

# *Fisica Generale*

*Prof. L.Lanceri*

*Settimana 2 - Lezione 3*

*Vettori e Calcolo Vettoriale*



# *Vettori e calcolo vettoriale*



# Perchè usare i vettori in fisica?

---

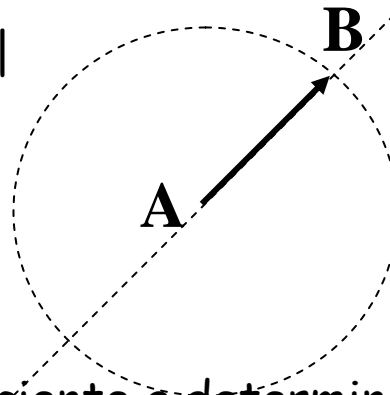
- *Grandezze fisiche "scalari":*

- completamente specificate da un numero (con unità di misura e incertezza)
- Esempi: distanza, tempo, massa, temperatura, carica elettrica, ...

- *Alcune grandezze richiedono maggiori informazioni:*

- Esempio: "spostamento" AB di un oggetto (punto) nello spazio, dalla posizione A alla posizione B, richiede:

- Distanza (scalare!)  $d=|AB|$
- Direzione
- Verso



- La sola distanza  $d$  non è sufficiente a determinare il punto d'arrivo B, noto A
- Altri esempi: forza, velocità, ...

- *Vettori*

- Notazione compatta, operazioni
- Equazioni tra vettori: indipendenti dal sistema di riferimento



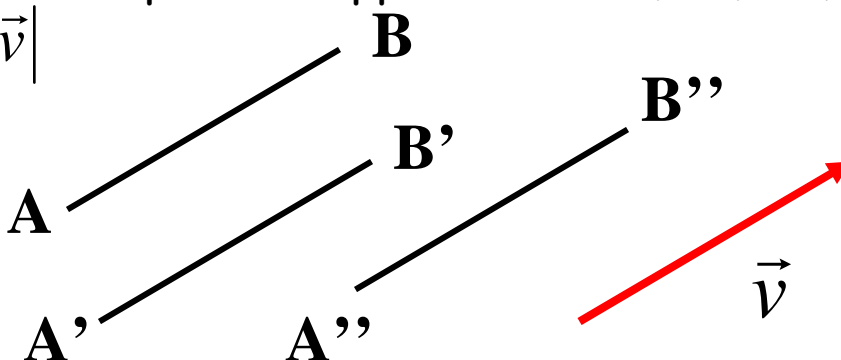
# Vettori - definizioni e notazioni

- Per una trattazione rigorosa e generale: spazi vettoriali e loro algebra in Geometria: qui principalmente richiami e notazioni

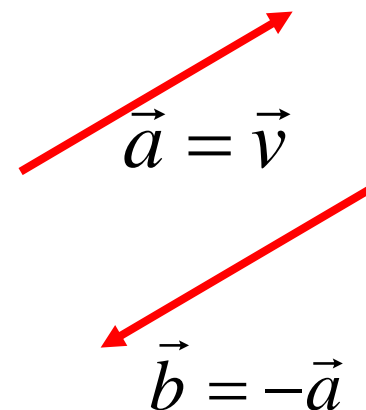
- **Vettore ("libero"):**

- Rappresentativo della classe di segmenti orientati (o "vettori applicati")  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $A''B''$ , ... che hanno diversi punti di applicazione  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ , ... ma:

- Ugual modulo  $v = |\vec{v}|$
- Ugual direzione
- Ugual verso

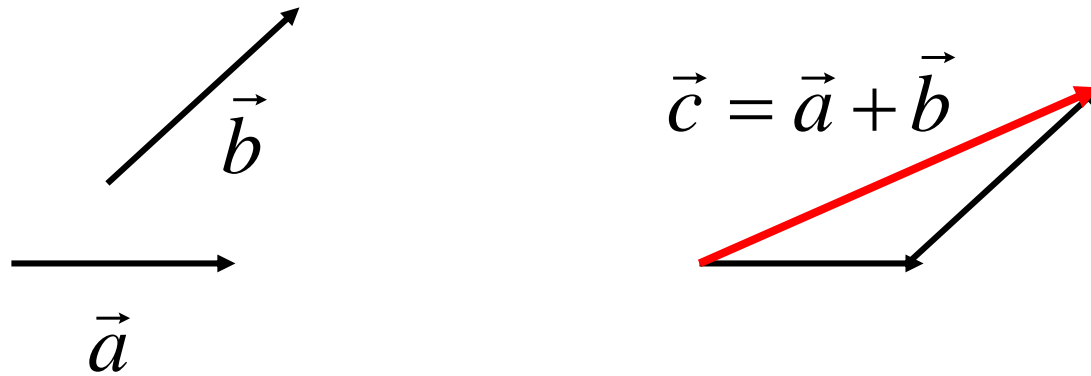


- **Vettori uguali**  $\Leftrightarrow$  stesso modulo, direzione e verso
- **Vettori opposti**  $\Leftrightarrow$  stesso modulo e direzione, ma verso opposto
- **Vettore nullo**  $\Leftrightarrow$  modulo nullo,  $v = 0$



# Vettori - somma e differenza

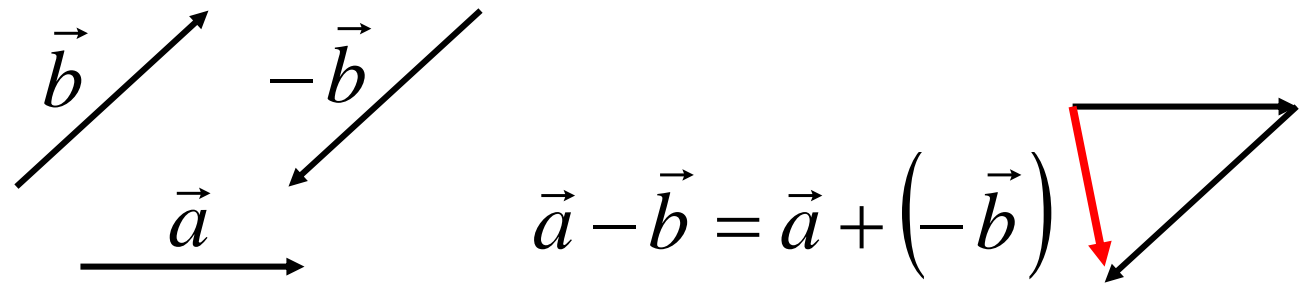
- *Somma*



Proprietà commutativa  $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$

Proprietà associativa  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

- *Differenza*



# Prodotto di uno scalare per un vettore

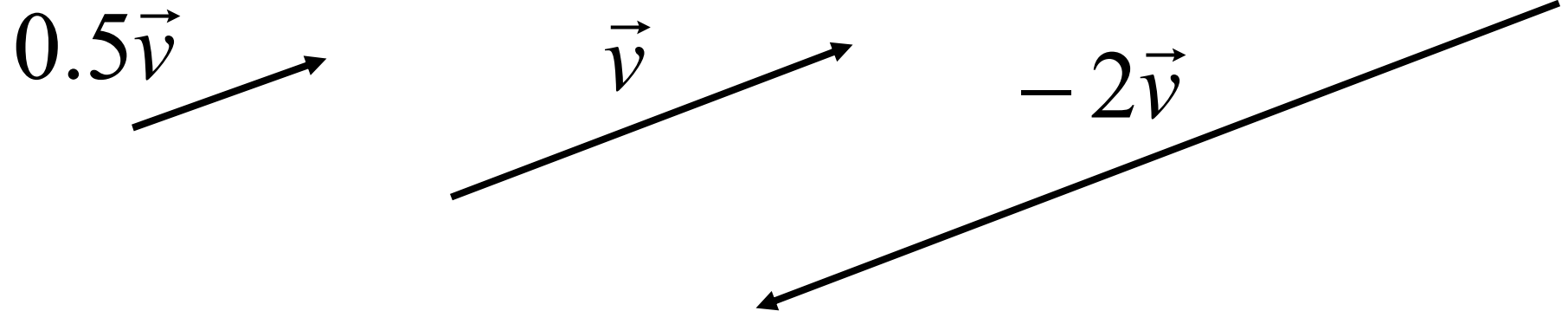
---

**Definizione: vettore**  $\vec{a} = k\vec{v}$   $\vec{v}$  vettore,  $k$  numero reale

Modulo  $|\vec{a}| = |k||\vec{v}|$

Direzione: quella del vettore  $\vec{v}$

Verso: concorde se  $k > 0$ , discorde se  $k < 0$



# Versori

- *Conviene separare le diverse proprietà di un vettore, ed in particolare direzione e verso, introducendo il suo "versore"*
  - Vettore unitario, adimensionale, che ha la stessa direzione e verso: definito dalla:

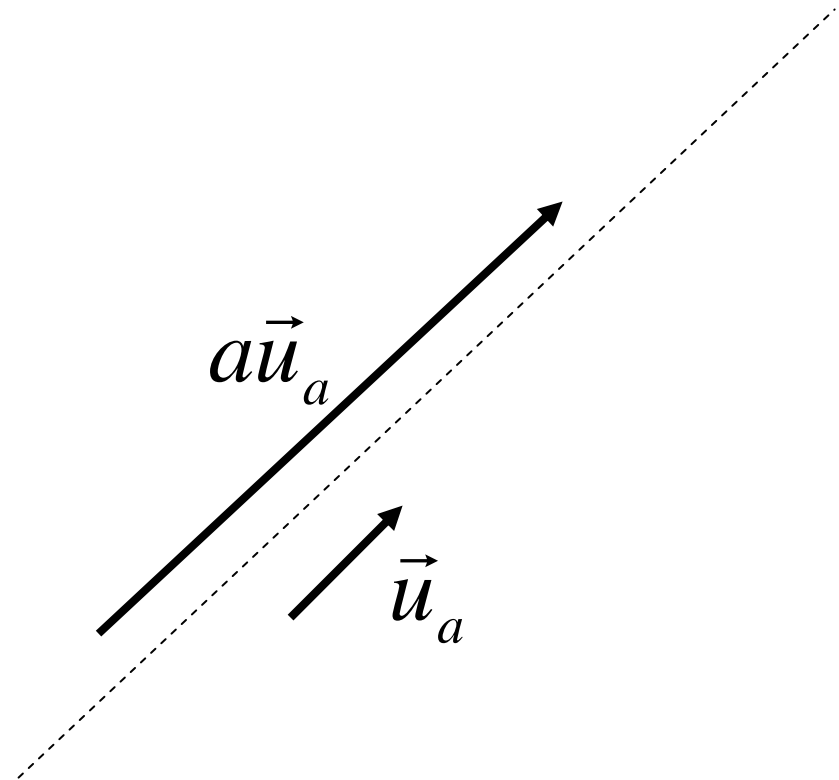
$$\hat{a} = \vec{u}_a = \frac{1}{a} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

- Notazione utile, che separa

il modulo di un vettore:  $a$

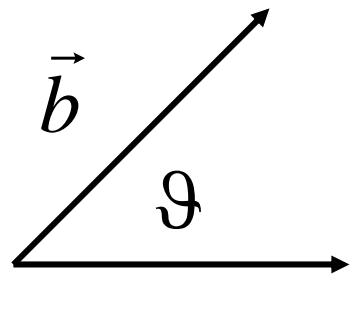
la sua "direzione orientata":  $\vec{u}_a = \hat{a}$

$$\vec{a} = a\vec{u}_a = a\hat{a} = |\vec{a}|\hat{a}$$



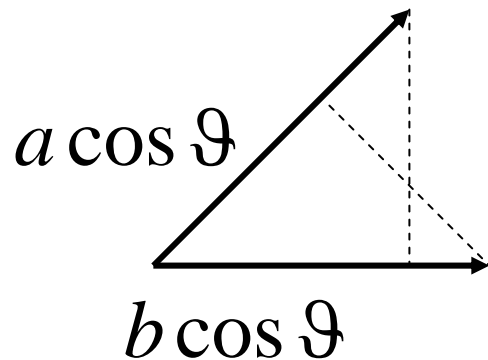
# Prodotto scalare fra vettori

- *Prodotto scalare (o "interno") fra due vettori:*


$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab \cos \vartheta \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ se } \vartheta < \pi/2 \\ < 0 \text{ se } \vartheta > \pi/2 \end{array}$$

- *Interpretazione geometrica:*

- Proiezione del modulo di uno dei vettori per la proiezione ortogonale (con segno) dell'altro vettore sulla sua direzione orientata



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab \cos \vartheta = (a \cos \vartheta)b = a(b \cos \vartheta)$$





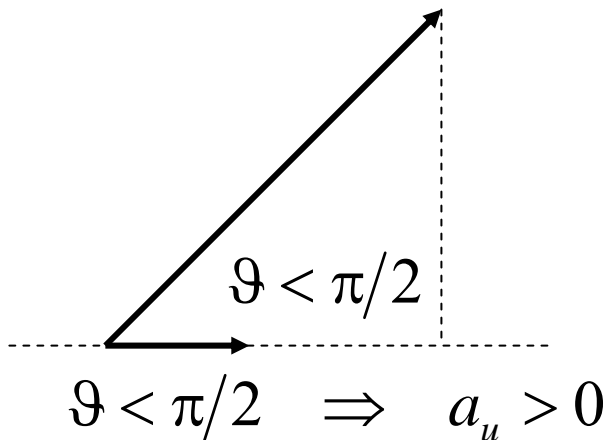
# Prodotto scalare - casi particolari

- *Modulo di un vettore:*

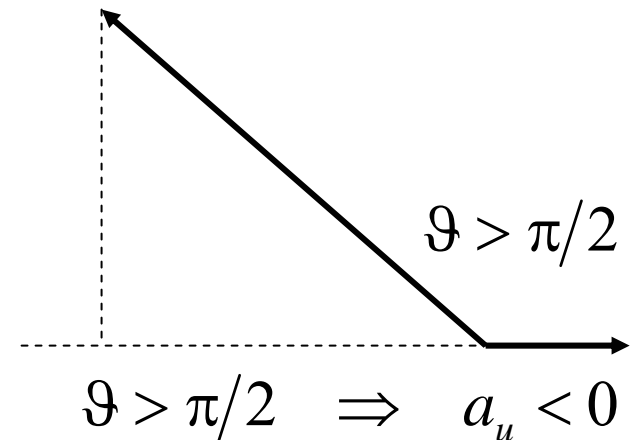

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = aa \cos 0 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

- *La "componente di un vettore lungo una direzione orientata":*

- Se uno dei vettori e' unitario e rappresenta una direzione orientata:

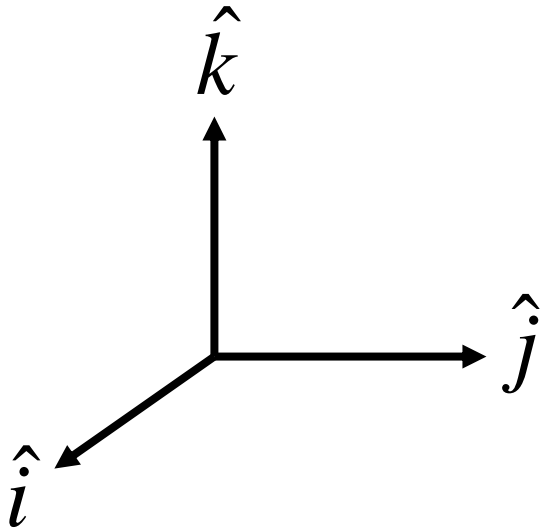


$$\vec{a} \bullet \vec{u} = a \cos \vartheta = a_u$$



# Rappresentazione cartesiana ortogonale

- *Terna cartesiana ortogonale destra:*
  - Versori tra loro ortogonali, orientati come:
    - $\hat{i}$   $\Leftrightarrow$  pollice, mano destra
    - $\hat{j}$   $\Leftrightarrow$  indice, mano destra
    - $\hat{k}$   $\Leftrightarrow$  medio, mano destra



orto - normali :

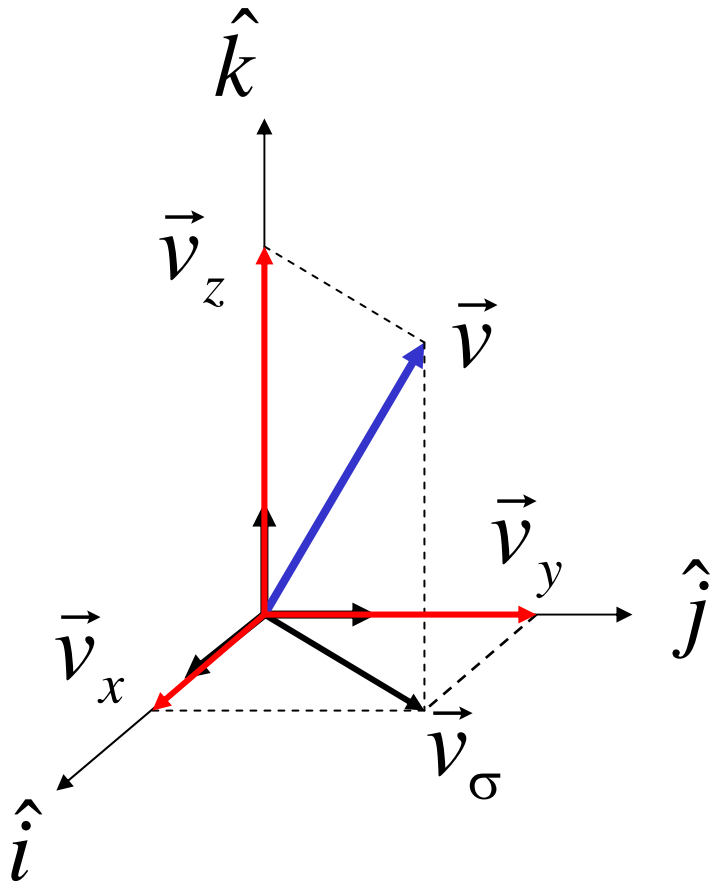
$$\hat{i} \bullet \hat{i} = \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \bullet \hat{j} = \hat{j} \bullet \hat{k} = \hat{k} \bullet \hat{i} = 0$$



# Rappresentazione cartesiana ortogonale

- *Scomposizione di un vettore in componenti cartesiane:*  
(attenzione: "i vettori componenti" e "le componenti" sono diversi)



$$\vec{v} = \vec{v}_\sigma + \vec{v}_z =$$

$$= \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z =$$

$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

i vettori  
componenti

Le componenti cartesiane:

$$v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} = v \cos \alpha$$

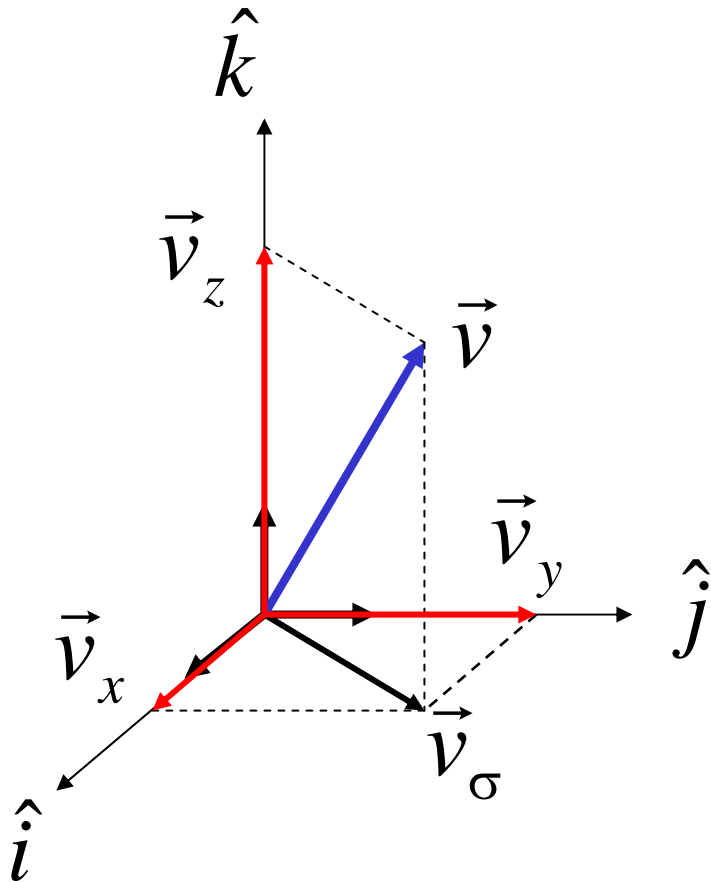
$$v_y = \vec{v} \cdot \hat{j} = v \cos \beta$$

$$v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} = v \cos \gamma$$



# Rappresentazione cartesiana ortogonale

- *Relazione con la rappresentazione mediante modulo  $v$  e direzione orientata (versore)  $\hat{u}_v$  del vettore?*



$$\vec{v} = v\hat{u}_v$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_v &= \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x}{v}\hat{i} + \frac{v_y}{v}\hat{j} + \frac{v_z}{v}\hat{k} = \\ &= \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}\end{aligned}$$

“coseni direttori”: componenti del versore  $\hat{u}_v$

$$v_x/v = \hat{u}_v \cdot \hat{i} = \cos \alpha$$

$$v_y/v = \hat{u}_v \cdot \hat{j} = \cos \beta$$

$$v_z/v = \hat{u}_v \cdot \hat{k} = \cos \gamma$$



# Espressioni cartesiane delle operazioni

---

- *Si verifica facilmente (esercizio):*

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}, \quad \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

- Uguaglianza

$$\vec{u} = \vec{v} \iff u_x = v_x, u_y = v_y, u_z = v_z$$

- Somma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x) \hat{i} + (u_y + v_y) \hat{j} + (u_z + v_z) \hat{k}$$

- Prodotto scalare

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

- Modulo

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$



# Conclusioni

---

- *Abbiamo discusso, a grandi linee*
  - Grandezze fisiche e misura, analisi dimensionale
  - Algebra vettoriale
  
- *Completeremo piu' avanti con*
  - Metodi per stimare le incertezze nelle misure: nella seconda parte del corso
  - Altre operazioni su vettori: le introdurremo quando ne avremo bisogno:
    - Derivazione
    - Prodotto vettoriale
  
- *Adesso:*
  - Un po' di esempi ed esercizi

