LB	173.0
A	13	GS	172.6
A	14	LL	172.6
A	15	LL	172.8
B	1		169.8
B	2		169.8
B	3		169.8
B	4		169.8
B	5		169.8
B	6		169.8
B	7		169.8
B	8		169.8
B	9		169.8
B	10		169.8

Misura: commenti - 1

Istogramma (a barre):

- Scala orizzontale: include tutti i valori misurati (p.es.da 169.0 a 174.0 cm
- Intervalli ("bin"): abbiamo scelto ciascuno 0.2 cm, estremo inferiore incluso
- Scala verticale: per ogni bin, barra proporzionale al numero di misure nell'intervallo corrispondente



Misura: commenti - 2

Metodo A:

- **Errori accidentali,** maggiori della costante di lettura del regolo: le operazioni rudimentali di misura con il regolo "fotocopia", corto, introducono ad ogni passo piccole variazioni casuali: e' il tipico caso in cui le misure risultano avere una distribuzione "gaussiana" (come vedremo) ;

- **Errore sistematico**: le misure differiscono sensibilmente da quelle eseguite col regolo metallico (metodo B); una prima stima della differenza percentuale e` circa: 100 x (172.7 – 169.8)/169.8 = 1.7%, compatibile con un problema di "calibrazione" dello "strumento" fotocopiato (in effetti: la fotocopia era stata eseguita con fattore di riduzione 98% ...): non bisogna aspettarsi che uno strumento qualsiasi sia gia` perfettamente calibrato!

- **"outlier":** la misura numero 7 (operatore GS) e` sensibilmente distante dalle altre: **possiamo escluderla solo su questa base?** La risposta, in linea generale, e` NO. Commenteremo ulteriormente possibili eccezioni e criteri di esclusione accettabili. In questo caso, data la differenza di circa 14 mm, e` probabile che l'operatore GS abbia usato in un paio di occasioni l'estremita` del regolo invece dello "zero": se questo fosse confermato, sarebbe preferibile escludere entrambe le misure di GS.

Metodo B:

- Tutti i valori misurati sono uguali, entro la costante di lettura di 1 mm, essendo il metodo piu` semplice e riproducibile.

Media e deviazione standard

N misure di x

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$$

Media

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Varianza

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^2$$

Deviazione Standard

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i}(x_i - \bar{x})^2}$$

Esempio

operatore	Indice	xi(cm)	xi-xm(cm)	(xi-xm)^2	xi-xm'(cm)	(xi-xm')^2
SS	1	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
SS	2	172.5	-0.007	0.0000	-0.085	0.0072
LL	3	172.2	-0.307	0.0940	-0.385	0.1479
LL	4	172.7	0.193	0.0374	0.115	0.0133
SD	5	172.3	-0.207	0.0427	-0.285	0.0810
SD	6	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
GS	7	171.4	-1.107	1.2247		
GM	8	172.1	-0.407	0.1654	-0.485	0.2349
LB	9	172.8	0.293	0.0860	0.215	0.0464
LB	10	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
LL	11	172.8	0.293	0.0860	0.215	0.0464
LB	12	173.0	0.493	0.2434	0.415	0.1725
GS	13	172.6	0.093	0.0087		
LL	14	172.6	0.093	0.0087	0.015	0.0002
LL	15	172.8	0.293	0.0860	0.215	0.0464
	15	2587.6	0.000	2.1093		
	xm	172.51	0.00	0.1406		
			Var(x)	0.14		
			sigma	0.4		
not(GS)	13	2243.6			0.000	0.7969
	xm'	172.58			0.00	0.0613
					Var(x)	0.061
					sigma'	0.25

Media e deviazione standard

- *Perche' usare la media? E` quel particolare numero che minimizza la somma quadratica degli "scarti"* ("Principio dei minimi quadrati")

date N misure $x_i\,(i=1,\ldots N)$ troviamo X tale che:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2 \quad \text{minimo} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dX}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i 2(x_i - X)(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} X = \sum_{i=1}^{N} x_i - NX = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X = \frac{1}{N}\sum_i x_i}$$

- *Un modo alternativo per calcolare in un solo ciclo varianza e deviazione standard:* verificare come esercizio che:

$$Var(x) \equiv \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_i x_i\right)^2$$

(usato p.es per calcolare incrementalmente la varianza durante una sequenza di presa dati: le due sommatorie vengono accumulate evento per evento e sottratte alla fine)

Ancora deviazione standard…

- *Attenzione: ci sono motivi teorici per modificare la definizione di deviazione standard sostituendo N con (N-1):*

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

- *Le due definizioni sono equivalenti per N sufficientemente grande grande, ma la prima definizione tende a sottostimare l'incertezza per N piccolo.*
  - Nel nostro esempio (N=13) la differenza e` gia` poco rilevante (circa 4%):
    - Prima def.:
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{13}\times 0.7969} = 0.2476 \approx 0.25\,mm$$
    - Seconda def.:
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{12}\times 0.7969} = 0.2577 \approx 0.26\,mm$$

Deviazione standard della media

- Aumentando il numero N di misure, la deviazione standard calcolata dai dati raccolti rimane stabile, fluttuando attorno ad un valore che descrive la dispersione delle singole misure in modo sempre piu` preciso

$$\boxed{\sigma_x \approx \text{costante}}$$

- Invece: la deviazione standard della media, che descrive la (minore!) dispersione delle medie, diminuisce all'aumentare di N

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} \equiv \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

- Verifichiamolo su sequenze di dati (simulati con un generatore di numeri casuali) corrispondenti a misure ripetute con N crescente:
  - N = 10
  - N = 100
  - N = 1000
  - …

N=10

10 campioni di N=10 misure:

Campione n.1:

$$\bar{x} = 172.59\,cm \qquad \sigma_x = 0.31\,cm$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.09\,cm$$

Campione n.6:

$$\bar{x} = 172.75\,cm \qquad \sigma_x = 0.40\,cm$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.13\,cm$$

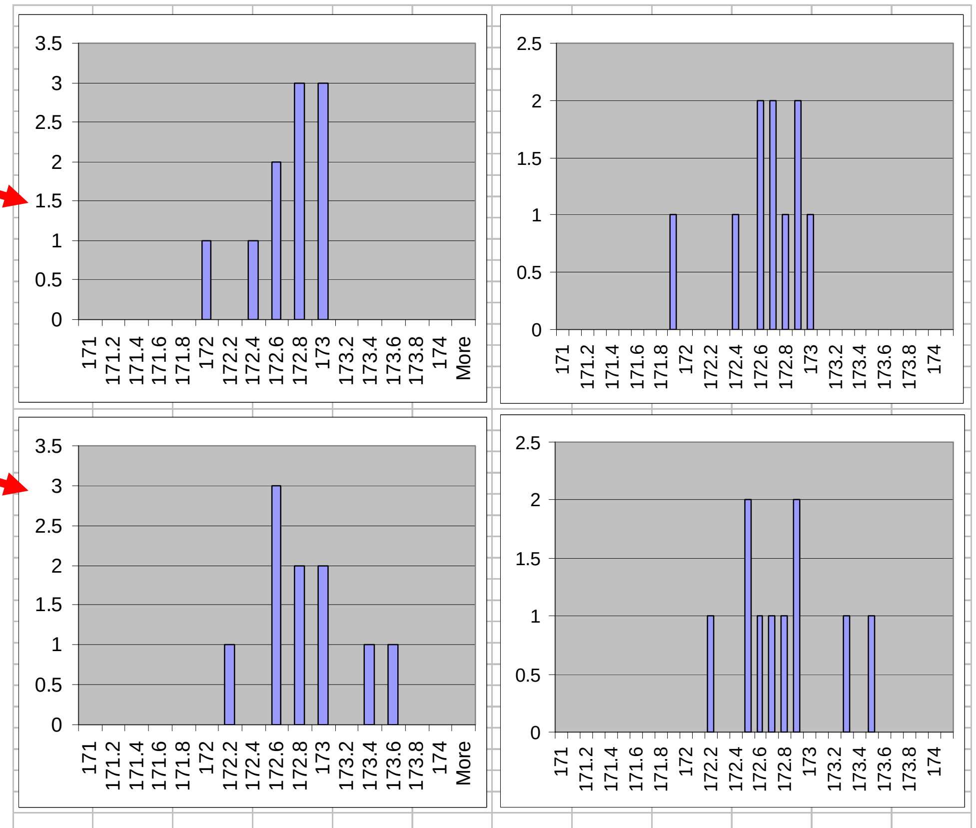
Etc…: rigettare misure sulla base della deviazione standard di poche misure e` pericoloso!

Verifica: istogrammi delle 10 medie e delle 10 dev.standard

Vedi prossima pagina

Campione n.1

Δx = 2 mm $\quad$ Δx = 1 mm



Campione n.6

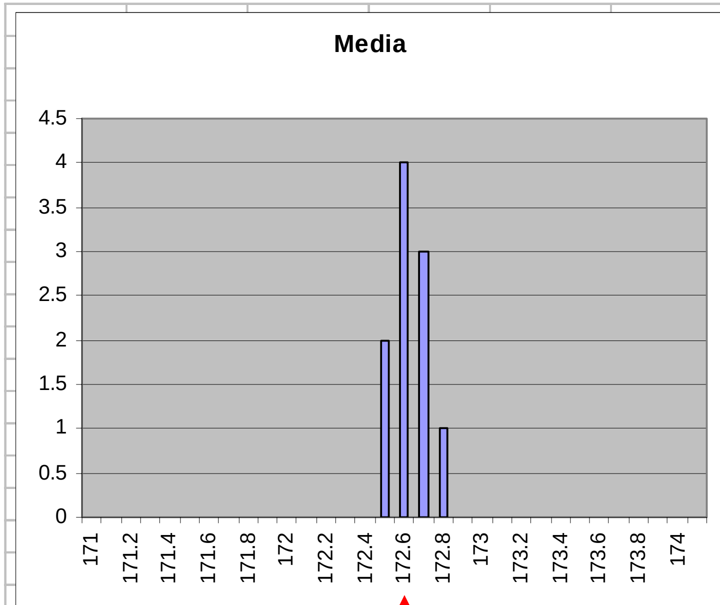
Δx = 2 mm $\quad$ Δx = 1 mm

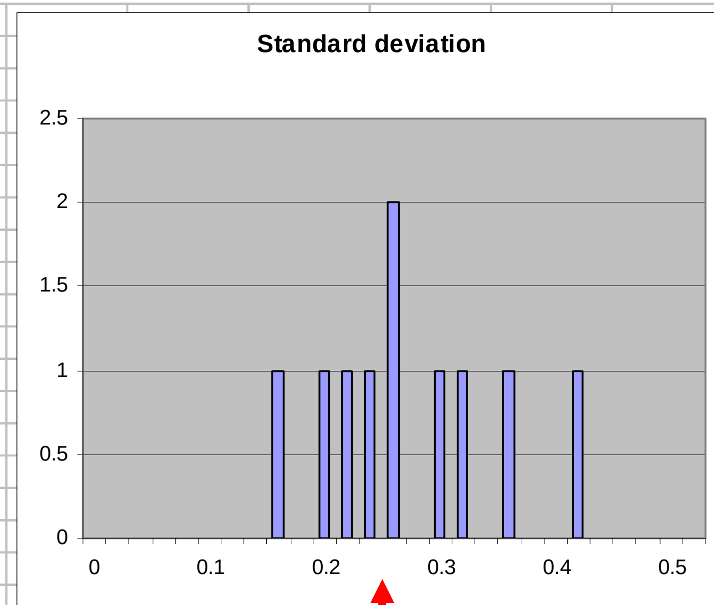
N=10 (medie e deviaz. standard)

10 campioni di N=10 misure ciascuno:

Calcoliamo 10 volte la Media e la Deviazione Standard (per ciascun campione)

istogrammiamo





La media fluttua meno delle singole misure:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{10}} \approx \frac{\sigma_x}{3} \approx 0.08\,cm$$

Dev.Standard: $\sigma_x \approx 0.25\,cm$
ma fluttua parecchio
da un campione all'altro!

…, N=100, …

10 campioni di N=100 misure:

Campione n.1:

$$\bar{x} = 172.594\,cm \qquad \sigma_x = 0.27\,cm$$
$$\sigma_{\bar{x}} = 0.027\,cm$$

Campione n.2:

$$\bar{x} = 172.588\,cm \qquad \sigma_x = 0.25\,cm$$
$$\sigma_{\bar{x}} = 0.025\,cm$$

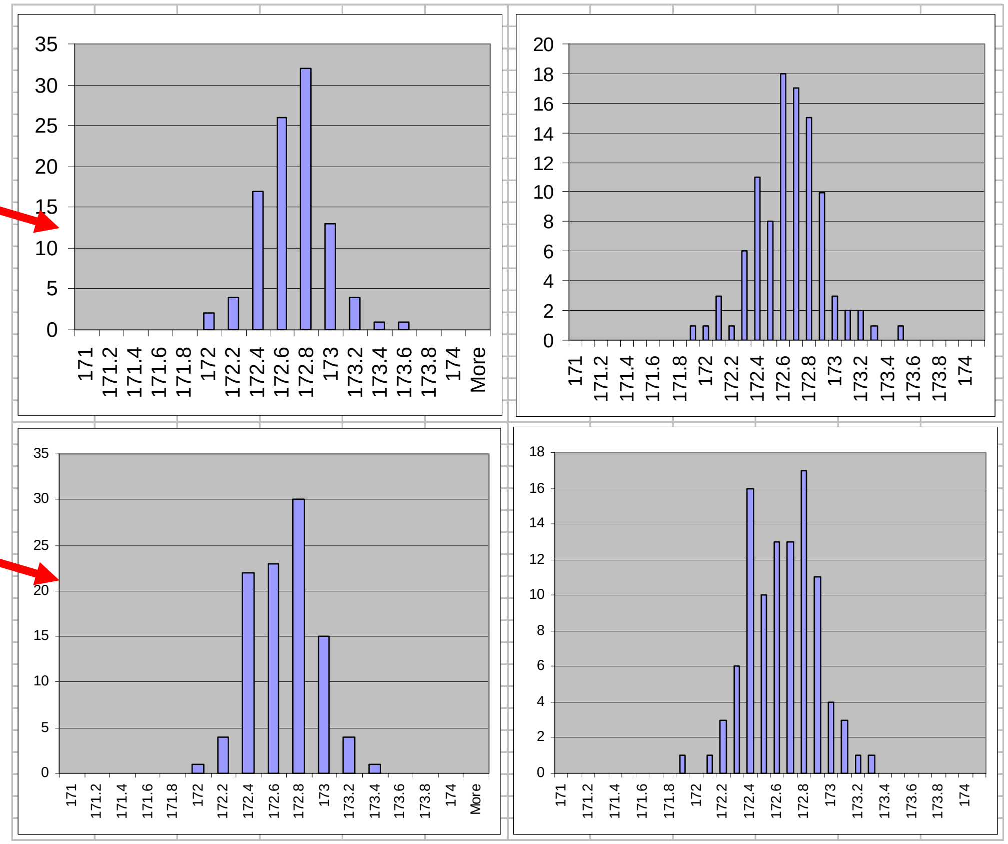
Etc…

10 medie, 10 dev.standard:

Prossima trasparenza

Campione n.1

Δx = 2 mm Δx = 1 mm



Campione n.2

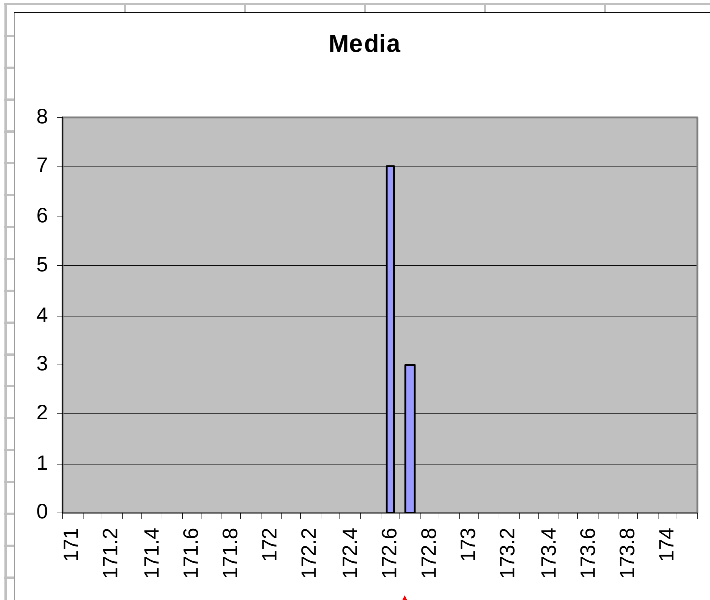
Δx = 2 mm Δx = 1 mm

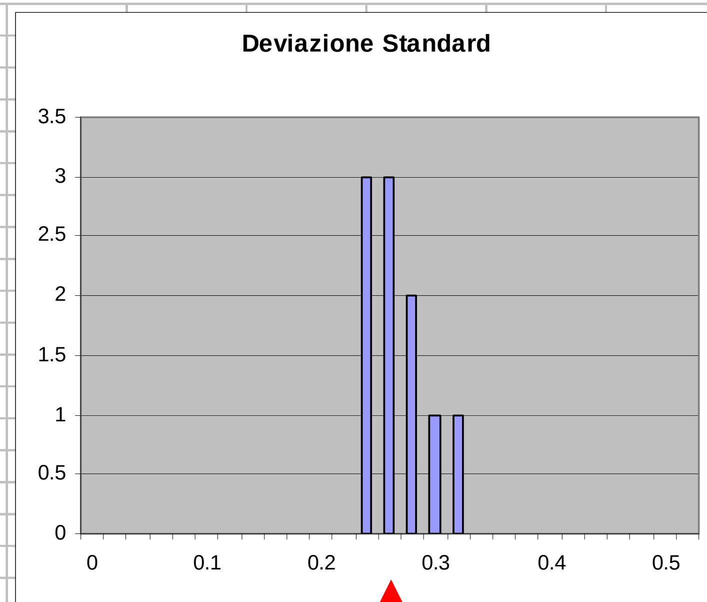
N=100 (medie e deviaz. standard)

10 campioni di N=100 misure ciascuno:

Calcoliamo 10 volte la Media e la Deviazione Standard (per ciascun campione)

istogrammiamo





La media fluttua meno delle singole misure:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{100}} \approx \frac{\sigma_x}{10} \approx 0.025\,cm$$

Dev.Standard: $\sigma_x \approx 0.25\,cm$
Adesso fluttua di meno da un campione all'altro!

…, N=1000, …

10 campioni di N=1000 misure:

Campione n.1:

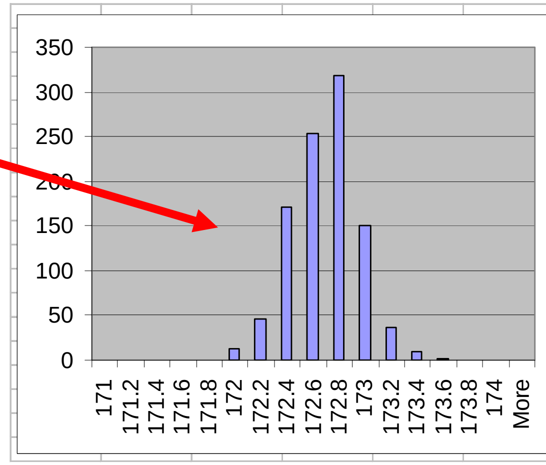
$$\bar{x} = 172.597\,cm \qquad \sigma_x = 0.252\,cm$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.008\,cm$$

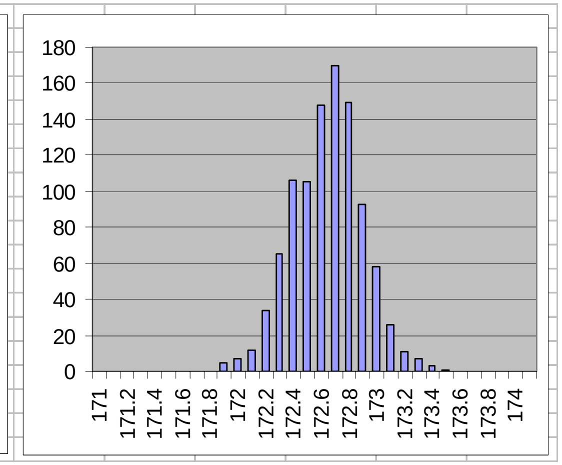
Etc…

Campione n.1

Δx = 2 mm

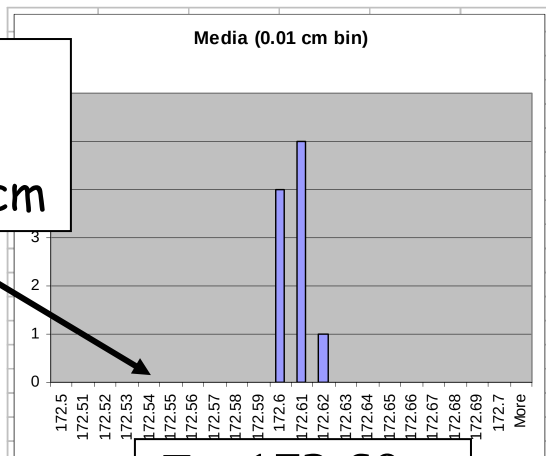


Δx = 1 mm

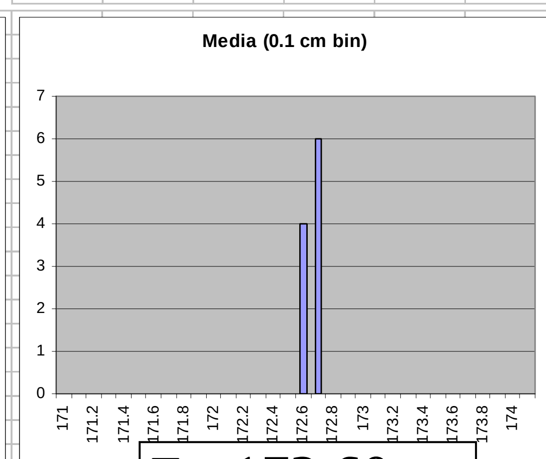


10 medie, 10 dev.standard:

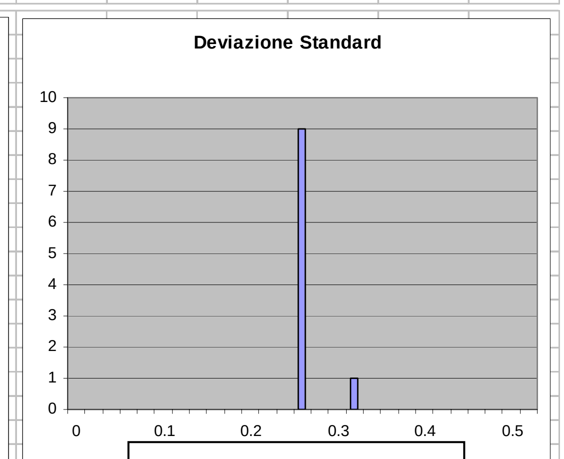
Scala orizz.
Allargata:
1 bin = 0.01 cm



$$\bar{x} = 172.60\,cm$$



$$\bar{x} = 172.60\,cm$$



$$\sigma_x = 0.25\,cm$$

Conclusione

In sintesi:

all'aumentare di N, nel nostro esempio (simulazione con valori "veri" noti):

$$\bar{x} \rightarrow 172.60\,cm$$

$$\sigma_x \rightarrow 0.25\,cm$$

$$\sigma_{\bar{x}} \rightarrow \frac{0.25\,cm}{\sqrt{N}}$$

la dispersione del valore medio diminuisce anche negli esperimenti reali,

Ma: attenzione agli errori sistematici!

> Inutile aumentare ulteriormente il numero di misure in un esperimento, se gli errori sistematici non possono essere ridotti ad un livello inferiore!

In grafico:

N = 10000:

$$\bar{x} \rightarrow 172.60\,cm$$

$$\sigma_x \rightarrow 0.25\,cm$$

Scala verticale lineare

Scala verticale logaritmica