Fisica Generale

Prof. L.Lanceri

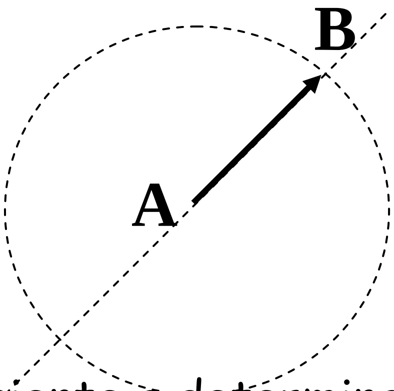
Lezione 3

Vettori e Calcolo Vettoriale

Vettori e calcolo vettoriale

Perchè usare i vettori in fisica?

- ***Grandezze fisiche "scalari":***
  - completamente specificate da un numero (con unità di misura e incertezza)
  - Esempi: distanza, tempo, massa, temperatura, carica elettrica, …
- ***Alcune grandezze richiedono maggiori informazioni:***
  - Esempio: "spostamento" AB di un oggetto (punto) nello spazio, dalla posizione A alla posizione B, richiede:
    - Distanza (scalare!) d=|AB|
    - Direzione
    - Verso

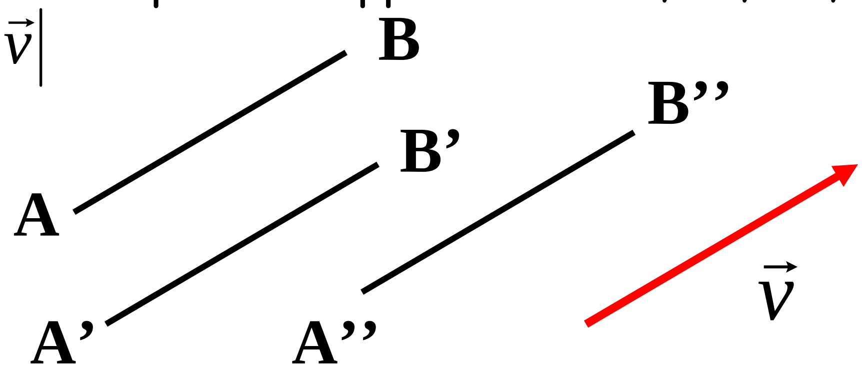


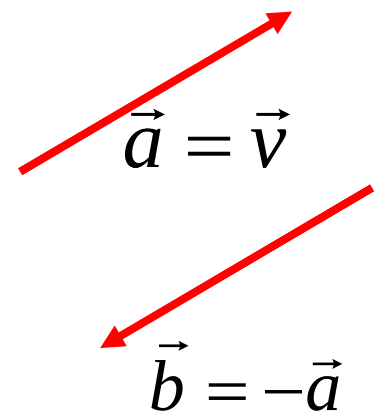
  - La sola distanza d non è sufficiente a determinare il punto d'arrivo B, noto A
  - Altri esempi: forza, velocità, …
- ***Vettori***
  - Notazione compatta, operazioni
  - Equazioni tra vettori: indipendenti dal sistema di riferimento

Vettori - definizioni e notazioni

- *Per una trattazione rigorosa e generale: spazi vettoriali e loro algebra in Geometria: qui principalmente richiami e notazioni*

- *Vettore ("libero"):*
  - Rappresentativo della classe di segmenti orientati (o "vettori applicati") AB, A'B', A"B", … che hanno diversi punti di applicazione A', A", A"', … ma:
    - Uguale modulo $v = |\vec{v}|$
    - Uguale direzione
    - Uguale verso

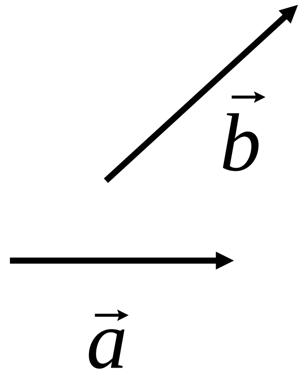




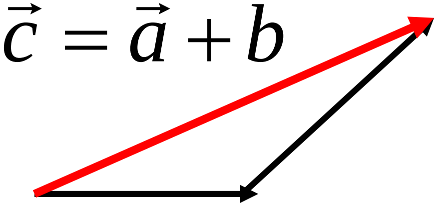
  - **Vettori uguali** ⇔ stesso modulo, direzione e verso
  - **Vettori opposti** ⇔ stesso modulo e direzione, ma verso opposto
  - **Vettore nullo** ⇔ modulo nullo, $v = 0$

Vettori – somma e differenza

- ***Somma***



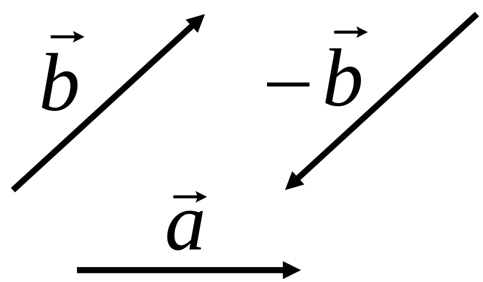
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



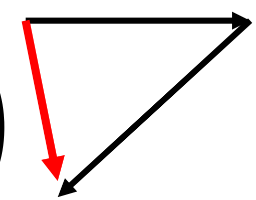
Proprietà commutativa $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$

Proprietà associativa $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$

- ***Differenza***



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$



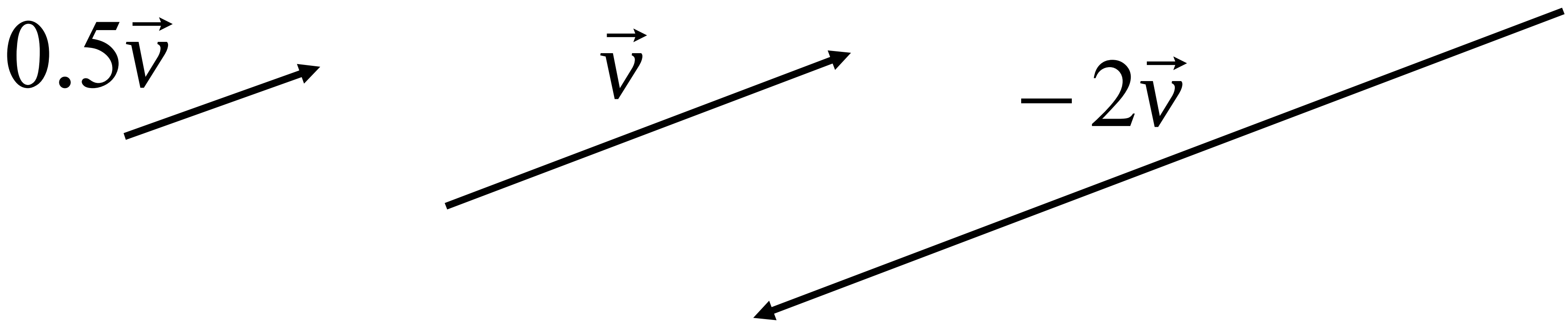
Prodotto di uno scalare per un vettore

Definizione: vettore $\vec{a} = k\vec{v}$ $\vec{v}$ vettore, k numero reale

Modulo $|\vec{a}| = |k||\vec{v}|$

Direzione: quella del vettore $\vec{v}$

Verso: concorde se k > 0, discorde se k < 0



Versori

- ***Conviene separare le diverse proprietà di un vettore, ed in particolare direzione e verso, introducendo il suo "versore"***
  - Vettore unitario, adimensionale, che ha la stessa direzione e verso: definito dalla:

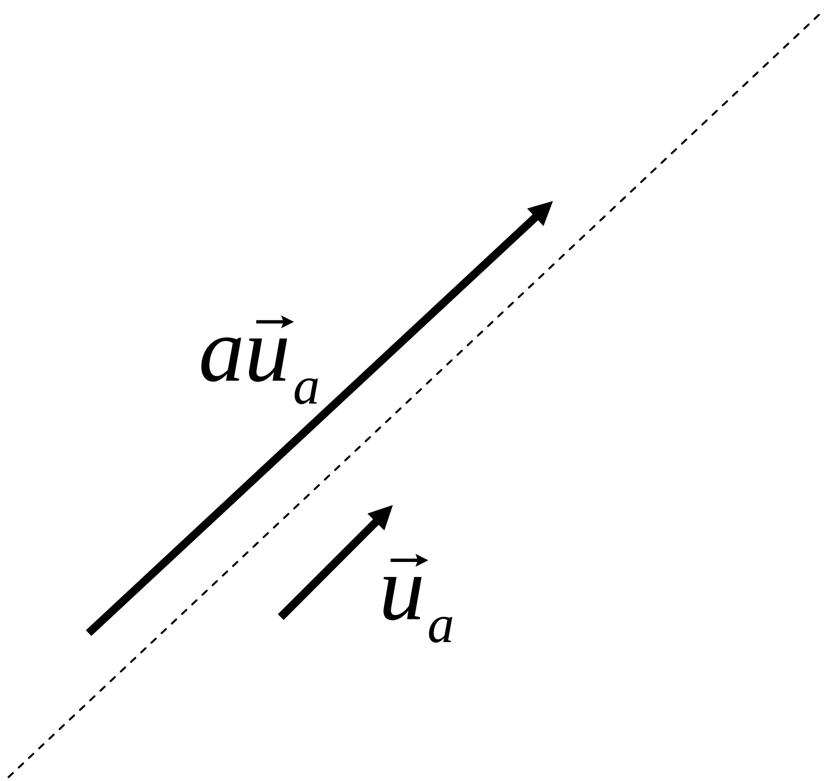
$$\hat{a} = \vec{u}_a = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

  - Notazione utile, che separa

il modulo di un vettore: a

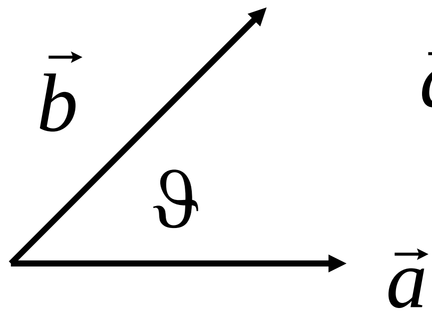
la sua "direzione orientata": $\vec{u}_a = \hat{a}$

$$\vec{a} = a\vec{u}_a = a\hat{a} = |\vec{a}|\hat{a}$$



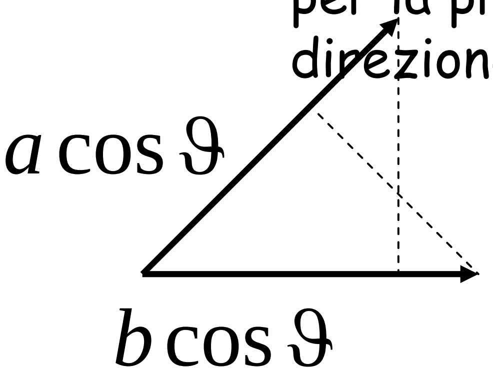
Prodotto scalare fra vettori

- ***Prodotto scalare (o "interno") fra due vettori:***



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\vartheta \quad \begin{array}{ll} > 0 \text{ se } & \vartheta < \pi/2 \\ < 0 \text{ se } & \vartheta > \pi/2 \end{array}$$

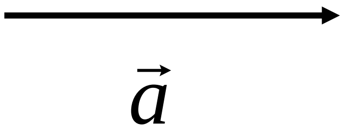
- ***Interpretazione geometrica:***
  - Prodotto di:
    - modulo di uno dei vettori
    - per la proiezione ortogonale (con segno) dell'altro vettore sulla direzione orientata del primo



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\vartheta = (a\cos\vartheta)b = a(b\cos\vartheta)$$

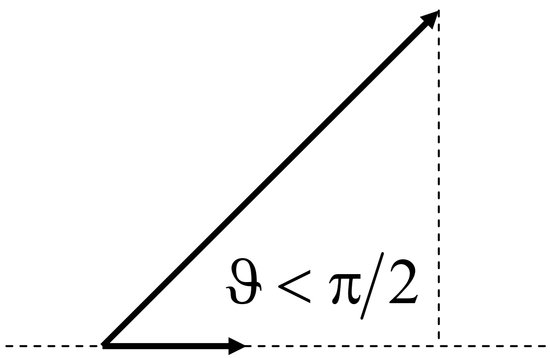
Prodotto scalare – casi particolari

- ***Modulo di un vettore:***

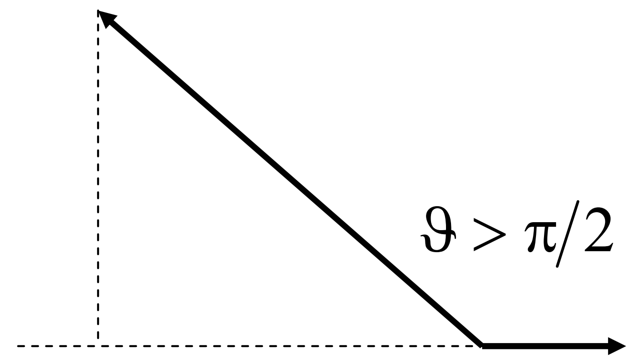


$$\vec{a} \bullet \vec{a} = aa\cos 0 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$$

- ***La "componente a_u di un vettore lungo una direzione orientata":***
  - Se uno dei vettori e` unitario e rappresenta una direzione orientata:



$$\vec{a} \bullet \hat{u} = a\cos\vartheta = a_u$$



$\vartheta < \pi/2 \quad \Rightarrow \quad a_u > 0$

$\vartheta > \pi/2 \quad \Rightarrow \quad a_u < 0$

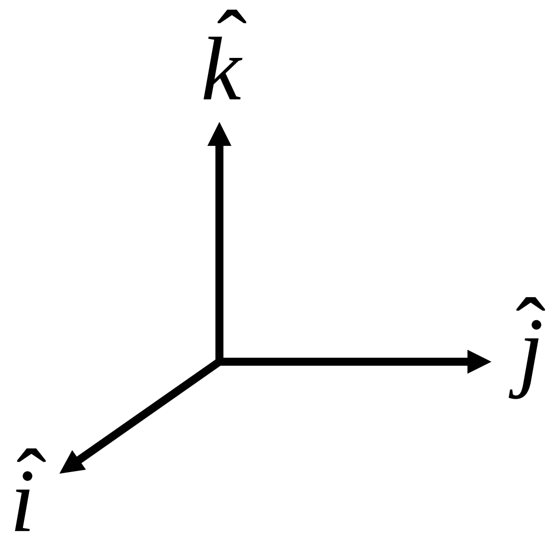
Rappresentazione cartesiana ortogonale

- ***Terna cartesiana ortogonale destra:***
  - Versori tra loro ortogonali, orientati come:

$$\hat{i} \Leftrightarrow \text{pollice, mano destra}$$

$$\hat{j} \Leftrightarrow \text{indice, mano destra}$$

$$\hat{k} \Leftrightarrow \text{medio, mano destra}$$



$$\text{orto-normali:}$$

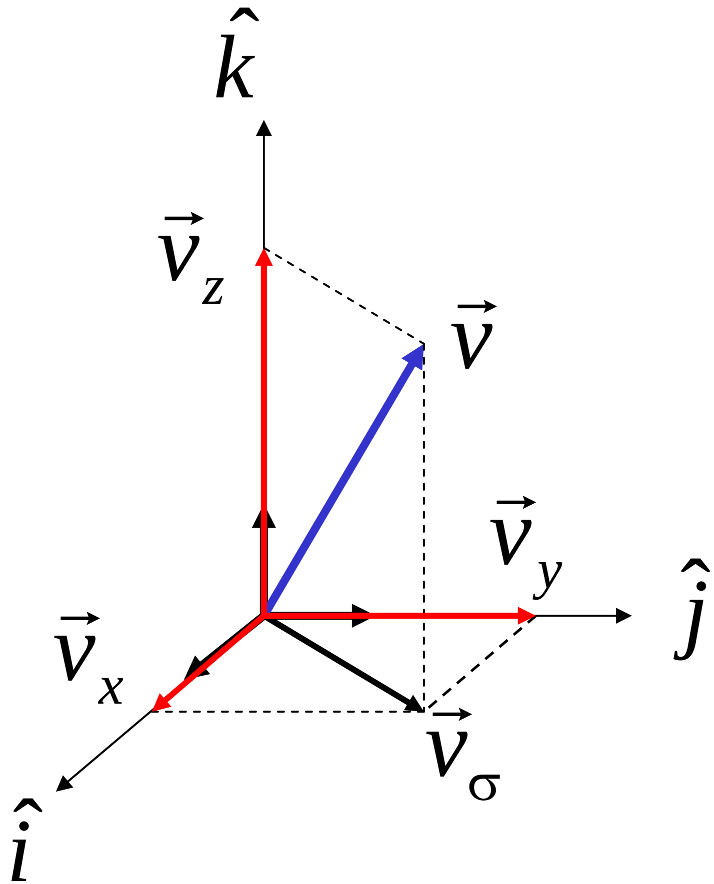
$$\hat{i} \bullet \hat{i} = \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \bullet \hat{j} = \hat{j} \bullet \hat{k} = \hat{k} \bullet \hat{i} = 0$$

Rappresentazione cartesiana ortogonale

- ***Scomposizione di un vettore in componenti cartesiane:***

  (attenzione: "i vettori componenti" ≠ "le componenti")



$$\vec{v} = \vec{v}_\sigma + \vec{v}_z =$$
$$= \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z =$$

i vettori componenti

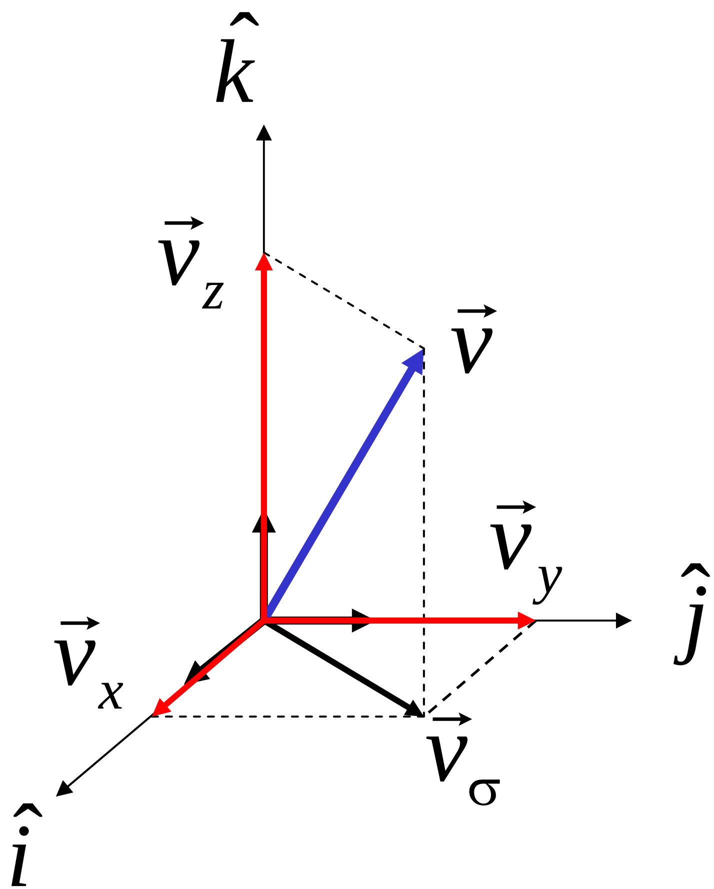
$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Le componenti cartesiane:

$$v_x = \vec{v} \bullet \hat{i} = v \cos \alpha$$
$$v_y = \vec{v} \bullet \hat{j} = v \cos \beta$$
$$v_z = \vec{v} \bullet \hat{k} = v \cos \gamma$$

Rappresentazione cartesiana ortogonale

- *Relazione con la rappresentazione mediante modulo v e direzione orientata (versore) u_v del vettore?*



$$\vec{v} = v\hat{u}_v$$

$$v = \sqrt{v_\sigma^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\hat{u}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x}{v}\hat{i} + \frac{v_y}{v}\hat{j} + \frac{v_z}{v}\hat{k} =$$

$$= \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

"coseni direttori": componenti del versore u_v

$$v_x / v = \hat{u}_v \bullet \hat{i} = \cos\alpha$$

$$v_y / v = \hat{u}_v \bullet \hat{j} = \cos\beta$$

$$v_z / v = \hat{u}_v \bullet \hat{k} = \cos\gamma$$

Espressioni cartesiane delle operazioni

- **Si verifica facilmente (esercizio):**

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}, \quad \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

- Uguaglianza

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_x \,, u_y = v_y \,, u_z = v_z$$

- Somma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\hat{i} + (u_y + v_y)\hat{j} + (u_z + v_z)\hat{k}$$

- Prodotto scalare

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

- Modulo

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Conclusioni

- ***Abbiamo discusso, a grandi linee***
  - Grandezze fisiche e misura, analisi dimensionale
  - Algebra vettoriale

- ***Completeremo piu` avanti con***
  - Metodi per stimare le incertezze nelle misure: nella seconda parte del corso
  - Altre operazioni su vettori: le introdurremo quando ne avremo bisogno:
    - Derivazione
    - Prodotto vettoriale

- ***Adesso:***
  - Un po' di esempi ed esercizi