Fisica Generale

Settimana 1 – Lezione 2

Facoltà di Ingegneria

Livio Lanceri

Misura ed "errori" di misura

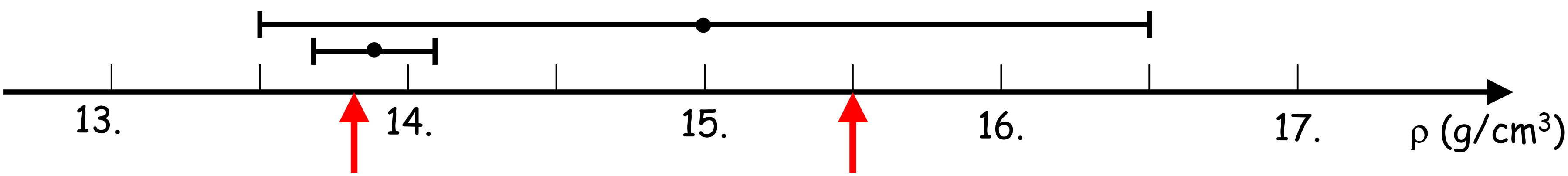
- ***Tutte le misure sono affette da incertezze ("errori")***
  - Una misura non ha significato se non e` accompagnata da
    - unita` di misura
    - **stima dell'incertezza**
  - Criteri per assegnare un'incertezza a ***misure*** fatte a partire da letture ***non ripetute*** di *strumenti tarati* : lezione di *oggi*
    - *Misure dirette*
    - *Misure indirette*: "propagazione" degli errori
  - Se possibile, conviene ripetere la misura !
  - Nella *prossima* lezione: come ridurre l'incertezza studiando la distribuzione dei risultati ottenuti in ***misure ripetute***

1. Premesse

Alcune definizioni

Perche` stimare le incertezze ?

- ***Esempio 1: una misura di g***
  - Dalle oscillazioni di un pendolo: g = 9.70 m/s^2 (valore accettato: 9.81)
    - E` una buona misura, anche se non molto precisa ? $\delta g = \pm 0.15 m/s^2$
    - E` una scoperta storica (quinta forza? anti-gravita`?) ? $\delta g = \pm 0.01 m/s^2$
- ***Esempio 2: una misura di densita`***
  - Oro: ρ = 15.5 g/cm^3 Lega non preziosa: ρ = 13.8 g/cm^3
  - I esperto: misura 15 g/cm^3, intervallo di confidenza da 13.5 a 16.5 g/cm^3
  - II esperto: misura 13.9 g/cm^3, intervallo di confidenza da 13.7 a 14.1 g/cm^3
    - Le due misure sono compatibili l'una con l'altra ?
    - L'oggetto considerato e` prezioso o di valore trascurabile ? (cioe`: la densita` e` compatibile o no con quella nota dell'oro?)



Errori “accidentali” e “sistematici”

Errori “accidentali” o “statistici” (“precisione” della misura)

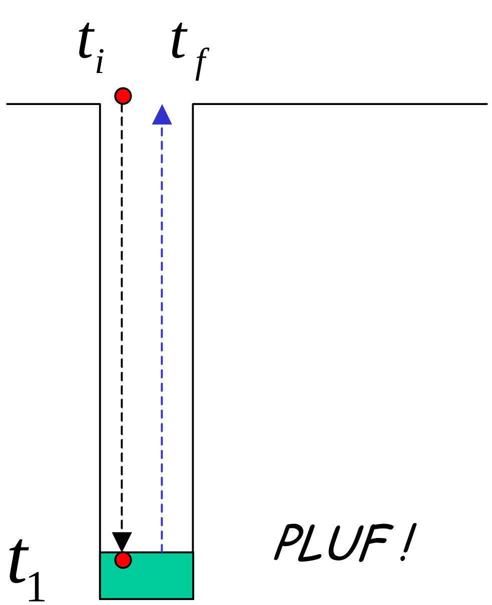
- Dovuti al concorso di un insieme di piccole perturbazioni non prevedibili e non controllabili, in parte positive e in parte negative
- possono essere analizzati con metodi statistici generali a partire dai risultati di misure ripetute

Errori “sistematici” (“accuratezza” della misura)

- Si ripresentano in misure ripetute con il medesimo valore e segno: perturbano il risultato sempre nello stesso verso (sempre in eccesso o sempre in difetto)
- non esistono regole generali: vanno individuati e ove possibile corretti caso per caso, attraverso una attenta analisi delle condizioni ambientali, del metodo di misura e delle caratteristiche della strumentazione

Errore sistematico: un esempio

- ***Misura indiretta della profondità h di un pozzo***
  - Profondità *h* dalla misura del tempo *t* impiegato da un sasso ad arrivare in fondo al pozzo
  - Tempo *t* (e quindi *h*) sovrastimato sistematicamente se:
    - "start" = istante t_i in cui il sasso viene lasciato cadere
    - "stop" = istante t_f in cui arriva in superficie il suono (PLUF !)



$$t_i = 0.0\,\text{s}; \qquad t_f = 2.5\,\text{s}$$

$$h = \frac{1}{2} g (t_f - t_i)^2 \approx 31\,\text{m}$$

Il tempo impiegato dal suono per percorrere 31m
Dal fondo ($t=t_1$) alla superficie ($t=t_f$) è all'incirca:

$$\delta t = t_f - t_1 \cong \frac{31\,\text{m}}{330\,\text{m/s}} = 0.1\,\text{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t}{t_f - t_i} = \frac{0.1}{2.5} = 0.04 = 4\%$$

Di quanto si sovrastima *h* se *t* è sovrastimato del 4% ?

Un bravo sperimentatore…

- Adotta strumenti e procedure che forniscano la **precisione** richiesta (cioè **l'errore statistico** richiesto)

- Si assicura che, fatte le opportune correzioni per gli effetti sistematici noti, il residuo errore sistematico sia inferiore a quello statistico

Come rappresentare le incertezze?

- ***La Migliore Stima*** (x_m) $\pm$ ***Incertezza*** (δx)

$$\boxed{x = x_m \pm \delta x}$$

- ***L'intervallo*** ($x_m - \delta x$, $x_m + \delta x$) ***esprime:***
  - la confidenza dello sperimentatore nel fatto che il valore "vero" della grandezza misurata sia compreso nell'intervallo (o piuttosto: le aspettative sui risultati di future misure di precisione comparabile)
    - In misure semplici: la stima prudenziale ("errore massimo") corrisponde in pratica alla "certezza" che la grandezza misurata sia compresa nell'intervallo dichiarato
    - In misure piu` raffinate (p.es. ripetute): all'intervallo viene associato un contenuto di "probabilita`", che discuteremo nella prossima lezione

Cifre significative

- ***Regola per le incertezze***
  - Le incertezze di misura dovrebbero (quasi) sempre essere arrotondate ad una cifra significativa
  - (Possibile eccezione se l'incertezza ha come prima cifra significativa 1 o 2)

$g = 9.82 \pm 0.02\cancel{385}\ \mathrm{m/s^2}$ $\Rightarrow$ $g = 9.82 \pm 0.02\ \mathrm{m/s^2}$

(oppure: $g = 9.820 \pm 0.024\ \mathrm{m/s^2}$)

- ***Regola per la miglior stima (valore centrale)***
  - L'ultima cifra significativa nella migliore stima di un risultato sperimentale dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza (cioe` nella stessa posizione decimale) dell'incertezza corrispondente

$v = 6051.\cancel{78} \pm 31\ \mathrm{m/s}$ $\Rightarrow$ $v = 6050 \pm 30\ \mathrm{m/s}$

(oppure: $v = 6052 \pm 31\ \mathrm{m/s}$)

Cifre significative – regole di calcolo

- *Somme e sottrazioni*
  - Nel risultato compaiono solo le cifre nelle posizioni decimali in cui entrambi gli operandi hanno cifre; ad esempio:

$$5.2+3.1=8.3 \quad 6.843+1.2=8.0 \quad 6.843+0.001=6.844$$

$$5\times10^2-4=5\times10^2 \quad 5.00\times10^2-4=4.96\times10^2$$

- *Prodotti e quozienti*
  - Il risultato ha lo stesso numero di cifre significative dell'operando che ne ha di meno; ad esempio:

$$5.2\times3.1=16. \quad 5.243\times3.1=16. \quad 5.243\times0.0031=0.016$$

$$\frac{37}{9}=4 \quad \frac{37}{9.1}=4.1$$

- *Conviene usare la notazione scientifica, non ambigua*

500 ?(1 o 3 cifre signif.?) 5×10^2 (1 cifra signif.) 5.00×10^2 (3 cifre signif.)

Errori assoluti e relativi

- ***Errore (incertezza) assoluto***
  - Def. $\varepsilon_a = |\delta x|$
  - Esempio $\delta x = 2$ mm $\Rightarrow$ $\varepsilon_a = 2$ mm
- ***Errore relativo*** (adimensionale!)
  - Def. $\varepsilon_r = |\delta x| / |x_m|$
  - Esempio $x_m = 1.327$ m $\Rightarrow$ $\varepsilon_r = 1.5 \times 10^{-3}$
- ***Errore percentuale*** (adimensionale!)
  - Def. $\varepsilon_{\%} = 100 \times |\delta x| / |x_m|$ (%)
  - esempio $\Rightarrow$ $\varepsilon_{\%} = 0.15$ %

NB: spesso l'errore relativo è quello che conta

2. Misure non ripetute dirette

Regole per la stima dell'errore massimo

Misure non ripetute dirette: errore "massimo"

- ***Misura con strumento tarato***
  - Analogico: costante di lettura **c**

    $c = 1/\sigma$ (σ = sensibilita`)
  - Digitale: risoluzione **r**
- ***Errore massimo δx***
  - Errore massimo assoluto:

    $\delta x = c$ ($\delta x = 2c$)

    $\delta x = r$ ($\delta x = 2r$)
  - Errore massimo relativo

    $\delta x/|x|$
  - Errore massimo percentuale

    $100\ \delta x/|x|$
- ***NB: "massimo"*** = stima prudente: riteniamo che includa i piu` grandi errori accidentali possibili

- ***Esempio:***

  Bilancia analogica di sensibilita`

  σ = 20 div/g

  Misura di una massa: migliore stima

  m = 12.32 g

  $\delta m = c = 1/\sigma = 0.05$ g

  $\delta m/m = 0.05/12.32 = 0.004$

  $100\ (\delta m/m) = 0.4$ %

3. Misure non ripetute indirette

Regole per la "propagazione dell' errore massimo"

Misure indirette, non ripetute: "propagazione" ?

"Propagazione degli errori massimi"

Incertezza in una **funzione di una sola variabile?**

$$q = f(x)$$

Incertezza in **somme e differenze?**

$$q = u \pm v$$

Incertezza in **prodotti e quozienti?**

$$q = uv \qquad q = \frac{u}{v}$$

Incertezza in una **potenza?**

$$q = x^n$$

Caso generale: **funzione arbitraria?**

$$q = f(u, v, w, \ldots)$$

Qualche esempio…

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = ab \qquad v = \frac{x}{t}$$

$$V = L^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

Propagazione: funzione di una variabile

Funzione di una variabile:

$$q = q(x) \qquad x = x_m \pm \delta x$$

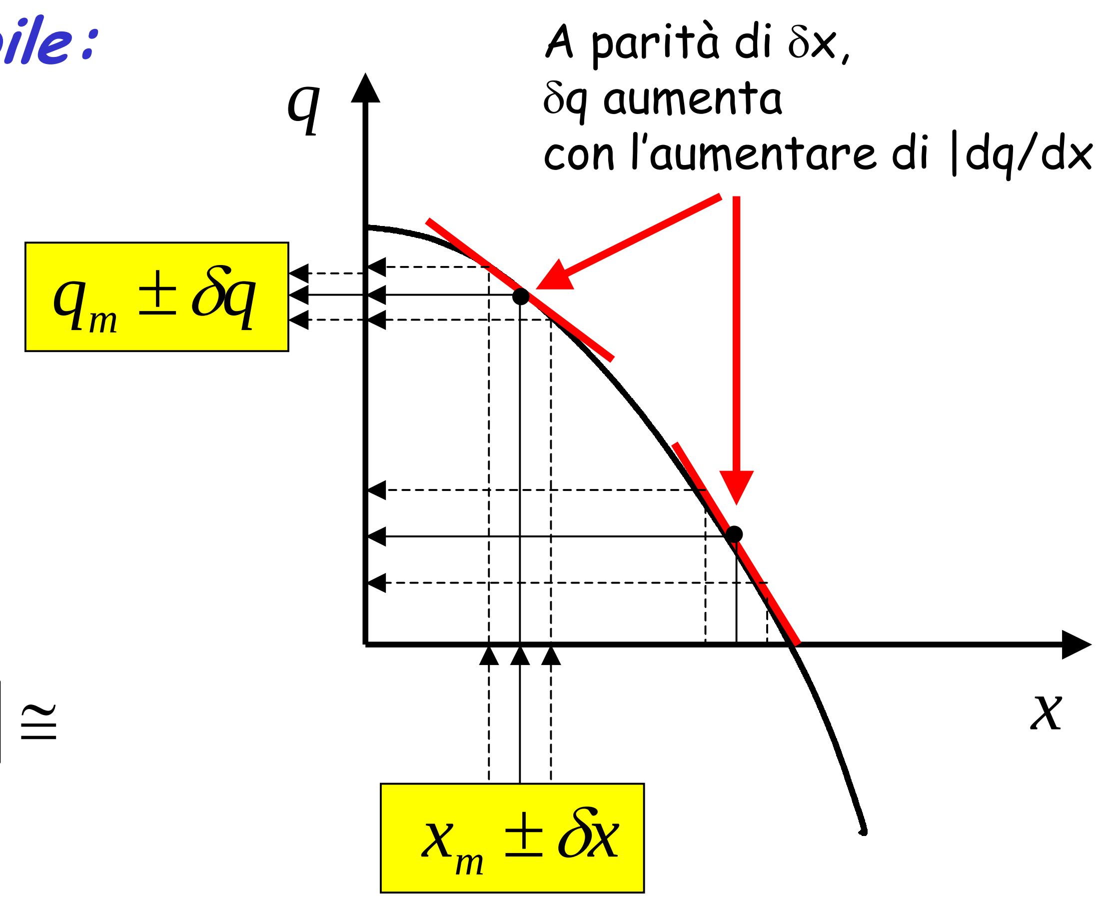
$$q_m = q(x_m)$$

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x=x_m} \delta x$$

Giustificazione:

$$\delta q = \left| q(x_m + \delta x) - q(x) \right| \cong$$

$$\cong \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x=x_m} \delta x$$

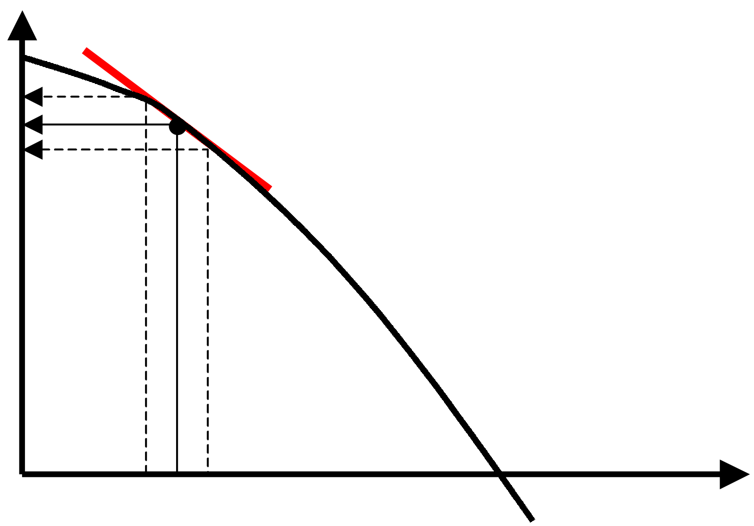


Propagazione, una variabile: esempio

Funzione di una variabile

$$q = q(x) \qquad x = x_m \pm \delta x$$

$$\boxed{q_m = q(x_m) \qquad \delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x=x_m} \delta x}$$



Un esempio

$$\boxed{\theta = (20 \pm 3)^o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = ?}$$

$$\theta_m = 20^o = 0.35 rad \qquad \delta\theta = 3^o = 0.05 rad$$

$$\cos(\theta_m) = 0.94$$

$$\delta(\cos\theta) = \left|\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0.35} \delta\theta =$$

$$= \left|\sin(0.35)\right| \delta\theta =$$

$$= 0.34 \times 0.05 = 0.02$$

$$\boxed{\cos\theta = 0.94 \pm 0.02}$$

Propagazione: caso generale

Funzione arbitraria di piu' variabili (riassume tutti i casi precedenti)

$$q = q(u, v, \ldots) \quad \Rightarrow \quad q_m = q(u_m, v_m, \ldots)$$

$$\boxed{\delta q \le \left|\frac{\partial q}{\partial u}\right| \delta u + \left|\frac{\partial q}{\partial v}\right| \delta v + \ldots}$$

con derivate parziali valutate in : (u_{best}, v_{best})

In molti casi questa e` una sovrastima dell'errore:

se le incertezze in u,v,… sono **indipendenti** e **accidentali**, l'incertezza viene stimata con la "**somma in quadratura**"

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \ldots}$$

Ritorneremo su questo punto discutendo le misure indirette ripetute

Propagazione, caso generale: giustificazione

Funzione arbitraria di piu' variabili:

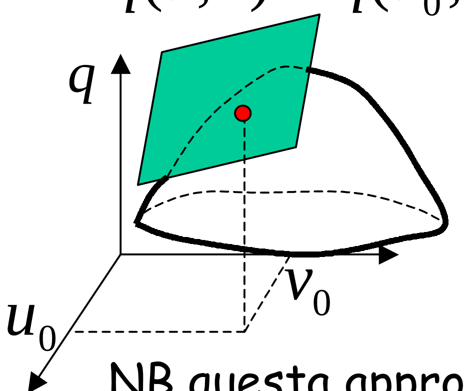
generalizzazione del differenziale (= approssimante lineare!) a piu` variabili
per semplicita`: caso di due variabili (risultato generalizzabile a piu` variabili)

$$u = u_0 + du\,, \quad v = v_0 + dv$$

$$\Delta q = q(u,v) - q(u_0,v_0) \approx dq$$

Derivate parziali valutate in (u_0,v_0)

$$q(u,v) \approx q(u_0,v_0) + dq = q(u_0,v_0) + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)_{(u,v)=(u_0,v_0)} du + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_{(u,v)=(u_0,v_0)} dv$$



Interpretazione geometrica: piano tangente al grafico della funzione in $P=(u_0,v_0,q(u_0,v_0))$

NB questa approssimazione equivale a valutare la variazione della funzione sul piano tangente (grafico dell'approssimante lineare) piuttosto che sulla superficie che rappresenta il grafico della funzione di due variabili

Propagazione, caso generale: giustificazione

Valori estremi per le grandezze u, v:

$$u = u_m \pm \delta u, \quad v = v_m \pm \delta v$$

$\Rightarrow$ *valori estremi per q(u,v):*

$$q = q(u_m, v_m) \pm \left(\left| \frac{\partial q}{\partial u} \right| \delta u + \left| \frac{\partial q}{\partial v} \right| \delta v \right) \quad \text{, derivate valutate in } (u_m, v_m)$$

$\Rightarrow$ *incertezza massima per q(u,v):*

$$\boxed{\delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial u} \right| \delta u + \left| \frac{\partial q}{\partial v} \right| \delta v} \quad \text{, derivate valutate in : } (u_m, v_m)$$

$\Rightarrow$ *NB si possono riottenere da questa equazione tutti i casi particolari (somme, sottrazioni, prodotti, etc.: provare, per esercizio)*

Propagazione, caso generale: esempio

Determiniamo l'errore massimo sulla quantita` q

$$q(x,y) = x^2 y - x y^2$$

Con stime per i migliori valori e le incertezze di x, y:

$$x = 3.0 \pm 0.1 \qquad y = 2.0 \pm 0.1$$

$$q_m = x_m{}^2 y_m - x_m y_m{}^2 = 6.0$$

$$(\text{contributo all'errore da } \delta x) = \delta q_x = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x = \left|2xy - y^2\right| \delta x = |12 - 4| \times 0.1 = 0.8$$

$$(\text{contributo all'errore da } \delta y) = \delta q_y = \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y = \left|x^2 - 2xy\right| \delta y = |9 - 12| \times 0.1 = 0.3$$

Risultato finale:

Errore assoluto massimo: $\delta q = \delta q_x + \delta q_y = 0.8 + 0.3 = 1.1$

$$q = 6.0 \pm 1.1$$

Errore assoluto in quadratura: $\delta q = \sqrt{(\delta q_x)^2 + (\delta q_y)^2} = \sqrt{(0.8)^2 + (0.3)^2} = 0.9$

$$q = 6.0 \pm 0.9$$

Alcuni casi particolari: somme, differenze

- ***Somma o differenza***
  - L'errore massimo **assoluto** è (in entrambi i casi) la **somma** degli errori massimi **assoluti** degli operandi

$$q = x + y \qquad x = x_m \pm \delta x, \qquad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m + y_m \qquad \delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y = 1 \times \delta x + 1 \times \delta y = \delta x + \delta y$$

$$q = x - y \qquad x = x_m \pm \delta x, \qquad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m - y_m \qquad \delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y = 1 \times \delta x + \left|-1\right| \times \delta y = \delta x + \delta y$$

Alcuni casi particolari: quozienti, prodotti, potenze

- **Quoziente o prodotto**
  - L'errore massimo **relativo** è la **somma** degli errori massimi **relativi**

$$\boxed{q = xy} \qquad x = x_m \pm \delta x, \qquad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = x_m y_m \qquad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|}\left(\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y\right) = \frac{|y|}{|xy|}\delta x + \frac{|x|}{|xy|}\delta y = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$$

$$\boxed{q = \frac{x}{y}} \qquad x = x_m \pm \delta x, \qquad y = y_m \pm \delta y$$

$$q_m = \frac{x_m}{y_m} \qquad \frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|}\left(\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y\right) = \left|\frac{y}{x}\right|\left(\frac{1}{|y|}\delta x + \frac{|x|}{|y^2|}\delta y\right) = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}$$

- **Potenze**
  - Immediata generalizzazione dal prodotto: $\boxed{q = x^n}$ $\quad \dfrac{\delta q}{|q|} = |n|\dfrac{\delta x}{|x|}$

Propagazione: "forma monomia"

Esercizio: verificare che nel caso di una "forma monomia":

$$q(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = \frac{x^a y^b \ldots}{u^c v^d \ldots}$$

Il calcolo dell'errore relativo con la regola generale riproduce i risultati particolari visti in precedenza:

$$\frac{\delta q}{|q|} = \frac{1}{|q|}\left(\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial u}\right| \delta u + \left|\frac{\partial q}{\partial v}\right| \delta v + \ldots \right) = \ldots$$

$$= \ldots = |a| \frac{\delta x}{|x|} + |b| \frac{\delta y}{|y|} + \ldots + |c| \frac{\delta u}{|u|} + |d| \frac{\delta v}{|v|} + \ldots$$

Cioe`: gli errori massimi relativi si sommano, pesati con il valore assoluto degli esponenti! (una regola simile vale per le somme quadratiche)

Conclusioni

Abbiamo discusso:

- Stima delle incertezze in misure **non ripetute** **dirette**
- "propagazione" degli errori in misure **non ripetute** **indirette**

Prossima lezione: misure ripetute dirette …

- L'analisi statistica ci aiuta a minimizzare le incertezze "accidentali"

… e alle misure ripetute indirette

- "propagazione" degli errori, riveduta e corretta