Fisica Generale I

Settimana 1 - Complementi

Facoltà di Ingegneria

Livio Lanceri

Indice

Abbiamo imparato sulle misure dirette ripetute…

- Media e deviazione standard
- Deviazione standard della media

Passiamo ora all' interpretazione dei risultati in termini probabilistici (prossima lezione)

- Probabilita` e distribuzione di probabilita`
- La distribuzione normale (Gauss)
- Intervalli di confidenza

… e alle misure indirette ripetute

- "propagazione" degli errori riveduta e corretta

Probabilita`

Probabilita` "matematica"

Insieme degli "eventi" (possibili risultati di un esperimento): $S = \{E_1, E_2, E_3, ...\}$

Eventi "mutuamente esclusivi": se non possono verificarsi simultaneamente.

P(E): numero reale che soddisfa gli "assiomi della probabilita`", da cui tutte le altre proprieta` possono essere derivate:

$$(\mathrm{I}) \quad P(E) \geq 0$$

$$(\mathrm{II}) \quad P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad \text{se } E_1 \text{ e } E_2 \text{ mutuamente esclusivi}$$

$$(\mathrm{III}) \quad \sum P(E_i) = 1 \quad \text{se la somma e` estesa a tutti gli eventi mutuamente esclusivi}$$

Probabilita` "empirica"

Un esperimento viene ripetuto N volte

Un certo evento A si verifica M volte

$$\frac{M}{N} \xrightarrow{N \to \infty} P(A)$$

(ci sono alcune difficolta` logiche connesse con la ripetibilita` dell'esperimento, che hanno suggerito approcci alternativi, p.es. "probabilita` soggettiva" Bayesiana)

Densita` di probabilita` - 1

Istogramma "a barre"

Lunghezza delle barre: rappresentativa del numero n_k di eventi nel "bin" k

$$\text{"bin"}\ k\left(k=1,\ldots n_B\right) \quad \rightarrow \quad x_k, \quad \Delta_k, \quad n_k$$

$$\left(x_{k+1} = x_k + \Delta_k\right)$$

Istogramma "a rettangoli"

Area dei rettangoli: rappresentativa della frazione $F_k=n_k/N$ di eventi nel bin k

$$\text{"bin"}\ k\left(k=1,\ldots n_B\right) \quad \rightarrow \quad x_k, \quad \Delta_k, \quad f_k$$

$$(\text{area})_k = f_k\Delta_k \equiv F_k \equiv \frac{n_k}{N}$$

$$(\text{base})_k = \Delta_k \quad (\text{altezza})_k = f_k = \frac{F_k}{\Delta_k} = \frac{n_k}{N\Delta_k}$$

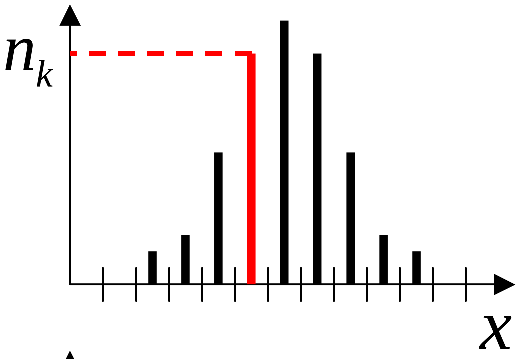
$\boxed{f_k\text{: "densita` di probabilita`"}}$

k	xk	nk	Fk	fk
1	171	0	0	0
2	171.1	0	0	0
3	171.2	0	0	0
4	171.3	0	0	0
5	171.4	0	0	0
6	171.5	0	0	0
7	171.6	0	0	0
8	171.7	2	0.0002	0.002
9	171.8	5	0.0005	0.005
10	171.9	26	0.0026	0.026
11	172	62	0.0062	0.062
12	172.1	146	0.0146	0.146
13	172.2	310	0.031	0.31
14	172.3	585	0.0585	0.585
15	172.4	987	0.0987	0.987
16	172.5	1263	0.1263	1.263
17	172.6	1535	0.1535	1.535
18	172.7	1607	0.1607	1.607
19	172.8	1327	0.1327	1.327
20	172.9	986	0.0986	0.986
21	173	614	0.0614	0.614
22	173.1	302	0.0302	0.302
23	173.2	139	0.0139	0.139
24	173.3	72	0.0072	0.072
25	173.4	24	0.0024	0.024
26	173.5	6	0.0006	0.006
27	173.6	2	0.0002	0.002
28	173.7	0	0	0
29	173.8	0	0	0
30	173.9	0	0	0
31	174	0	0	0
nB=31	Deltak=0.1	N=10000	1	10

Densita` di probabilita` - 2

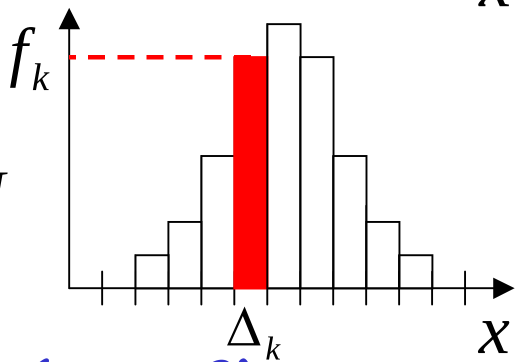
Barre

$$n_k / N$$



Rettangoli

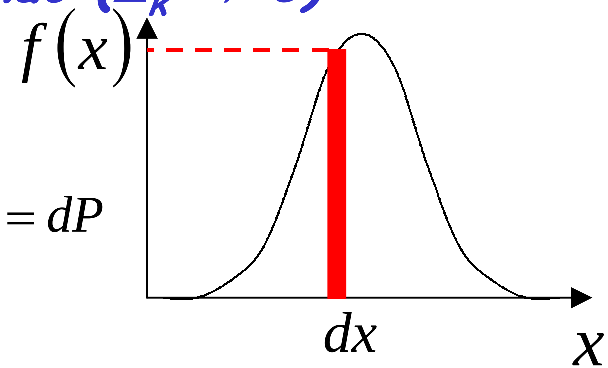
$$f_k \Delta_k = F_k = n_k / N$$



Limite continuo ($\Delta_k \to 0$)

$$\Delta_k \to dx$$

$$f_k \Delta_k \to f(x)dx = dP$$



Probabilita` come frequenza limite

$$\frac{n_k}{N} = F_k \xrightarrow{N \to \infty} P_k = P(x_k \le x < x_k + \Delta_k)$$

$$\sum_k F_k = 1$$

Densita` di probabilita`

$$f_k = \frac{F_k}{\Delta_k} \xrightarrow{\Delta_k \to 0} f(x) = \frac{dP}{dx}$$

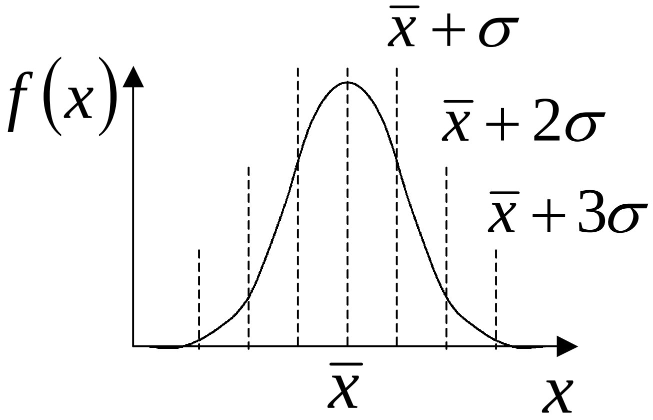
$$\sum_k F_k = \sum_k f_k \Delta_k = 1 \xrightarrow{\Delta_k \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Distribuzione gaussiana

Una delle densita` di probabilita` piu` importanti (…Teorema del Limite Centrale!)

$$f(x) = G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$



Si verifica che:

1. media : $\bar{x} = X$
2. dev. standard : $\sigma_x = \sigma$
3. probabilita` : $P(\bar{x}-\sigma \le x \le \bar{x}+\sigma) = 68\%$

$$P(\bar{x}-2\sigma \le x \le \bar{x}+2\sigma) = 95.4\%$$

$$P(\bar{x}-3\sigma \le x \le \bar{x}+3\sigma) = 99.7\%$$

Estendendo le definizioni alla distribuzione limite:

$$\bar{x} = \sum_k x_k f_k \Delta_k \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \ldots$$

$$\sigma_x^2 = \sum_k (x_k - \bar{x})^2 f_k \Delta_k \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x) dx = \ldots$$

Misure ripetute - interpretazione probabilistica - 1

Molto spesso (non sempre):

i risultati di misure ripetute hanno distribuzione di probabilita` gaussiana

Per il Teorema del Limite Centrale

La media di misure ripetute ha distribuzione di probabilita` gaussiana

Migliori stime per Media e Deviazione Standard:

"massima verosimiglianza" ⇒ "minimi quadrati" ⇒ …(si dimostra, vedi p.es Taylor)…

$$\left(\text{migliore stima per } X\right) = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

$$\left(\text{migliore stima per } \sigma\right) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

$$\left(\text{migliore stima per } \sigma_{\overline{x}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

…e: **si dimostra anche che le deviazioni standard vanno combinate in quadratura!!!**

Misure ripetute – interpretazione probabilistica - 2

Date N misure ripetute di una grandezza x (assumendo distrib. Gauss.), e calcolate come specificato:

$$\left(\text{migliore stima per } X\right) = \hat{X}$$
$$\left(\text{migliore stima per } \sigma\right) = \hat{\sigma}$$
$$\left(\text{migliore stima per } \sigma_{\bar{x}}\right) = \hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

Interpretazione "frequentista" dell'intervallo $\hat{X} - n\hat{\sigma} \le x \le \hat{X} + n\hat{\sigma}$

Livello di confidenza del 68% (95.3%, 99.7%) che una ulteriore **singola** misura cada nell'intervallo dato , con n = 1 (n =2, n = 3)

(cioe` : 68% delle ulteriori singole misure dovrebbero cadere nell'intervallo , etc.)

Interpretazione "frequentista" dell'intervallo $\hat{X} - n\hat{\sigma}_{\bar{x}} \le x \le \hat{X} + n\hat{\sigma}_{\bar{x}}$

Livello di confidenza del 68% (95.3%, 99.7%) che un ulteriore **esperimento equivalente** dia risultato nell'intervallo dato , con n = 1 (n =2, n = 3)

(cioe` : 68% degli esperimenti equivalenti darebbe valore medio nell'interval lo, etc.)

(o anche: 68% (...) probabilita` che il "valore vero" sia incluso nell'intervallo)

Misure indirette ripetute

…propagazione degli errori riveduta e corretta: usare la "somma in quadratura" !

$$\overline{q} = q(\overline{x}, \overline{y}, \ldots) \qquad \sigma_{\overline{q}} = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_{\overline{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_{\overline{y}}\right)^2 + \ldots}$$

Altri argomenti (cenni)

Reiezione di misure sulla base della discrepanza?

NO! Capire l'origine, se possibile trovare criteri indipendenti

"Criterio di Chauvenet": vedi Taylor, Cap.6

Come combinare misure della stessa grandezza, con errori diversi?

$$x_1 \pm \sigma_1, \dots \quad x_N \pm \sigma_N$$

$$x_{best} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \qquad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Regressione lineare, test d'ipotesi: qualche cenno in seguito…