

Fisica Generale

Settimana 11 - Lezione 20

Facoltà di Ingegneria

Livio Lanceri



Introduzione

- *Motivazioni*
 - Navigazione inerziale, accelerometri
 - Fenomeni fisici per diversi osservatori (relatività galileiana, ...)
 - Esercizi/esperimenti da fare individualmente
- *Cinematica: posizione, velocità, accelerazione*
 - Per osservatori in moto relativo traslatorio
 - Per osservatori in moto relativo roto-traslatorio (caso generale)
- *Dinamica nei riferimenti non inerziali*
 - Leggi del moto modificate: forze "inerziali"
- *Esempi*
 - Riferimenti in moto relativo uniformemente accelerato
 - Riferimenti in moto rotatorio
- *Conclusioni e prospettive*
 - Relatività: galileiana, ristretta, generale



Motivazioni



Motivazioni - 1

- *Navigazione inerziale - accelerometri*

- Interesse pratico: strumentazione per la navigazione di aerei e navi
- Nota la posizione iniziale:
 - misure sufficientemente precise dell'accelerazione (vettoriale) istante per istante (a brevi intervalli)

$$a_x(t_i), a_y(t_i), a_z(t_i)$$

- Calcolo numerico della velocità (vettoriale) istante per istante

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$

- Calcolo numerico della posizione in funzione del tempo (Legge oraria)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$

- Gli errori di misura e calcolo si accumulano: periodica verifica della posizione calcolata con misure indipendenti della posizione



Motivazioni - 2

- *Fenomeni fisici per diversi osservatori*

- Validità delle leggi della fisica per diversi osservatori? Relazioni tra le descrizioni date da diversi osservatori?
- Primo esempio incontrato: principio di relatività galileiana
- Alcune domande:
 - Che succede per osservatori "non inerziali", accelerati, nell'ipotesi che il tempo scorra in modo eguale per i diversi osservatori?
(questa lezione)
 - Vale solo per la meccanica? Elettromagnetismo? Ottica?
 - Tempo per diversi osservatori...? etc



Esercizi/esperimenti - 1

- *Pesa-persone in ascensore*

- Munirsi di un pesa-persone ed annotare la lettura del proprio peso nelle seguenti condizioni, in un ascensore:
 - Ascensore fermo
 - Ascensore in salita (preferibilmente alcuni piani), con attenzione alla fase iniziale e finale del moto
 - Ascensore in discesa
- Scrivere una breve relazione con i numeri osservati e l'interpretazione tenendo conto dell'accelerazione dell'ascensore (possibilmente, stimarla in valore assoluto e segno)



Esercizi/esperimenti - 2

- *Filo a piombo in automobile*

- Appendere un filo a piombo in automobile, in una posizione che non interferisca con la guida. Annotare l'inclinazione del filo rispetto alla verticale nelle seguenti condizioni di moto per l'auto:
 - Ferma
 - Moto a velocità costante in rettilineo e in curva
 - Accelerazione in rettilineo
 - Decelerazione in rettilineo
- Riportare i dati osservati; provare a metterli in relazione quantitativa con l'accelerazione dell'auto nelle diverse condizioni

- *Palloncino riempito di elio in automobile*

- Come sopra, con un palloncino legato al pavimento dell'auto

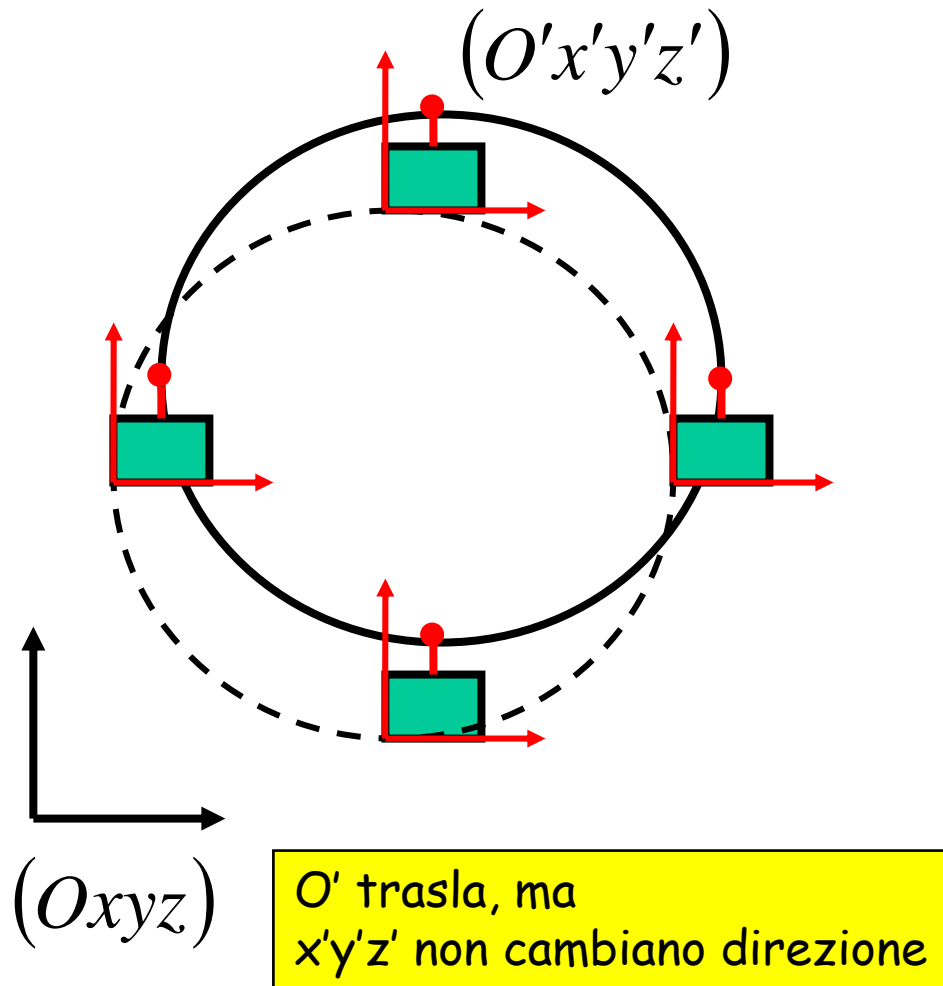


Cinematica

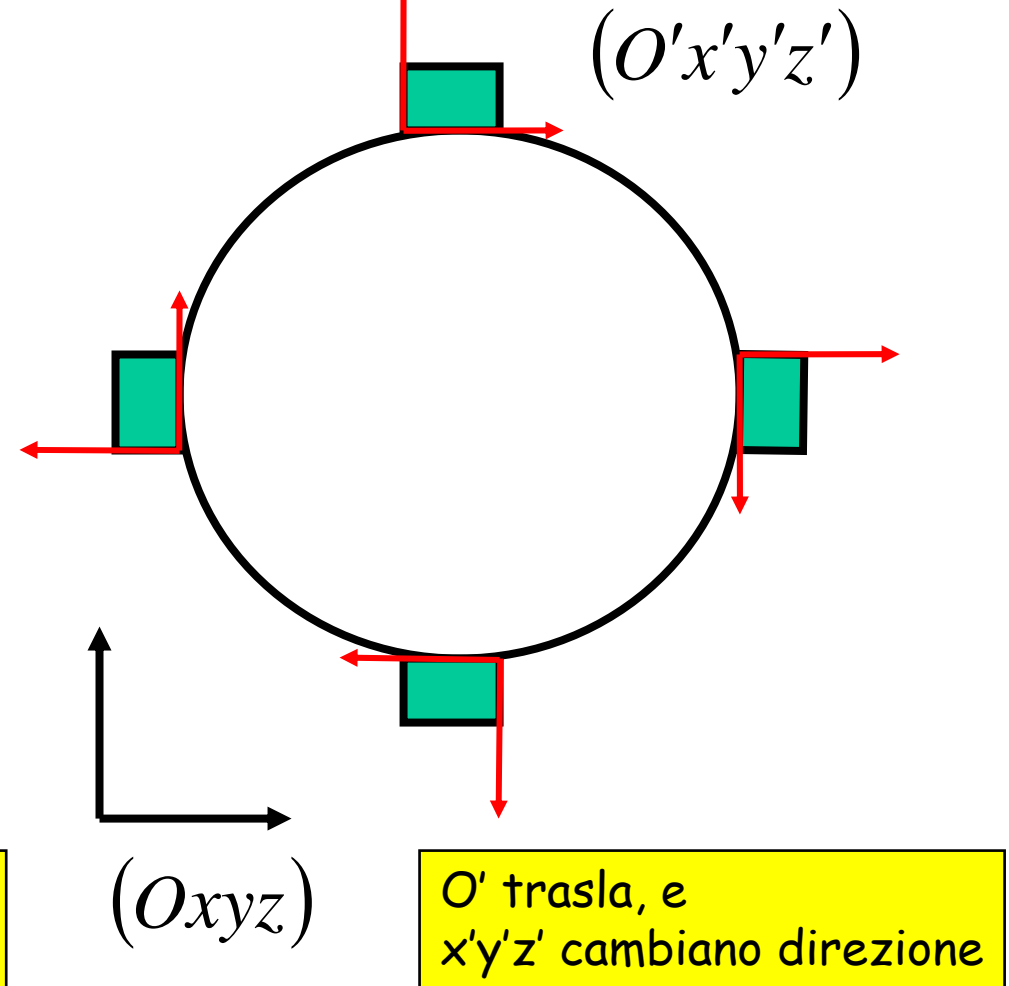


Moti "relativi" traslatori e rotatori

- Giostra "traslatoria"



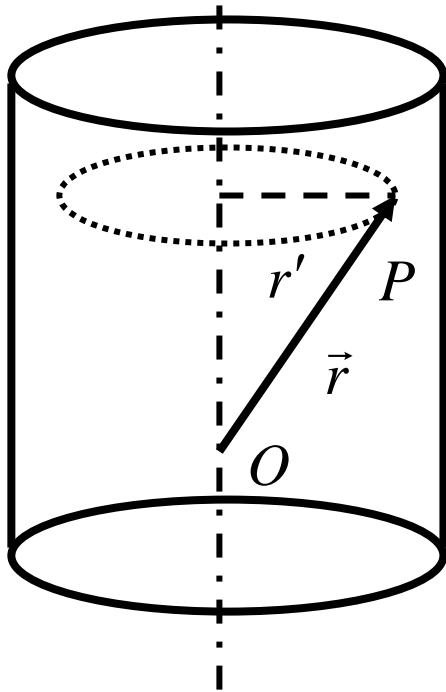
- Giostra "roto-traslatoria"



Per inciso:

- **velocità angolare come vettore**

- Utilità: p.es. Corpi rigidi: un **unico** vettore permette di descrivere le **diverse** velocità (vettoriali) dei singoli punti P , ciascuno dei quali descrive una circonferenza in un piano perpendicolare all'asse di rotazione, con raggio r'



$$\vec{\omega} \quad (\text{modulo: } \omega = \frac{d\mathcal{G}}{dt};$$

direzione: asse di rotazione;

verso: tale che...)

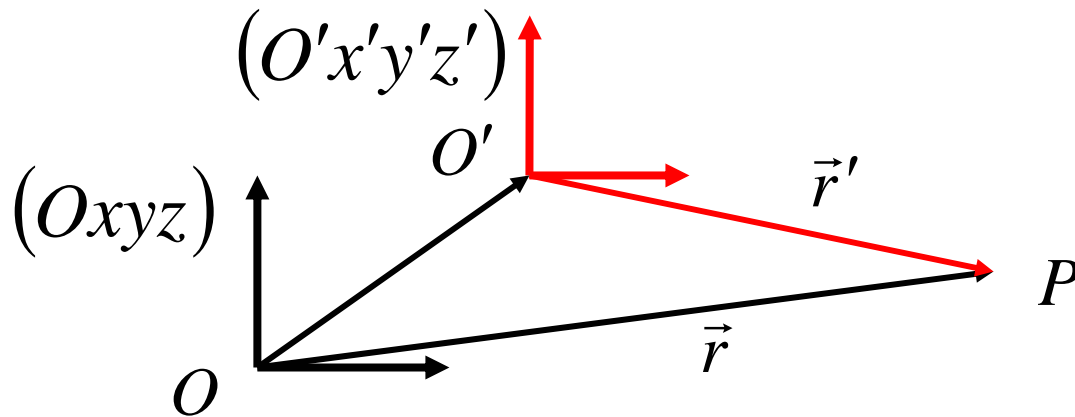
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times OP = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v_P = \omega r \sin \mathcal{G} = \omega r'$$



Cinematica: moto relativo traslatorio

- *Posizione di una particella secondo due osservatori in moto relativo traslatorio: ad ogni istante:*



$$OP = OO' + O'P$$

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{r}'$$

- *Velocità v e v' della particella secondo i due osservatori: derivando rispetto al tempo (ipotesi: tempi uguali per $Oxyz$ e $O'x'y'z'$)*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}'_P = \vec{v}_P - \vec{v}_{O'}$$



Cinematica: moto relativo traslatorio

*Accelerazione della particella secondo i due osservatori:
derivando ancora una volta rispetto al tempo:*

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_P = \vec{a}_P - \vec{a}_{O'}$$

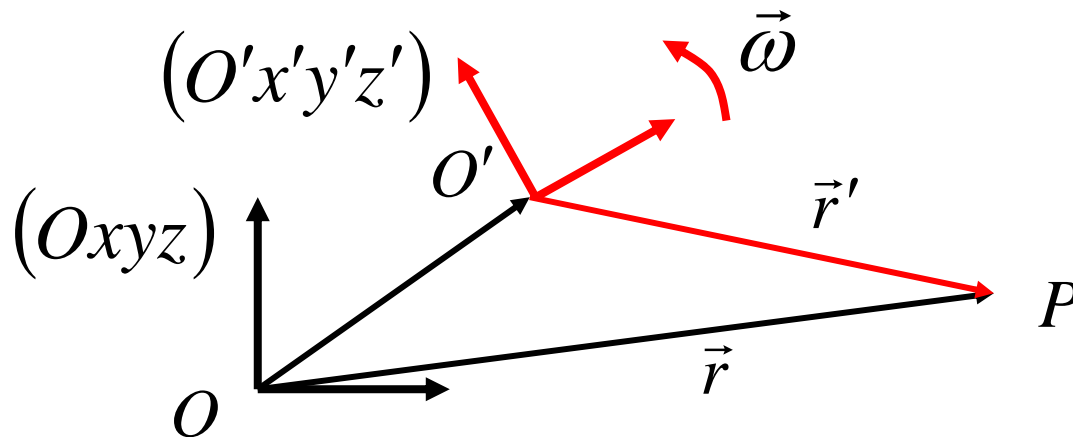
NB: se il moto dell'osservatore $O'x'y'z'$ è rettilineo uniforme rispetto a $Oxyz$, con velocità costante:

$$\vec{v}_{O'} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{O'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_P = \vec{a}_P$$



Cinematica: moto relativo roto-traslatorio

- *Posizione di una particella secondo due osservatori in moto relativo roto-traslatorio*
 - Stesso punto di partenza, ma:
 - i versori degli assi $O'x'y'z'$ hanno componenti variabili nel tempo
 - Le derivate danno risultati più complicati, che tengono conto della rotazione di $O'x'y'z'$, con velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$



$$OP = OO' + O'P$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

Cinematica: moto relativo roto-traslatorio

- *Velocità della particella secondo i due osservatori*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_P = (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times O'P) + \vec{v}'_P}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \dots$$

- *Accelerazione della particella secondo i due osservatori*

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times O'P)}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_P = (\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times O'P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P + \dots) + \vec{a}'_P}$$



Dinamica: forze "inerziali"



Legge del moto per diversi osservatori

- *Osservatore Oxyz inerziale I*
$$\sum_i \vec{F}_i^{reali} = m\vec{a}$$

- *Osservatore O'x'y'z' inerziale II*

$$\vec{a}_{O'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}'_P = \vec{a}_P \quad \sum_i \vec{F}_i^{reali} = m\vec{a} = m\vec{a}'$$

- *Osservatore O'x'y'z' non inerziale*

- Se insiste a usare solo forze "reali", non riesce a scrivere la legge del moto per una particella con l'accelerazione $a' \neq a$ da lui osservata

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + (...) \neq \vec{a}'_P \quad \sum_i \vec{F}_i^{reali} = m\vec{a} \neq m\vec{a}' \quad ???$$



Forze "inerziali"

- *Moto relativo degli osservatori solo traslatorio*

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P \Rightarrow \sum \vec{F}^{reali} = m\vec{a}_P = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'_P$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}^{reali} + (-m\vec{a}_{O'}) = m\vec{a}'_P}$$

- *Moto relativo degli osservatori traslatorio e rotatorio*

$$\vec{a}_P = (\vec{a}_{O'} + \dots) + \vec{a}'_P \Rightarrow \sum \vec{F}^{reali} = m\vec{a}_P = m(\vec{a}_{O'} + \dots) + m\vec{a}'_P$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}^{reali} + (-m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times O'P) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_P + \dots) = m\vec{a}'_P}$$

"Trascinamento"

"Centrifuga"

"Coriolis"



Esempi



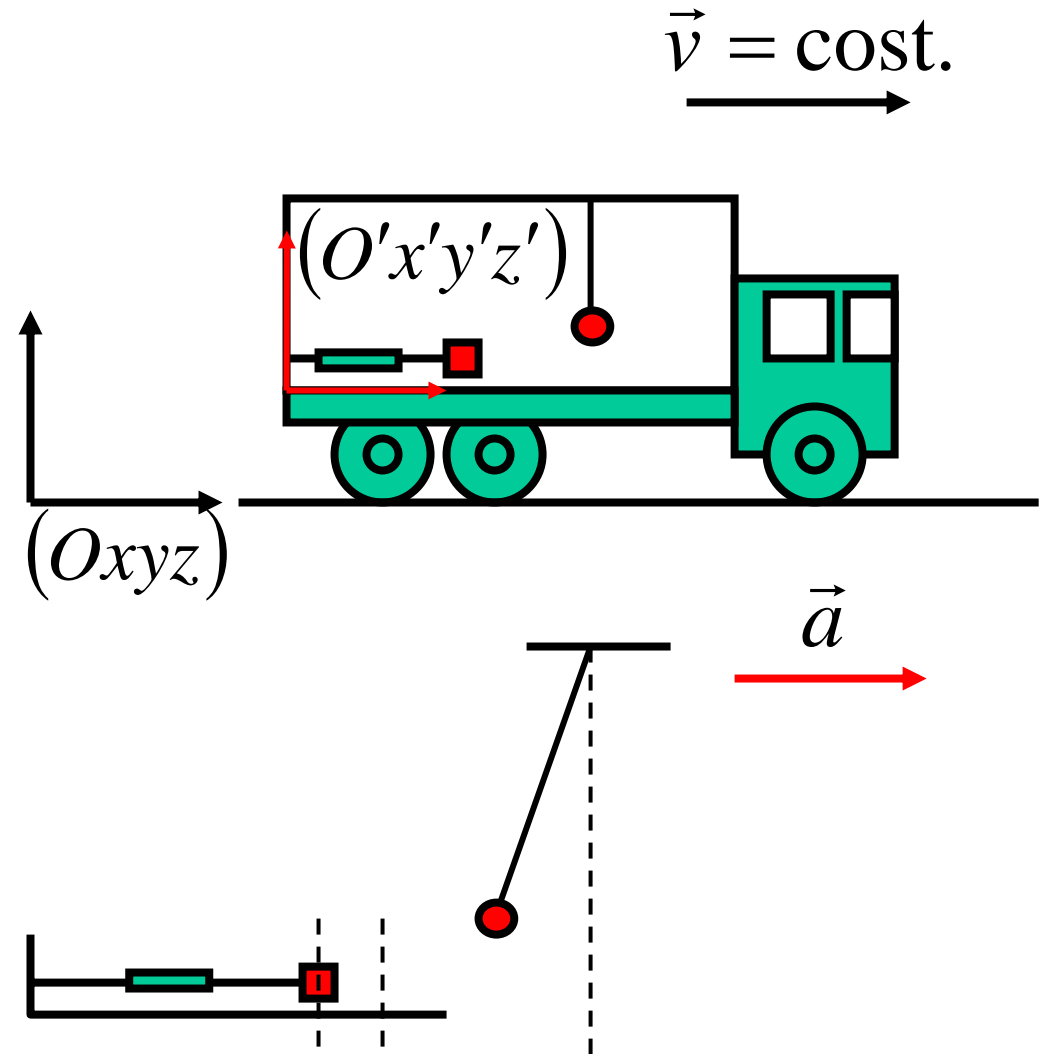
Esempio 1: accelerometro - 1

*Osservatori in moto
relativo traslatorio
accelerato:
accelerometri*

Pendolo (filo a piombo)
Massa collegata a
dinamometro (molla)

Riferimento accelerato con
 $a > 0$:

La molla si accorcia
Il filo a piombo si sposta
dalla verticale



Esempio 1: accelerometro - 2

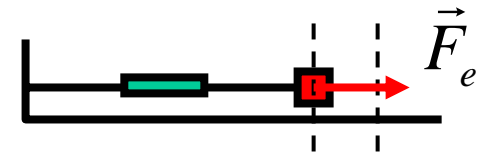
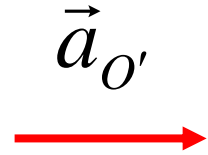
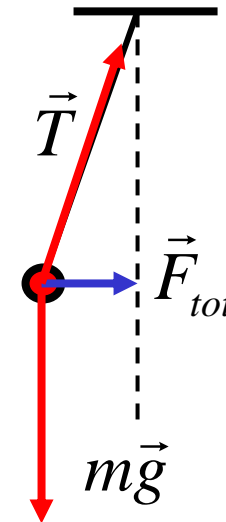
Per l'osservatore inerziale:

Filo a piombo

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} = m\vec{a}_{O'}$$

molla

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_e = -kx\hat{i} = m\vec{a} = m\vec{a}_{O'}$$



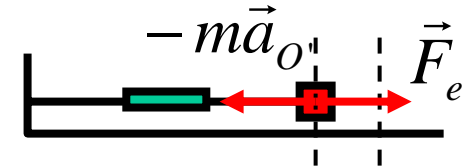
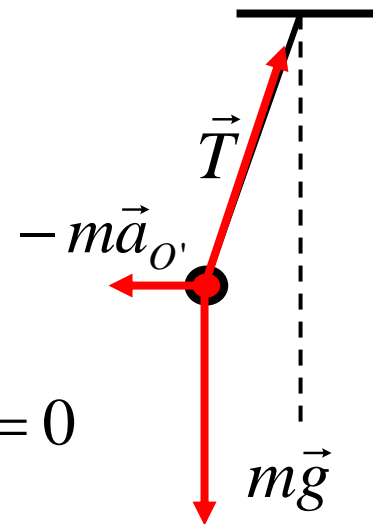
Per l'osservatore non inerziale:

Filo a piombo

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{g} + \vec{T} + (-m\vec{a}_{O'}) = 0$$

molla

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_e + (-m\vec{a}_{O'}) = -kx\hat{i} + (-m\vec{a}_{O'}) = 0$$

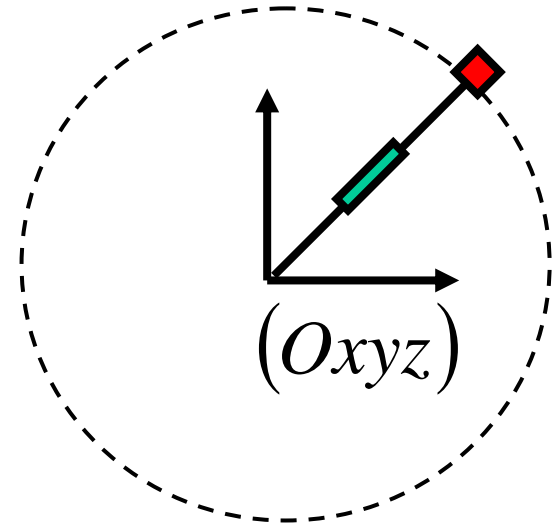


Esempio 2: moto circolare visto da due osservatori

- **Osservatore inerziale**

- corpo in moto rotatorio: il dinamometro che lo trattiene fornisce la forza risultante centripeta (elastica) applicata al corpo

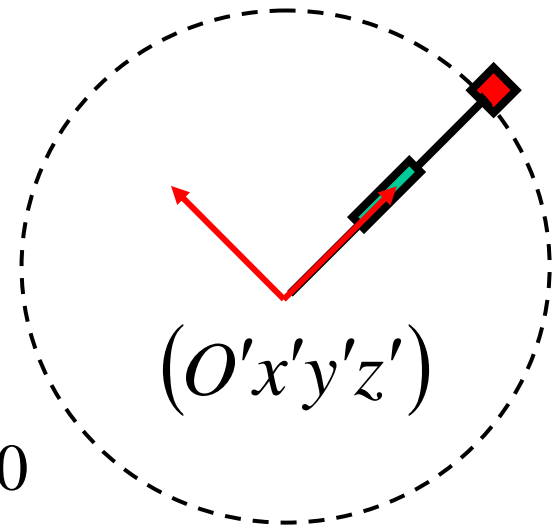
$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{el} = m\vec{a}_c = m\omega^2 r(-\hat{r})$$



- **Osservatore non inerziale rotante**

- Se la velocità angolare è la stessa: il corpo è in quiete, con risultante delle forze applicate nulla (centripeta F_{el} , reale, + centrifuga F_{in} inerziale)

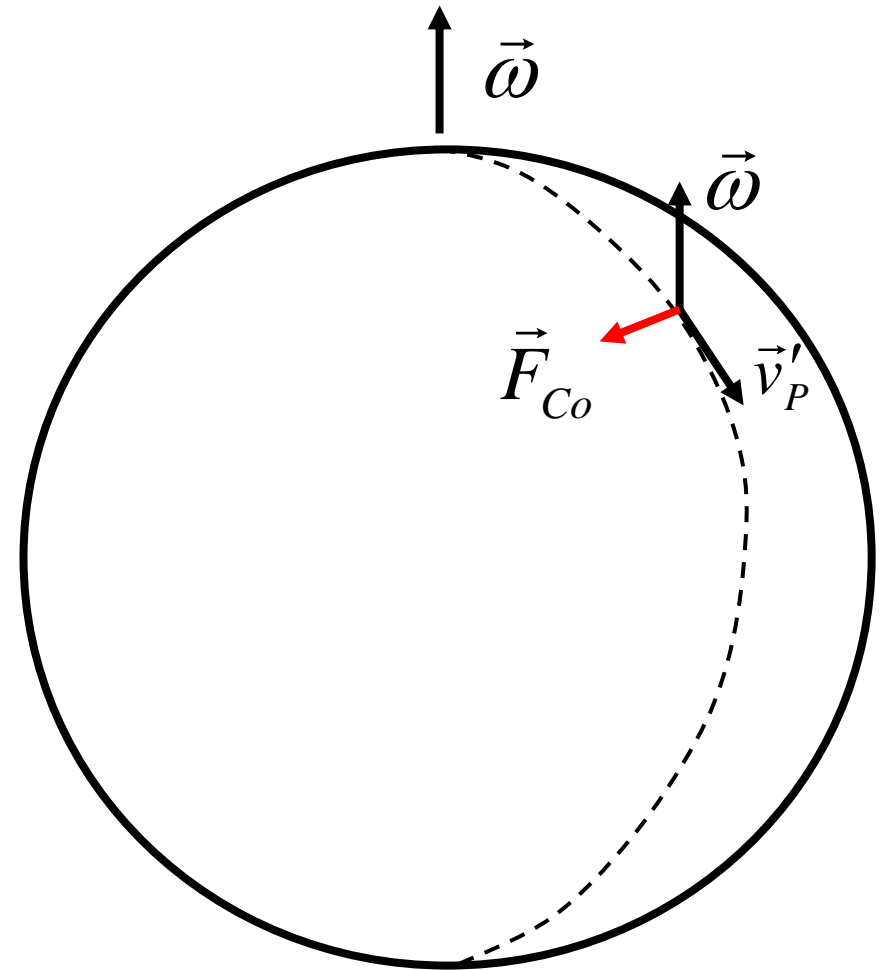
$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{el} + (-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times O'P)) = \vec{F}_{el} + m\omega^2 r\hat{r} = 0$$



Esempio 3 - forza di Coriolis

- *Se un oggetto si muove da N a S lungo un meridiano, con velocità \vec{v}'_P rispetto alla terra che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, esso risulta sottoposto alla forza inerziale di Coriolis, diretta da E a W:*

$$\vec{F}_{Co} = -m(2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P)$$



Conclusioni e prospettive



Riassumendo...

- *Dalle relazioni tra accelerazioni di una particella per osservatori in moto relativo*
- *All'introduzione delle forze "inerziali" nella legge del moto*
- *Ma non e` finita...*



...solo un punto di partenza

- *Relatività galileiana*
 - Osservatori in moto relativo rettilineo uniforme:
 - Tempi uguali
 - Leggi del moto uguali (con le stesse forze "reali" ed accelerazioni)
- *Relatività ristretta*
 - Osservatori in moto relativo rettilineo uniforme:
 - Velocità della luce: uguale per tutti?!? Leggi dell'elettromagnetismo?
 - Crisi della simultaneità: tempi diversi! Cinematica modificata
 - Dinamica modificata ed equaz. Maxwell: leggi uguali per diversi osserv.
- *Relatività generale*
 - Osservatori in moto relativo arbitrario; forze "inerziali" ...?
 - Gravità localmente simulabile per osservatore accelerato ???
 - Massa inerziale = massa gravitazionale (principio di equivalenza)
 - Teoria "geometrica" della gravitazione (spazio curvo etc...)

