LA TEORIA DELLE CODE

PRESENTAZIONE

Oggi parleremo della cosiddetta *teoria delle code* (o delle file d'attesa).

Innanzitutto vediamo di capire di cosa si tratta:

INTRODUZIONE

La teoria delle code (o delle file d'attesa) rappresenta l'analisi dei fenomeni di attesa che si possono manifestare in presenza della domanda di un servizio. Infatti in molte situazioni quotidiane la domanda stessa del servizio o la capacità de erogazione di esso sono soggetti ad aleatorietà: è questo il caso di richieste che si manifestano in modo casuale e indipendente l'una dall'altra e dell'impossibilità da parte di chi offre il servizio di soddisfare immediatamente le richieste.

I casi quotidiani sono molteplici:

- I clienti in banca;
- Le persone in attesa di un taxi;
- Le automobili a un incrocio;
- Gli aerei in attesa di decollo o atterraggio;
- Le parti in attesa di essere lavorate;
- Le persone al pronto soccorso.

Tutte situazioni queste alle quali è applicabile la teoria delle code.
Studi e simulazioni vengono fatti in molti casi: per la sincronizzazione dei semafori in base al traffico della zona o per stampare una stima del tempo di attesa nel ticket per un ufficio o in ospedale.

Tali situazioni, però, non sono tutte descrivibili con le stesse variabili casuali e con le medesime leggi di probabilità. Bisogna, quindi, prestare una particolare attenzione al tipo variabili aleatorie introdotte.

IL PROCESSO DELLA CODA

Dal punto di vista pratico la coda è un sistema composto da un insieme non vuoto di servitori che offrono un servizio a dei fruitori (i clienti) i quali appartengono a una popolazione composta da probabili utenti e che, se in attesa della prestazione, si dispongono in coda nel buffer.

La scelta del cliente in coda che per primo usufruirà del servizio avviene in accordo con una determinata *"disciplina di servizio"*.

L'arrivo dei clienti è casuale ed è a causa di tale aleatorietà che anche quando l'afflusso degli stessi non è superiore alla capacità di smaltimento da parte del sistema si avranno formazioni di code.

I parametri che descrivono la maggiore o minore capacità da parte del sistema di soddisfare le richieste dei fruitori e che determinano lo sviluppo della fila sono:

- *Il numero di serventi;*
- *Il tempo di servizio.*

In generale, però, sono diversi i parametri che vengono utilizzati per una piena descrizione di una fila d'attesa e questi sono:

- t_a: intervallo di tempo tra due arrivi successivi;
- t_s: tempo di servizio per l'i-esimo cliente;
- ρ: fattore di utilizzazione che rappresenta il rapporto tra il tempo impiegato in servizio e il tempo disponibile complessivo
- W_q: tempo complessivo speso dal generico cliente nella coda prima di venire servito;
- W_s: tempo complessivo speso dal generico cliente nel sistema;
- n: numero di clienti nel sistema all'istante considerato (*stato del sistema*);
- l_s: numero medio di clienti nel sistema;
- l_q: numero medio di clienti in attesa del servizio;
- $disciplina\ di\ servizio$: la regola secondo la quale i clienti in fila vengono scelti per usufruire del servizio;

le discipline di servizio variano molto nei casi quotidiani, se ne riportano di seguito alcuni esempi:

1. **FIFO/FCFS**, rispettivamente *"first-in, first-out"* e *"first-come, first-served"*. I clienti, cioè, vengono serviti in ordine di arrivo.
2. **LIFO/LCFS**, *"last-in, first-out", "last-come, first-served"*. Un esempio banale sono i piatti lavati e messi in pila, l'ultimo aggiunto sarà il primo ad essere prelevato. Questa disciplina viene studiata nei magazzini al fine che gli ultimi prodotti preparati non siano anche i primi ad essere venduti, altrimenti i primi aggiunti resteranno lì fino allo svuotamento del magazzino.
3. **SIRO,** *"service in random order"*. Questo è un servizio basato sull'ordine della priorità, tipico dei pronto soccorsi.

- $comportamento\ del\ cliente\ dopo\ il\ servizio$;
- l: eventuale lunghezza massima della coda.

I processi stocastici

I processi stocastici sono modelli matematici adatti a studiare l'andamento di fenomeni che seguono leggi casuali o probabilistiche. Questi sono molto utili per l'analisi di fenomeni naturali nei quali si può considerare sempre presente una componente aleatoria per la loro stessa natura, ma anche per errori di osservazione. Questo fa sì che il risultato dell'osservazione ad ogni istante non sia un dato certo e scevro da errori ad esso connessi, ma avrà sempre un'incertezza correlata. Per questo ogni suo valore sarà quello più probabile tra quelli assumibili.

I processi stocastici che caratterizzano un sistema coda sono due:

1. ***Il processo degli arrivi:***
questo è caratterizzato da una distribuzione di probabilità dei tempi di *interarrivo*, ovvero i tempi tra gli arrivi di due clienti successivi.
Al fine di renderli facilmente studiabili, nella teoria delle code, essi vengono considerati stazionari, ovvero le loro proprietà statistiche (come il tempo medio di interarrivo) non variano nel tempo.

2. ***Il processo di servizio:***
una distribuzione di probabilità descrive il tempo impiegato da ogni operatore per soddisfare le richieste del generico cliente.

Le distribuzioni dei tempi di arrivo e di servizio possono essere di qualunque tipo, basti pensare, ad esempio, ai clienti che entrano in un negozio. Gli ingressi possono essere in linea di massima casuali se i clienti non sono legati da relazioni personali, ma spesso si tratta di più persone insieme come un nucleo familiare, oppure la presenza di un numero elevato di persone in un negozio può indurre curiosità in altri passanti che entreranno per vedere quali siano gli oggetti di interesse.

A questo punto sorge spontaneo chiedersi come questo possa collegarsi a distribuzioni e studi probabilistici. Riprendiamo un attimo ciò che avete visto in classe e proviamo, poi, a trovare un collegamento con lo studio delle file d'attesa.

Voi la scorsa lezione avete introdotto la distribuzione binomiale che ricordiamo (SCRIVERE ALLA LAVAGNA) giusto?

ricordiamola

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Questa cosa ci dice? Ci fornisce la probabilità che k eventi discreti siano favorevoli su un totale di n eventi giusto?

Da questa, poi, avete ricavato la distribuzione di Poisson che si ottiene quando? (domanda retorica)

$$n \to \infty$$

Ovvero quando la "famiglia" (passatemi il termine, poi vedremo perché) di eventi totali diventa molto grande.

Allora si ha:

$$P_k = \frac{1}{k!}\nu^k e^{-\nu}$$

Dove $\nu = numero\ medio\ di\ eventi\ favorevoli$

Avete, ancora, visto che se consideriamo il numero medio di eventi favorevoli per unità di tempo, anziché come valore assoluto, e suddividiamo il tempo di studio del sistema in intervalli tanto piccoli al punto che in ognuno può cadere solo 0 o 1 evento favorevole si ottiene la *distribuzione dei conteggi* che assume la forma esponenziale:

$$P_1 = \nu e^{-\nu} = \mu T e^{-\mu T}$$

I conteggi cosa sono? Sono il n di eventi che si verificano in un intervallo di tempo

Questa ci dà la probabilità che nel tempo T vi sia un evento favorevole.

Potremmo, invece, essere interessati a conoscere il tempo trascorso tra un evento favorevole e il successivo. Ecco che, quindi, otteniamo la funzione di distribuzione esponenziale:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

$$\mu = \frac{1}{\tau}$$

Benissimo.

A questo punto abbiamo ripreso le distribuzioni di probabilità che conosciamo e abbiamo visto cosa sono le code e quali sono i due processi principali che le caratterizzano, ovvero:?

- l'arrivo in coda
- il tempo di servizio che determina l'uscita del fruitore dal sistema

potremmo pensare a questo processo come un processo "nascite-morti"? dove la nascita è l'ingresso nella coda e la morte l'uscita?

I due processi li possiamo considerare separatamente e solo dopo ci preoccuperemo di sommarli.

In un processo di sole nascite qual è l'evento favorevole? La nascita giusto? Quindi abbiamo una distribuzione dei conteggi e analogo per le morti.

Allora abbiamo

Un processo nascite-morti

Il processo di una coda può essere efficacemente paragonato a un processo di nascite-morti nel quale una nascita corrisponde ad un ingresso e una morte all'uscita di un cliente dal sistema.
Se si studia una popolazione con n persone, l'intervallo tra due nascite può essere pensato come una variabile aleatoria descritta da una funzione di distribuzione esponenziale con parametro λ_n e ugualmente per l'attesa tra due morti la cui funzione esponenziale ha un parametro μ_n.

Un particolare processo di sole nascite è descritto dalla funzione di distribuzione di Poisson in cui $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = 0$. Per cui la probabilità che al tempo generico t vi siano n persone in vita è descrivibile dalla distribuzione di Poisson. Di conseguenza il tempo di attesa tra due nascite (arrivi) è una variabile casuale descritta da una funzione di distribuzione esponenziale con $\lambda =$ frequenza media degli arrivi.

La probabilità che al tempo $t + \delta t$ ci siano n persone è data da:

1. La probabilità $p_n(t)$ che al tempo t ci siano n persone per a probabilità $(1 - \lambda_n - \mu_n)\delta t$ che nell'intervallo $(t, t + \delta t)$ non siano avvenute né nascite, né morti;
2. La probabilità $p_{n-1}(t)$ che al tempo t ci siano $n - 1$ persone per a probabilità $\lambda_{n-1}\delta t$ che nell'intervallo $(t, t + \delta t)$ sia avvenuta una nascita;

3. La probabilità $p_{n+1}(t)$ che al tempo t ci siano $n+1$ persone per a probabilità $\mu_{n+1}\delta t$ che nell'intervallo $(t, t+\delta t)$ sia avvenuta una morte;

ottenendo, quindi, il seguente sistema:

$$p_0(t) = p_0(t)(1-\lambda_0)\delta t + p_1\mu_1\delta t$$

$$p_n(t+\delta t) = p_n(t)(1-\lambda_n-\mu_n)\delta t + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\delta t + p_{n+1}(t)\mu_{n+1}\delta t$$

Per $t \longrightarrow \infty$, se il tasso delle morti supera quello delle nascite, il processo si può definire stazionario poiché le sue proprietà statistiche non variano ulteriormente, quindi $p_n(t) = p_n$. Questo stato, per quanto riguarda le code, è espresso dal coefficiente $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ quando è < 1.
In tal caso il sistema di equazioni differenziali di cui sopra diviene un sistema lineare omogeneo con la seguente soluzione:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \cdot \dots \cdot \mu_1} p_0$$

Ogni termine p_n rappresenta una probabilità, quindi, $\sum_n p_n = 1$

Se si riescono a calcolare, si può derivare p_0 come:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_n \frac{\lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \cdot \dots \cdot \mu_1}}$$

Conoscere l'espressione di tali probabilità e interpretando i processi di coda come processi nascita-morte permette di ottenere informazioni sullo stato medio della coda. In particolare nelle code **MM1** che presentano una coda e un solo operatore.

La notazione di Kendall

Nel seguito, per descrivere il tipo di coda analizzata, verrà utilizzata la *Notazione di Kendall* che consiste nell'uso dei seguenti simboli:

- **M**, indica la distribuzione esponenziale;
- **D**, indica una distribuzione deterministica[1];
- **G**, indica una funzione generica;
- $\mathbf{E_k}$, indica una funzione di Erlang con parametro k.

Per, poi, descrivere completamente il sistema preso in analisi lo si va ad individuare come segue:

$$\boldsymbol{A/B/s/d/e/f}$$

- $\boldsymbol{A}$**,** è la funzione di distribuzione che descrive gli intertempi di arrivo;
- $\boldsymbol{B}$**,** è la funzione di distribuzione che descrive i tempi di servizio;
- $\boldsymbol{s}$**,** è il numero di operatori nel sistema;
- $\boldsymbol{d}$**,** è la capacità massima della coda;
- $\boldsymbol{e}$**,** dimensione della popolazione dalla quale possono provenire i clienti;
- $\boldsymbol{f}$**,** descrive la disciplina di servizio.

CODA M / M / 1

In essa il processo degli arrivi viene definito con un parametro che non varia nel tempo, quindi $\lambda_n = \lambda$ e ugualmente per il tempo di servizio finito il quale il cliente esce (morte), dunque $\mu_n = \mu$.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ che è < 1

[1] Nel caso di tempi di arrivo e di servizio deterministici significa che essi sono noti a priori senza incertezza.

Dunque $p_n = \rho^n p_0$ e quindi $p_0 = \frac{1}{1+\sum_n \rho^n}$

Come si può osservare p_0 converge ad un valore solo se il sistema è in uno stato stazionario, ovvero se $\rho =< 1$ altrimenti la coda diventa illimitata.
In tal caso $\sum_{n=1} \rho^n$ è "quasi" [2] una serie geometrica per cui $\sum_{n=1} \rho^n = 1 + \frac{1}{1-\rho}$
Di conseguenza:

$$\boldsymbol{p_0 = 1 - \rho} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{p_n = \rho^n(1 - \rho)}$$

Se sono note le probabilità p_n si possono calcolare altre grandezze di interesse:

- *Il numero medio di clienti nel sistema:*

$$\boldsymbol{L_s} = E[n] = \sum_{n=1} n \cdot p_n = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{1 - \rho}}$$

- *Il numero medio di clienti in coda:*

$$\boldsymbol{L_q} = L_s - n.medio\ di\ clienti\ correntemente\ serviti = E[n-1] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1) \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$
$$= L_s - (1 - p_0) = \boldsymbol{L_s - \rho}$$

A questo punto è utile introdurre ***LA FORMULA DI LITTLE***
Infatti se una coda è stabile, in media devono uscire tanti clienti quanti ne entrano per cui per una coda MM1 il tasso di uscita è definito da λ.
Dunque, conoscendo il numero di clienti nel sistema, si può calcolare il *tempo medio di attesa dei clienti nel sistema* come:

$$W_s{}^3 = \frac{L_s}{\lambda}$$

Sapendo il tempo medio di servizio $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ si può dedurre anche il *tempo medio di attesa dei clienti in coda*:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

A questo punto si hanno tutte le informazioni per seguire lo studio delle simulazioni effettuate.

[2] Manca il termine di somma $n = 0$
[3] *Formula di Little*

LE SIMULAZIONI

Scopo

Lo scopo della simulazione proposta è quello di studiare la formazione di una coda nei casi in cui i servitori siano uno o più e i clienti vengono serviti con la disciplina FIFO.
Se ne vuole, quindi, analizzare lo sviluppo nel tempo a seconda delle distribuzioni di probabilità che descrivono il tempo di servizio, lasciando, quindi, invariata quella relativa agli intertempi di arrivo dei clienti. Inoltre risulta interessante capire se il tempo perso da ogni cliente può essere descritto da una funzione di probabilità specifica.
Da tali studi, poi, si possono dedurre diversi valori medi: il numero medio di persone nel sistema e in fila, il tempo medio di attesa in coda speso da un cliente prima di essere servito e quello trascorso, in media, nel sistema.

I modelli stocastici

GLI INTERTEMPI DI ARRIVO

Al fine del mio studio, data la larga applicazione e la migliore trattabilità da un punto di vista matematico, è stata utilizzata per i processi di arrivo la distribuzione esponenziale.
Tale scelta è stata determinata dal fatto che la probabilità del tempo di attesa per un seguente successo (l'arrivo di un cliente) rimane la stessa indipendentemente dal periodo trascorso dal precedente. Questo è efficacemente descritto dalla distribuzione esponenziale che, si può dire, "dimentica il passato".

Per quanto riguarda i tempi di arrivo, ciò significa che l'arrivo di un cliente non influenza quello di un altro.
Tale situazione la si può ritrovare nelle code in banca, in posta o al supermercato dove l'ingresso di un cliente è determinato solamente da una personale necessità.

La funzione di distribuzione esponenziale

Una variabile ha funzione di distribuzione esponenziale con il parametro di vita media $\tau > 0$ quando la sua densità di probabilità viene definita come segue:

$$f(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{\tau}$ è l'intensità di eventi per unità di tempo.

Tale funzione di probabilità soddisfa le seguenti condizioni:

- La probabilità che un evento occorra in un intervallo di tempo infinitesimo dt è proporzionale a dt, con μ costante di proporzionalità:
$$P(t < X \leq t + dt) = \mu \cdot dt$$
- La probabilità di avere più di un evento in un intervallo dt è nulla;
$$P_{\geq 1}(dt) = 0$$
- La probabilità che l'evento successivo accada oltre un certo limite non dipende dal tempo trascorso dall'evento precedente.

Nel caso degli intertempi di arrivo, λ, rappresenta il numero atteso di ingressi nell'unità di tempo.

I TEMPI DI SERVIZIO

Anche i tempi di servizio, nella prima parte dell'analisi sono stati modellati con una funzione esponenziale. In questo modo il tempo necessario al completamento dell'operazione è indipendente da quando la stessa è iniziata.

$$f(t,\tau') = \begin{cases} \frac{1}{\tau'} e^{-\frac{t}{\tau'}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Importante è, in questo caso, che $\mu = \frac{1}{\tau'}$ sia maggiore di λ, ovvero che, nel caso di un operatore per esempio, esso sia in grado di servire più clienti rispetto a quelli in ingresso, altrimenti la coda diventa infinita.

Un secondo studio è stato effettuato considerando i tempi di servizio come una variabile aleatoria con funzione di distribuzione gaussiana $N(\tau, \tau^2)$, cioè del tipo:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\tau^2}}$$

In questo caso i valori dei tempi di attesa si concentrano attorno al valore di aspettazione, ovvero al τ deciso in sede di simulazione, in modo simmetrico con tempi maggiori o minori al contrario di una variabile aleatoria descritta da una funzione esponenziale per la quale i valori più piccoli sono i più probabili dato che la funzione di distribuzione è strettamente decrescente.

STIMA DEI PARAMETI E TEST D'IPOTESI

Una volta impostate le funzioni di distribuzione dei tempi di arrivo e di servizio si è interessati a conoscere l'evoluzione della coda nel tempo. Per capirlo è utile studiare il variare del numero di clienti presenti nel sistema nel corso delle ore, nonché il tempo perso da ogni cliente nel sistema. Ciò permette di capire, per esempio, se la coda sta aumentando e se, quindi, il tempo di attesa diventerà infinito, oppure se tutti i clienti verranno smaltiti. Si riesce, perciò, a dedurre l'efficienza di un sistema e si conoscono i parametri da modificare per migliorarla contenendo, per esempio, i costi da parte dell'azienda fruitrice del servizio.

Per fare ciò è stato impostato un test d'ipotesi sul tempo perso da ogni cliente nel sistema, infatti se sia i tempi di arrivo che di servizio sono descrivibili da una funzione di distribuzione esponenziale e gli ultimi sono tali da riuscire a smaltire la coda, ci si può aspettare che anche il tempo dai clienti all'interno del sistema sia una variabile con funzione esponenziale per la quale i valori più probabili si attestano in corrispondenza dei valori più piccoli. Questo rappresenterebbe un sistema efficiente.

Per verificare tale ipotesi, però, è necessaria la stima del parametro τ^* (il valor medio dei tempi persi) il cui inverso rappresenta il valore di aspettazione del numero di persone all'interno del sistema.
Per stimarlo è stata utilizzata la media aritmetica sfruttando le sue proprietà:

1. di avere una funzione di distribuzione gaussiana anche se le variabili – purché numerose – non ce l'hanno, dimostrato dal <u>*Teorema del Limite Centrale*</u>:

$$x_1, \dots \dots .., x_n \qquad \begin{matrix} E[x_i] = \mu \\ var[x_i] = \sigma^2 \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \begin{matrix} E[\bar{x}]=\mu \\ var[\bar{x}]=\frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 \end{matrix}$$

e

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\bar{\sigma}/\sqrt{n}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\frac{2}{n}\bar{\sigma}^2}}$$

2. di sottostare alla <u>*Legge dei grandi numeri*</u>, ovvero di convergere in probabilità al valore di aspettazione delle variabili se tutte hanno il medesimo – ciò che mi aspetto sia per il tempo perso se sia gli intertempi di arrivo sia i tempi di servizio rimangono stazionari.

$$var[\bar{x}] = \frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 \longrightarrow 0 \qquad se \quad n \longrightarrow \infty$$

Cioè
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Così, osservando la distribuzione in un istogramma dei tempi persi dai clienti nel sistema, avendo un numero sufficiente di dati per poter applicare il teorema del limite centrale, se ne può calcolare la media stimando $E[\bar{t}_{perso}] = \tau^*$ e, di conseguenza, anche la varianza.

Ipotizzando che il t_{perso} da ogni cliente sia una variabile aleatoria con funzione di distribuzione esponenziale, il fatto che la media sia il miglior stimatore del valore di aspettazione di può verificare anche con il metodo del *Likelihood*.
Infatti se:

$$f\left(t_{perso,i}\right) = \frac{1}{\tau^*} e^{-\frac{t_{perso,i}}{\tau^*}}$$

Allora

$$L(\tau^*) = \prod_{i=1}^{n} f\left(t_{perso,i}\,,\tau^*\right)$$

Dove tale funzione di Likelihood, una volta inseriti i dati del campione, rappresenta la funzione del parametro da stimare condizionata dai valori del campione.

$$L(\tau^*) = \frac{1}{\tau^{*n}} e^{-\sum \frac{t_{perso,i}}{\tau^*}}$$

$$\ln(L(\tau^*)) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{\tau^{*n}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{perso,i}}{\tau^*}$$

$$\frac{d \ln(L(\tau^*))}{d\tau^*} = -\frac{n}{\tau^*} + \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{perso,i}}{\tau^{*2}}$$

$$\frac{d^2 \ln(L(\tau^*))}{d\tau^{*2}} = \frac{n}{\tau^{*2}} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{t_{perso,i}}{\tau^{*3}}$$

$$E\left[-\frac{d^2 \ln(L(\tau^*))}{d\tau^{*2}}\right] = -\frac{n}{\tau^{*2}} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[t_{perso,i}\right]}{\tau^{*3}} = -\frac{n}{\tau^{*2}} + \frac{2}{\tau^{*3}}\sum_{i=1}^{n} \tau^* = -\frac{n}{\tau^{*2}} + \frac{2\cdot n \cdot \tau^*}{\tau^{*3}} = \frac{n}{\tau^{*2}} = \frac{1}{\sigma_{min}^2}$$

Se quindi introduco una variabile

$$\bar{t}_{perso} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{perso,i}$$

Si ha che:

$$E\left[\bar{t}_{perso}\right] = \tau^* \quad \text{e}\; var\left[\bar{t}_{perso}\right] = \frac{\tau^{*2}}{n}$$

Per le proprietà della media.

Perciò si può osservare che la varianza della media corrisponde alla varianza minima. Ciò significa che non si può trovare uno stimatore migliore per il valore di aspettazione del tempo perso.[4]

A questo punto se si rappresentano i dati sperimentali e la funzione esponenziale con il valore di aspettazione stimato si dovrebbe avere una certa corrispondenza se l'ipotesi fosse corretta.

Per sviluppare ***il test d'ipotesi*** è stato impostato un *test parametrico a due code* perché si considera che la statistica introdotta, essendo la media, tende ad avere una distribuzione normale $N\left(\tau^*, \frac{\tau^{*2}}{n}\right)$. Per cui definendo un'ulteriore variabile come segue:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{perso,i} - \tau^*}{\frac{\tau^*}{\sqrt{n}}}$$

Questa dovrebbe avere una funzione normale standard $N(0,1)$. Perciò si può confrontare il valore di z con quello della gaussiana (normale standard) oltre il quale si ha il 2.5% (perché è simmetrica) di probabilità che corrisponde a 1.96. se, quindi, $z < 1.96$ l'ipotesi è accettabile, altrimenti deve essere rigettata.

[4] Ipotizzando, sempre, che esso sia una variabile aleatoria con funzione di distribuzione esponenziale.

Nel caso in cui, invece, i tempi di servizio fossero descritti da una funzione di distribuzione gaussiana centrata in τ_S e con deviazione standard pari a τ_S, è stato fatto, per il tempo perso nel sistema lo stesso test d'ipotesi. Questo perché il processo di servizio è alimentato dal processo di arrivo dei clienti in quanto un cliente può essere servito solo se è già entrato nel sistema. Quindi si può ipotizzare che anche il tempo perso dal cliente all'interno del sistema sia legato alla legge che descrive gli intertempi di arrivo.

Definiti i modelli stocastici per i tempi di arrivo e di servizio e la disciplina di servizio utilizzata nelle simulazioni, nonché il test d'ipotesi che si vuole fare si può passare all'analisi delle stesse.

Le code

Sono state, quindi, analizzate 4 code differenti:

1. $M/M/1/\infty/\infty/FIFO$

In questo caso sia i tempi di interarrivo dei clienti, sia i tempi di servizio degli operatori sono processi stocastici descrivibili da funzioni esponenziali che sono prive di memorie. Questo implica che la transizione del sistema da uno stato a un alto non è condizionata da come si è giunti a tale stato, ma è determinata solamente dallo stato precedente.

I clienti si interfacciano, per fruire del servizio, con un solo operatore che lavora in un sistema la cui capacità può essere infinita, essi provengono da una popolazione ipoteticamente infinita e vengono serviti secondo l'ordine di ingresso.

Il programma

```
rho=lambda/mu      !fattore di utilizzazione
print*, "il fattore di utilizzazione è:"
print*, rho
print*, "questo valore corrisponde alla probabilità che un utente entrato ha di attendere"


print*, "      ","cliente n°", "        ","Ta(i)", "                    ", "ta(i)", "                  ", "ts(i)",&
& "                  ", "T_usc","                  ", "t_perso"

tempo=0.
np=0          !numero di persone nel sistema
p=0           !numero di persone in ingresso nel sistema

do i=1,k
   p=p+1
|
call random_number(r)
        t_a(i)=(-log(1-r)/lambda)*60      !moltiplico per 60 perchè il tempo e' in ore

  if (i==1) then
   tempo=0.
  else
   tempo=tempo+t_a(i-1)
  end if

if (i==1) then
np=np+1

else

pu=0
do h=1, i-1
if (T_usc(h)<=tempo) then
pu= pu+1
end if
end do

np=p-pu
```

L'analisi si sviluppa in un ciclo do loop il cui inizio rappresenta l'ingresso di un nuovo cliente.
Questo inizia dopo aver dato in input alcuni dati:

- λ, il numero medio di clienti in 1 ora;
- μ, il numero di persone servite dall'operatore in 1 ora;
- T, il tempo per il quale si vuole studiare il sistema.

Noti λ e μ viene calcolato il loro rapporto $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ che rappresenta il fattore di utilizzazione, ovvero il rapporto tra il tempo impiegato in servizio e il tempo disponibile complessivo. Questo valore corrisponde alla probabilità che ha un utente di attendere al momento del suo arrivo.

Se $\rho < 1$ allora il sistema è stazionario.

a) Innanzitutto sono stati generati dei numeri con distribuzione esponenziale per i t_{arrivo} e i $t_{servizio}$ utilizzando la funzione di distribuzione cumulativa:
   a.1. Sono stati generati dei numeri casuali r con funzione di distribuzione uniforme in $(0,1)$ che sono stati considerati come dei valori di una funzione cumulativa:
   $$r = F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}$$
   Quindi si riescono ad ottenere dei valori t con funzione di distribuzione esponenziale:
   $$t = -\frac{\ln(1-r)}{\lambda}$$
   Ciò permette di definire gli intertempi di arrivo:
   $$t_a = -\frac{\ln(1-r)}{\lambda}$$
   E i tempi di servizio:
   $$t_s = -\frac{\ln(1-q)}{\mu}$$
   Questi tempi rappresentano frazioni dell'unità, ovvero dell'ora. Dato, però, che si tratta di minuti sono stati corretti moltiplicandoli per 60.

Per questo motivo tutti i valori di tempo che vengono dati in output dal programma vanno considerati in minuti.

Conoscendo questi si ricavano anche i valori di aspettazione delle due funzioni di distribuzioni:

$$\tau_a = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \tau_s = \frac{1}{\mu}$$

Anche questi sono tempi in ore portati a minuti per l'analisi degli istogrammi e per il test d'ipotesi.

b) È stato introdotto un contatore che misurasse il tempo di analisi del sistema a partire dall'ingresso del primo cliente avvenuto a tempo 0.
$$T_{a_i} = \sum_{j=0}^{i} t_{a,j}$$
c) Sono stati introdotti due contatori, uno delle persone in ingresso che aumenta di un'unità all'inizio di ogni ciclo e uno delle persone in uscita dal sistema che aumenta ogni qualvolta $T_{usc\_(i-1)} < T_{a_i}$
d) È stato calcolato il tempo di uscita dal sistema del generico cliente come:
$$T_{usc\_i} = max\left(T_{a_i} + t_{s,i} \,;\, T_{usc\_(i-1)} + t_{s,i}\right)$$
e) È stato misurato il tempo perso nel sistema dal generico cliente:
$$T_{perso\_i} = \left|T_{a_i} - T_{usc\_i}\right|$$

Tutto questo permette uno studio del sistema e della sua efficienze e il completamento del test d'ipotesi.

Sono state, però, richieste al programma delle operazioni ulteriori al fine di ottenere i valori medi definiti precedentemente.

ANALISI DATI

CODA INFINITA

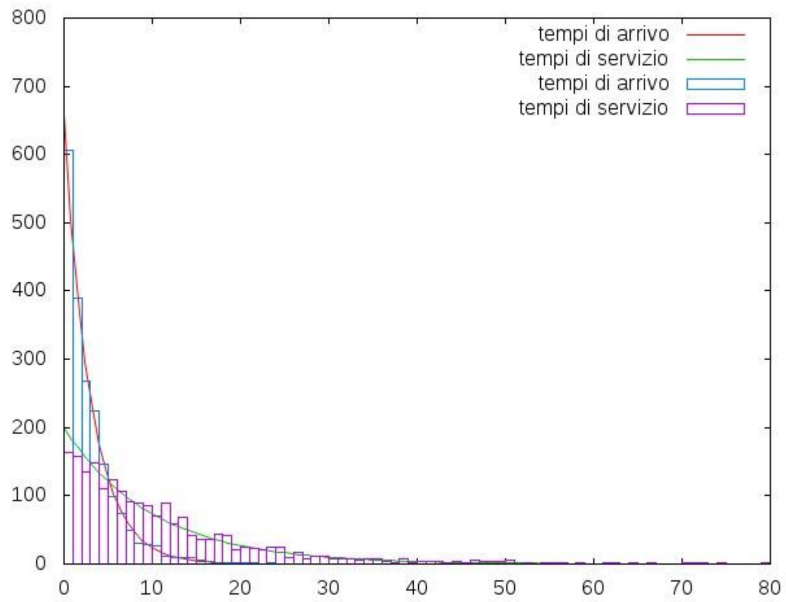
La prima verifica è stata fatta in merito al controllo del fattore di utilizzazione del sistema, ovvero del rapporto tra il numero di clienti in ingresso e il numero di clienti serviti dall'operatore per unità di tempo, controllando che quando il secondo è inferiore al primo la coda non viene mai smaltita e i tempi di attesa – e, quindi, quelli persi nel sistema – tendono all'infinito.

- $\lambda = 20$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\mu = 6$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 3.3 > 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 1000$ *ore di studio del sistema*

- $\lambda T = 6000$ *clienti in ingresso nel periodo di studio*

Al fine di studiare il problema nelle condizioni determinate dai valori dei parametri dati in input è stato deciso di far entrare nell'intero periodo di studio il numero atteso dato λ.
Inoltre sia in questo caso, sia nelle simulazioni successive, il periodo di studio è molto ampio, relativo a diverse ore che potrebbero rappresentare l'analisi del sistema fatta in più giorni dato che banche e uffici non sono aperte per 24 ore al giorno 7 giorni si 7.
Ho fatto questa scelta al fine di poter studiare in modo statistico i dati e di poter effettuare il test d'ipotesi e la stima dei parametri in merito al tempo perso nel sistema. Studiando il sistema per 40/50 ore non si ottenevano, infatti, dei grafici con sufficiente statistica.

Per prima cosa è stato verificato l'andamento dei tempi di arrivo e di servizio per controllare se rispettassero l'andamento esponenziale impostato:



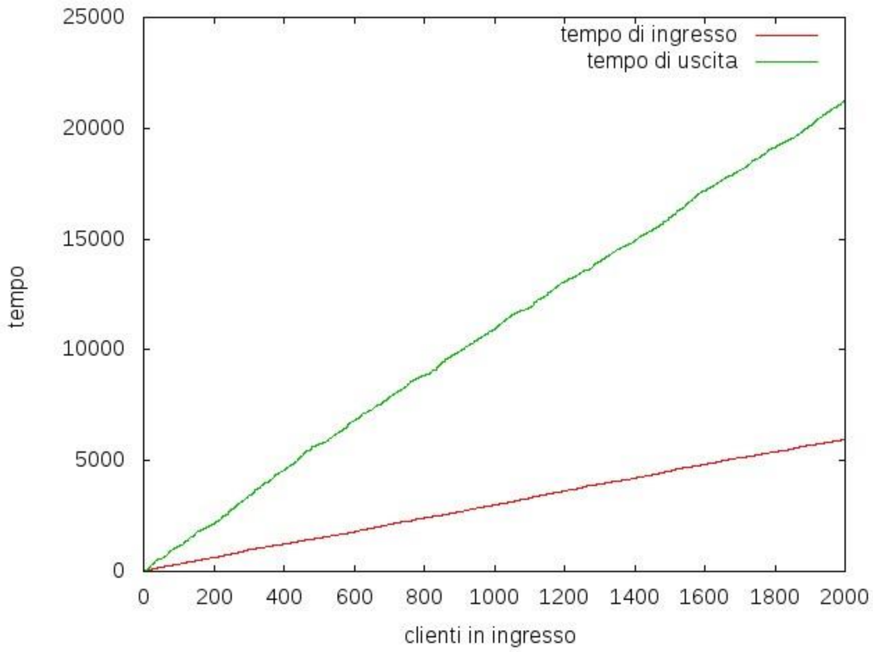
Come si può osservare il fit di entrambi combacia con la propria funzione di distribuzione.

Una volta controllato ciò è interessante capire cosa accade alla coda in questo caso e quanto tempo perdono le persone all'interno del sistema, infatti il programma mostra il seguente andamento:

```
il fattore di utilizzazione è:
  3.33333325
questo valore corrisponde alla probabilità che un utente entrato ha di attendere
      cliente n°        Ta(i)                     ta(i)                   ts(i)                     T_usc                     t_perso

         1          0.00000000               18.0467148              8.36612701                8.36612701                8.36612701
nel sistema ci sono            1 persone

         2          18.0467148               10.1367226              13.7803926                31.8271065                13.7803917
nel sistema ci sono            1 persone

         3          28.1834373               1.37370765              6.55152035                38.3786278                10.1951904
nel sistema ci sono            2 persone

         4          29.5571442               0.229847074             5.36956973E-02            38.4323235                8.87517929
nel sistema ci sono            3 persone

         5          29.7869911               1.27890778              4.18920898                42.6215324                12.8345413
nel sistema ci sono            4 persone

         6          31.0658989               0.737516403             1.42901266                44.0505447                12.9846458
nel sistema ci sono            5 persone

         7          31.8034153               6.92353153              4.89008570                48.9406319                17.1372166
nel sistema ci sono            6 persone

         8          38.7269478               1.76896942              10.8450871                59.7857208                21.0587730
nel sistema ci sono            4 persone

         9          40.4959183               4.87182699E-02          10.5226746                70.3083954                29.8124771
nel sistema ci sono            5 persone

        10          40.5446358               3.11884165              3.90065217                74.2090454                33.6644096
nel sistema ci sono            6 persone

        11          43.6634789               5.80742407              5.12972784                79.3387756                35.6752968
nel sistema ci sono            6 persone

        12          49.4709015               0.695320725             34.5901985                113.928970                64.4580688
nel sistema ci sono            5 persone

        13          50.1662216               2.73689246              11.1773615                125.106331                74.9401093
nel sistema ci sono            6 persone
```

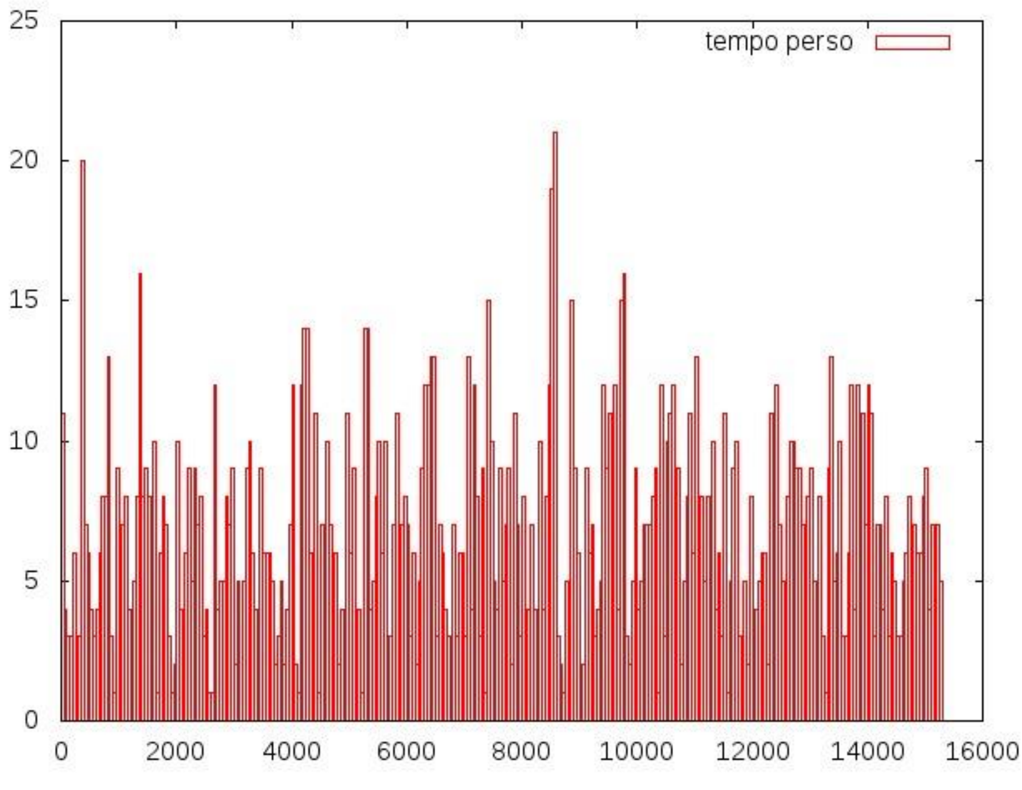
```
nel sistema ci sono         1466 persone

      1993          5936.42871               8.37016582              34.3254623                21186.2969                15249.8682
nel sistema ci sono         1467 persone

      1994          5944.79883               4.24105072              14.9766045                21201.2734                15256.4746
nel sistema ci sono         1467 persone

      1995          5949.04004               4.21276379              7.10574090E-02            21201.3438                15252.3037
nel sistema ci sono         1468 persone

      1996          5953.25293               5.94736862              1.35668683                21202.7012                15249.4482
nel sistema ci sono         1469 persone

      1997          5959.20020               0.826850832             2.11894989                21204.8203                15245.6201
nel sistema ci sono         1469 persone

      1998          5960.02686               0.291239619             5.88303423                21210.7031                15250.6758
nel sistema ci sono         1470 persone

      1999          5960.31787               0.488970518             9.79563904                21220.4980                15260.1797
nel sistema ci sono         1471 persone

      2000          5960.80664               5.55988407              1.51774228                21222.0156                15261.2090
nel sistema ci sono         1472 persone
```

Si può notare che il numero delle persone nel sistema continua ad aumentare, ciò significa che la coda sta diventando infinita e che il sistema non riuscirà mai ad esaurire i clienti.
Ciò è conforme al fattore di utilizzazione, infatti in questa simulazione l’operatore serve meno persone di quelle che arrivano nell’unità di tempo.



Il grafico soprastante conferma il fatto che la coda stia diventando infinita in quanto la distanza tra la curva rappresentante i tempi di ingresso e quella relativa ai tempi di uscita, al trascorrere del tempo, continua ad aumentare. Ciò significa che al passare delle ore il tempo trascorso dal cliente nel sistema va aumentando.

Il valore di aspettazione del tempo perso all'interno del sistema è, infatti: $\boldsymbol{\tau^* = 7812\ minuti \sim 130h \sim 5\ giorni}$



In questo caso è evidente che il tempo perso non è descrivibile da una funzione di distribuzione nota per cui non è significativo effettuare il test di ipotesi dato che il sistema non è funzionante.

CODA FINITA 1

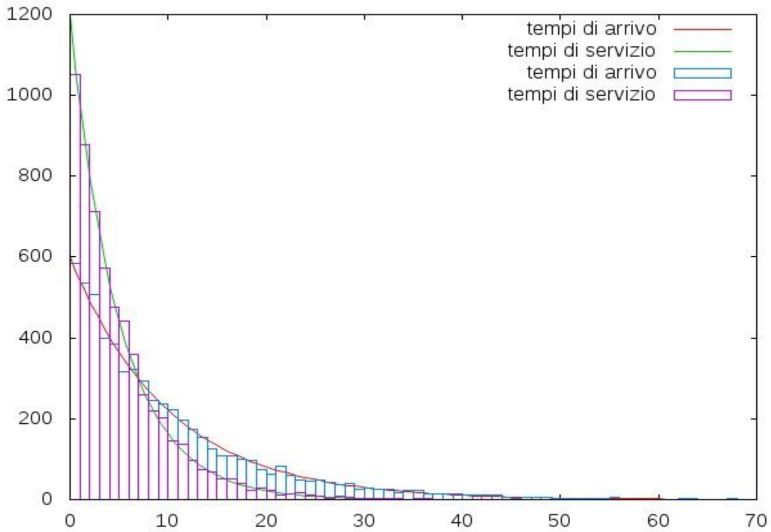
- $\lambda = 6$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\mu = 12$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 0.5 < 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 1000$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 6000$ *clienti in ingresso*

In questo caso, dato il parametro ρ, ci aspettiamo la coda sia finita.

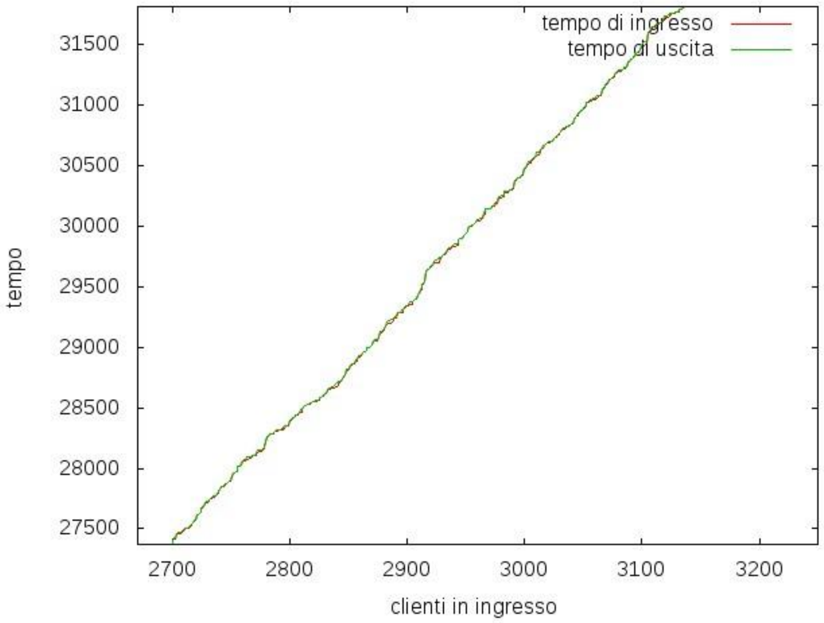
Infatti il programma fornisce i segunti valori:

- PERSONE IN MEDIA NEL SISTEMA: 1
- PERSONE IN MEDIA IN CODA: 0
- TEMPO MEDIO PERSO IN CODA: 5 min
- TEMPO MEDIO DI SERVIZIO ($\tau_s = \frac{60}{\mu}$): 5 min
- TEMPO MEDIO PERSO NEL SISTEMA: 10 min
- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso}: $\boldsymbol{E[t_{perso}] = \tau^* = 10\ min}$

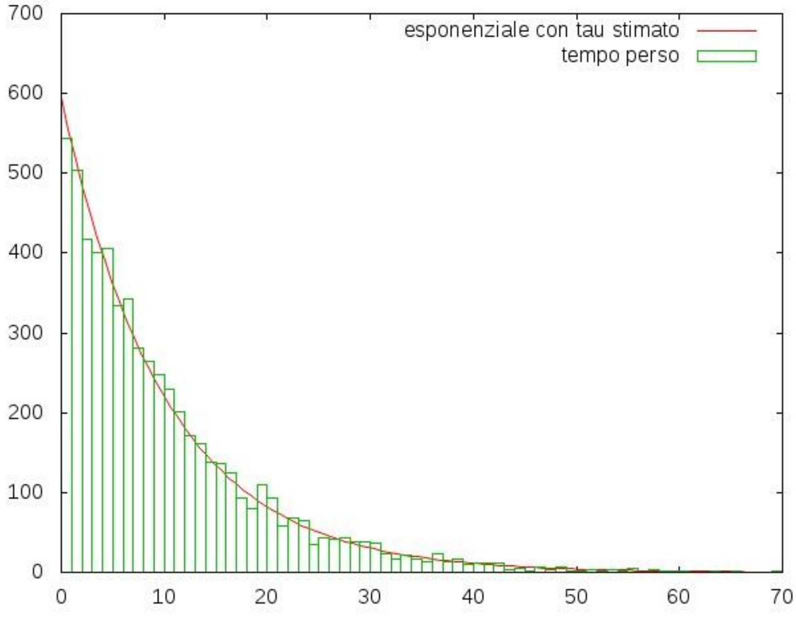
Anche in questo caso è stato controllato che i tempi di arrivo e di servizio seguissero le funzioni di distribuzioni con i parametri impostati.



Prima di studiare il tempo perso nel sistema e di effettuare il test d'ipotesi è stato verificato che la coda fosse finita:



Si nota immediatamente la differenza rispetto al grafico precedente, infatti le due curve rimangono sempre quasi sovrapposte. Ciò significa che al passare delle ore il sistema rimane efficiente (conferma l'impostazione di un sistema i cui parametri non variano nel tempo) e il tempo medio perso nel sistema può essere stimato e studiato.



Questo fit è stato fatto con la funzione esponenziale nel quale il parametro τ è il τ^* stimato dal programma. Dall'analisi del grafico soprastante si può dedurre la conferma dell'ipotesi fatta.
Conferma ulteriore viene dalla statistica impostata. Infatti il valore di tale statistica è risultato pari a: $0.87 < 1.96$. Questo valore rientra nella curva gaussiana attribuendo un'attendibilità ai nostri calcoli del 5%.

CODA FINITA 2

Proviamo a modificare i parametri della coda, aumentando il numero di clienti in ingresso nell'unità di tempo.

- $\lambda = 9$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\mu = 12$ *clienti in ingresso in 1 ora*

- $\rho = 0.75 < 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 1000$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 9000$ *clienti in ingresso*

Anche in questo caso ci aspettiamo la coda sia finita.

Il programma mostra in output:

```
nel sistema ci sono            3 persone

      8886        59319.4609          3.75381732          16.1436882          59341.5781          22.1171875
nel sistema ci sono            4 persone

      8887        59323.2148          11.1641102          2.28305769          59343.8594          20.6445312
nel sistema ci sono            5 persone

      8888        59334.3789          1.69935203          4.52109098          59348.3789          14.0000000
nel sistema ci sono            3 persone

      8889        59336.0781         0.999581933          4.13041973          59352.5078          16.4296875
nel sistema ci sono            4 persone

      8890        59337.0781          6.58371925          1.43334222          59353.9414          16.8632812
nel sistema ci sono            5 persone

      8891        59343.6602          2.14429832         0.318353385          59354.2578          10.5976562
nel sistema ci sono            5 persone

      8892        59345.8047          3.26927757          2.01285529          59356.2695          10.4648438
nel sistema ci sono            5 persone

      8893        59349.0742          19.4314251          4.51103401          59360.7812          11.7070312
nel sistema ci sono            5 persone

      8894        59368.5039          14.1744757          1.83282077          59370.3359          1.83203125
nel sistema ci sono            1 persone

      8895        59382.6797          7.38222599          7.73615503          59390.4141          7.73437500
nel sistema ci sono            1 persone

      8896        59390.0625          2.15847468          3.94724607          59394.3594          4.29687500
nel sistema ci sono            2 persone

      8897        59392.2227          4.64558601          2.17513815E-02      59394.3828          2.16015625
nel sistema ci sono            2 persone

      8898        59396.8672          3.25851154          11.2317801          59408.0977          11.2304688
nel sistema ci sono            1 persone

      8899        59400.1250          2.67362213          6.00561857          59414.1016          13.9765625
nel sistema ci sono            2 persone
```

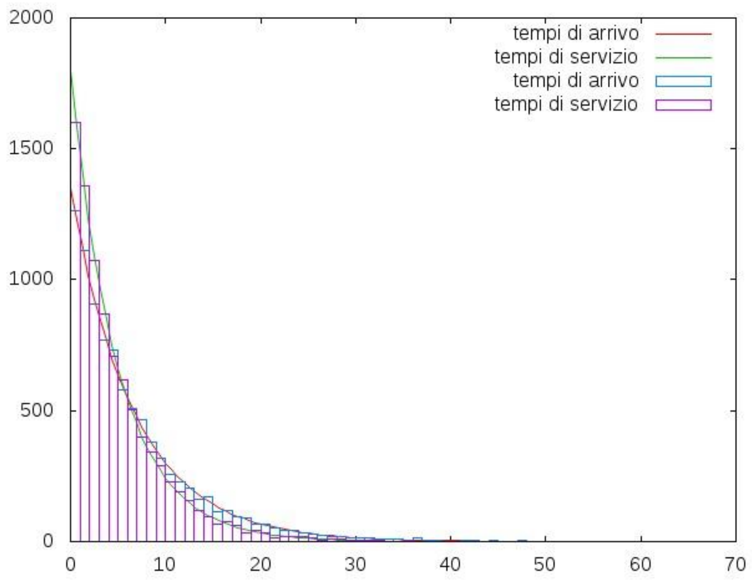
E fornisce i segunti valori:

```
ludovica@ludovica-hp:~/Scrivania/coda_MM1$ ./MM1.x
 numero medio di arrivi in 1 ora
9
 numero medio di clienti serviti in 1 ora
12
 tempo di studio del sistema
1000
 allora il numero medio di clienti in arrivo in tutto il periodo di studio e'
   9000.00000
 vuoi far entrare il numero medio di clienti?
si
 il fattore di utilizzazione è:
  0.750000000
 questo valore corrisponde alla probabilità che un utente entrato ha di attendere
       cliente n°         Ta(i)                     ta(i)                  ts(i)


 numero medio di clienti nel sistema
   3.00000000

 numero medio di clienti in coda
   2.00000000

 tempo medio di attesa in coda
   15.0000000

 tempo medio di servizio
   5.00000000

 tempo medio in attesa nel sistema
   20.0000000
```

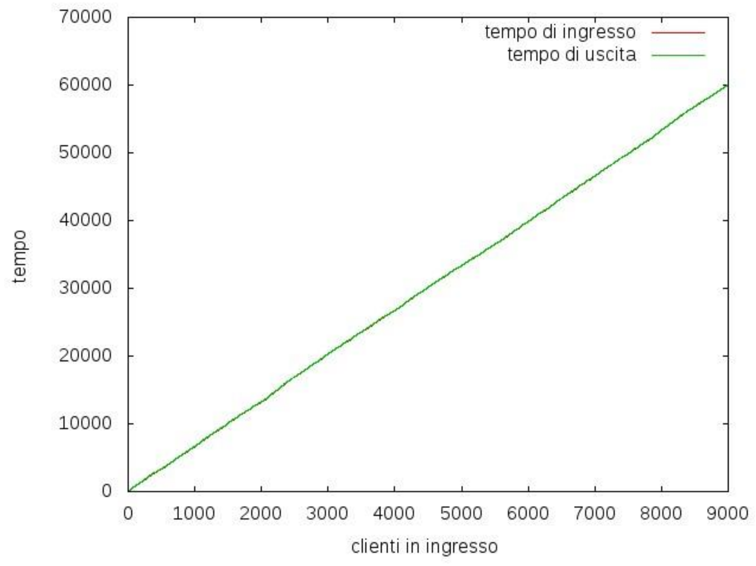
- PERSONE IN MEDIA NEL SISTEMA: 3
- PERSONE IN MEDIA IN CODA: 2

- TEMPO MEDIO PERSO IN CODA: 15 min
- TEMPO MEDIO DI SERVIZIO ($\tau_s = \frac{60}{\mu}$): 5 min
- TEMPO MEDIO PERSO NEL SISTEMA: 20 min
- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso}: $\boldsymbol{E[t_{perso}] = \tau^* = 20\ min}$

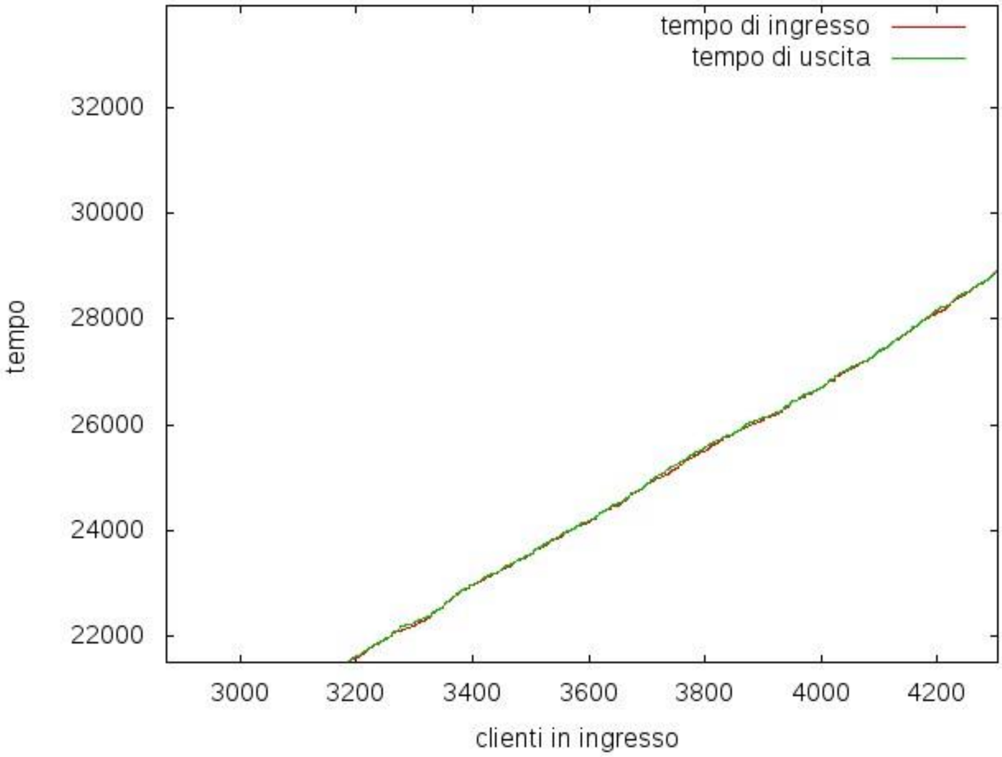
Anche in questo caso è stato controllato che i tempi di arrivo e di servizio seguissero le funzioni di distribuzioni con i parametri impostati.



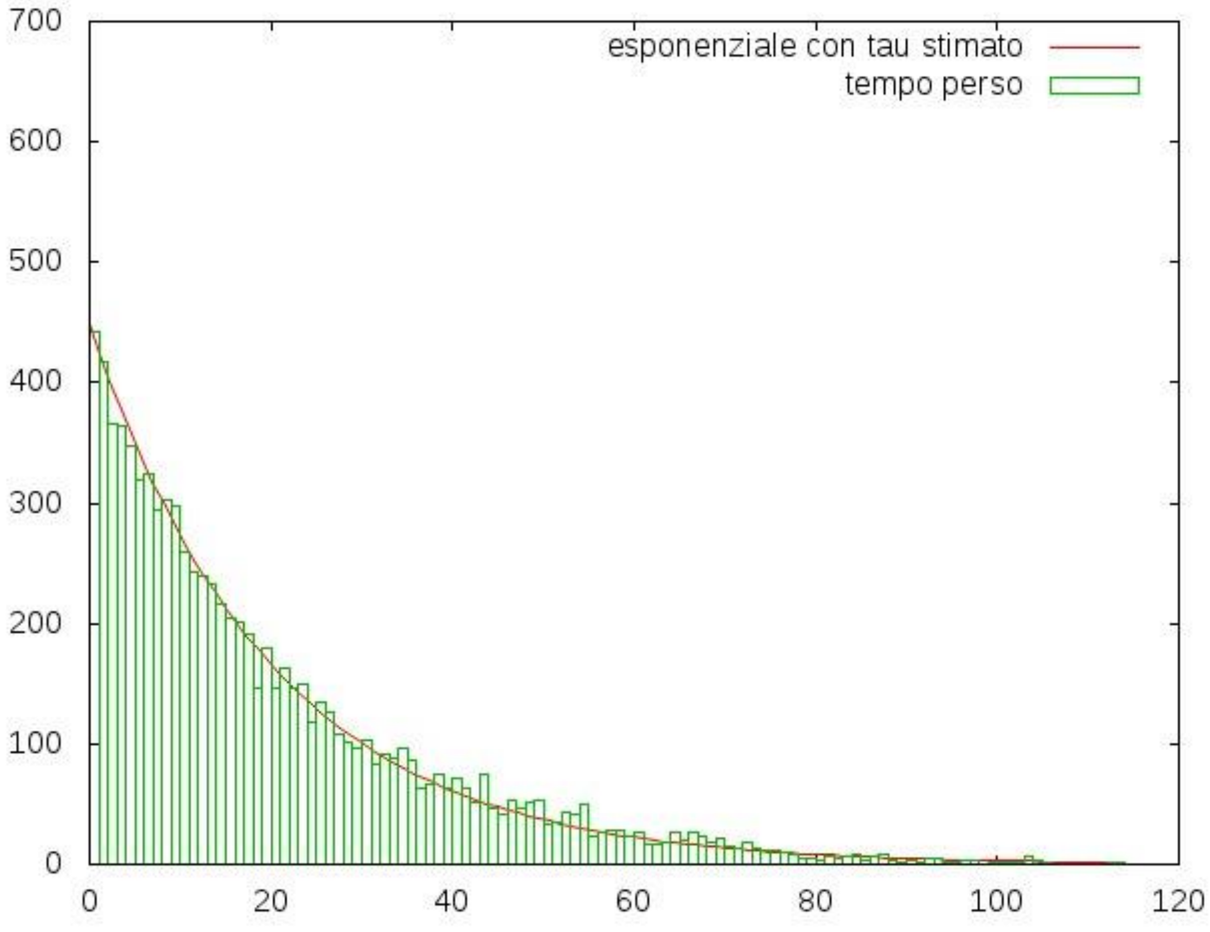
Prima di studiare il tempo perso nel sistema e di effettuare il test d'ipotesi è stato controllato se effettivamente la coda fosse finita:



Ingrandendo il grafico si può osservare meglio la sovrapposizione delle due curve.



Si nota che, anche in questo caso, le due curve rimangono sempre quasi sovrapposte. Ciò significa che al passare delle ore il sistema rimane efficiente (conferma l'impostazione di un sistema i cui parametri non variano nel tempo) e il tempo medio perso nel sistema può essere stimato e studiato.



Questo fit è stato fatto con la funzione esponenziale nel quale il parametro τ è il τ^* stimato dal programma. Dall'analisi del grafico soprastante si può dedurre la conferma dell'ipotesi fatta.
Conferma ulteriore viene dalla statistica impostata. Infatti il valore di tale statistica è risultato pari a: $1.04 < 1.96$. Questo valore rientra nella curva gaussiana attribuendo un'attendibilità ai nostri calcoli del 5%.

2. *M/G/1//∞//∞/FIFO*

Il programma

Il programma è stato implementato come quello precedente tranne per quanto riguarda i tempi di servizio che dovevano avere una distribuzione gaussiana.

Sono stati generati dei numeri con distribuzione gaussiana per i $t_{servizio}$ usando, come per quella esponenziale, la funzione di distribuzione cumulativa e sfruttando le proprietà della media di avere una distribuzione gaussiana per un numero sufficiente di valori anche se essi non ce l'hanno.

- Sono stati generati 40 numeri r_i con distribuzione uniforme in $(0,1)$ con, quindi:
$$E[r_i] = 0.5$$
$$var[r_i] = \frac{1}{12}$$
- Ne è stata calcolata la media che, quindi, presenta una distribuzione normale del tipo:
$$\bar{r} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} r_i$$
$$N\left(0.5, \frac{1}{12 * 40}\right)$$
- Sono state introdotte le variabili casuali $y = (\bar{r} - 0.5) \cdot \sqrt{12 * 40}$ che avranno, quindi, distribuzione normale standard $N(0,1)$;
- Per ottenere delle variabili corrispondenti ai $t_{servizio}$ con una distribuzione $N(\tau_s, {\tau_s}^2)$ si è definito come segue:
$$t_{servizio} = \tau_s(y+1)$$
Allora $$E[t_{servizio}] = \tau_s$$
E per la propagazione della varianza: $$var(t_{servizio}) = {\tau_s}^2 \cdot \sigma_y^2 = {\tau_s}^2$$

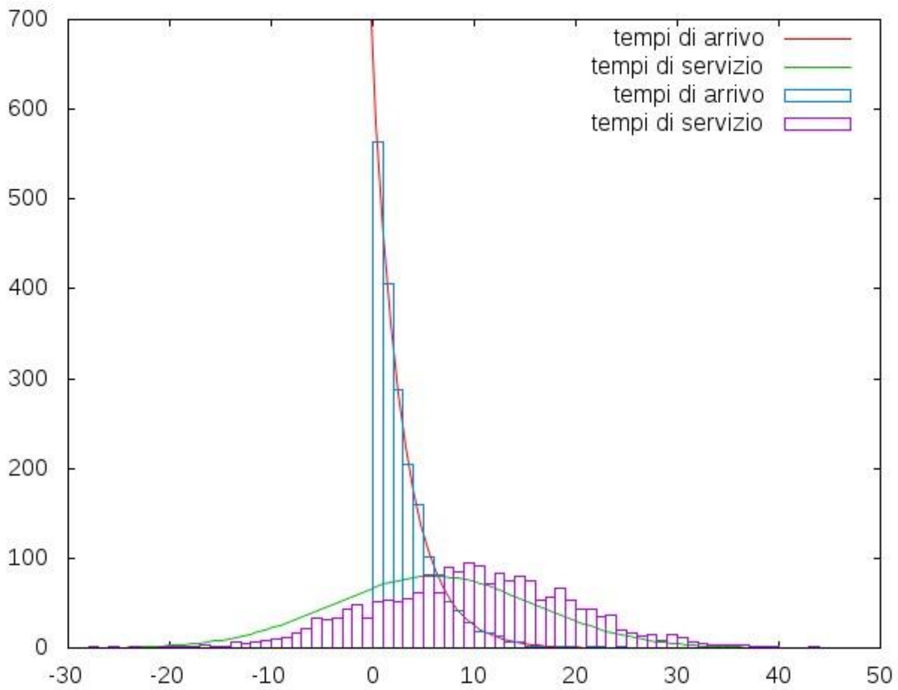
ANALISI DATI

CODA INFINITA

Anche in questo caso la prima verifica è stata fatta in merito al controllo del fattore di utilizzazione del sistema. I parametri sono stati impostati come per la coda MM1.

- $\lambda = 20$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\mu = 6$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 3.3 > 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 1000$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 6000$ *clienti in ingresso nel periodo di studio*

Per prima cosa è stato verificato l'andamento dei tempi di arrivo e di servizio:

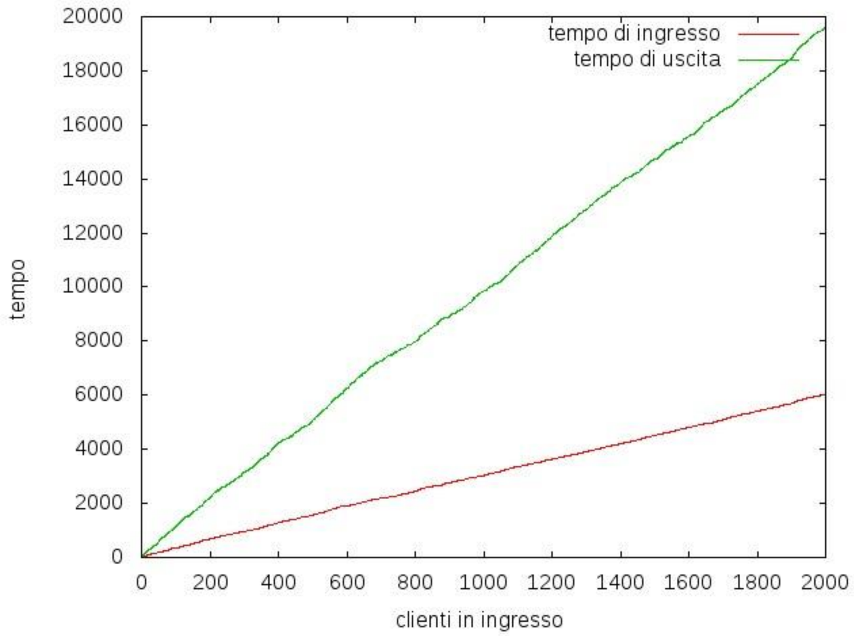


Come si può osservare il fit di entrambi combacia perfettamente con la propria funzione di distribuzione.

Una volta verificato ciò è interessante capire cosa accade alla coda in questo caso e quanto tempo perdono le persone all'interno del sistema, infatti il programma mostra il seguente andamento:

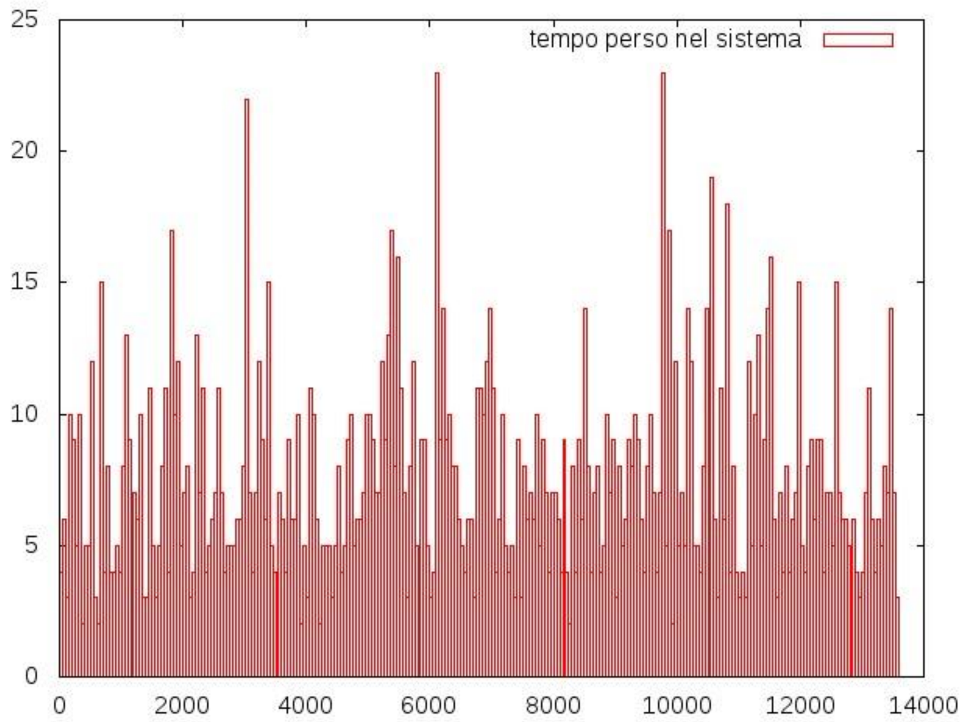
```
nel sistema ci sono        1414 persone

      1994        6009.79346            1.13341582            19.5018940            19543.8535            13534.0605
nel sistema ci sono        1415 persone

      1995        6010.92676            5.37063694            11.7629547            19555.6172            13544.6904
nel sistema ci sono        1416 persone

      1996        6016.29736            2.58437943            11.1479673            19566.7656            13550.4688
nel sistema ci sono        1417 persone

      1997        6018.88184            1.76796663            1.53032076            19568.2969            13549.4150
nel sistema ci sono        1417 persone

      1998        6020.64990            1.35240436            15.9007034            19584.1973            13563.5469
nel sistema ci sono        1418 persone

      1999        6022.00244            11.3081970            -2.18720436           19582.0098            13560.0078
nel sistema ci sono        1419 persone

      2000        6033.31055            1.81329429            -13.2945185           19568.7148            13535.4043
nel sistema ci sono        1418 persone


numero medio di clienti nel sistema
 -1.00000000

numero medio di clienti in coda
 -4.00000000

tempo medio di attesa in coda
 -14.2857141

tempo medio di servizio
  10.0000000

tempo medio in attesa nel sistema
 -4.28571463

test di ipotesi

stima di tau_perso
  6867.32568
```

Si può notare che il numero delle persone nel sistema continua ad aumentare, questo significa che la coda sta diventando infinita e che il sistema non riuscirà mai ad esaurire i clienti.
Ciò è conforme al fattore di utilizzazione, infatti in questa simulazione l'operatore serve meno persone di quelle che arrivano nell'unità di tempo.



Il grafico soprastante conferma il fatto che la coda stia diventando infinita in quanto la distanza tra la curva rappresentante i tempi di ingresso e quella relativa ai tempi di uscita, al trascorrere del tempo, continua ad aumentare. Ciò significa che al passare delle ore il tempo trascorso dal cliente nel sistema va aumentando.

Il valore di aspettazione del tempo perso all'interno del sistema è, infatti: $\boldsymbol{\tau^* = 6867\ minuti \sim 114h\ 27' \sim 4 giorni\ e\ 18h}$



Anche questo caso è evidente che il tempo perso non è descrivibile da una funzione di distribuzione nota per cui non è significativo effettuare il test di ipotesi dato che il sistema non è funzionante. Il grafico si presenta simile a quello ottenuto nel caso MM1.
Possiamo, quindi, dedurre che quando il sistema risulta inefficiente e tale da formare una coda infinita il tempo perso dal cliente non è correlato alla funzione di distribuzione dei tempi di arrivo o di servizio, bensì tende a crescere all'aumentare del tempo di studio del sistema.

CODA FINITA

- $\lambda = 9$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\mu = 12$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 0.75 < 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 1000$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 9000$ *clienti in ingresso*

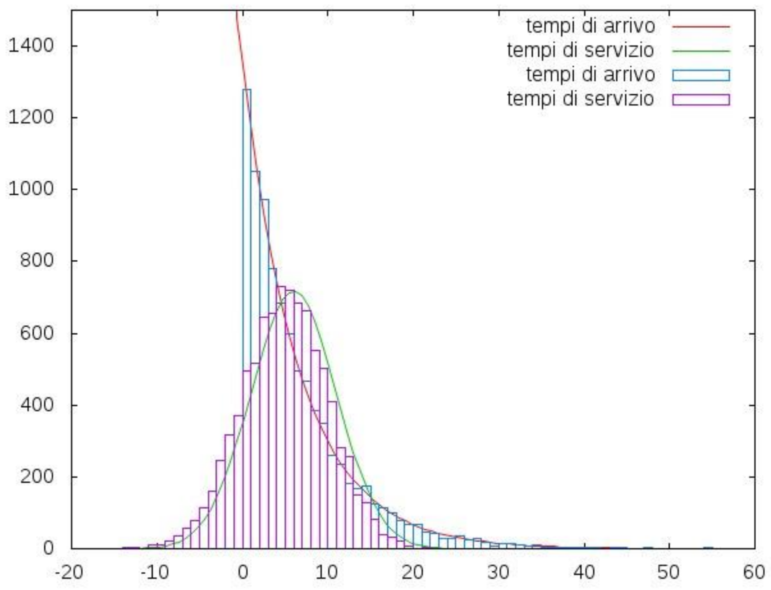
In questo caso, dato il parametro ρ, ci aspettiamo la coda sia finita.

Infatti il programma fornisce i segunti valori:

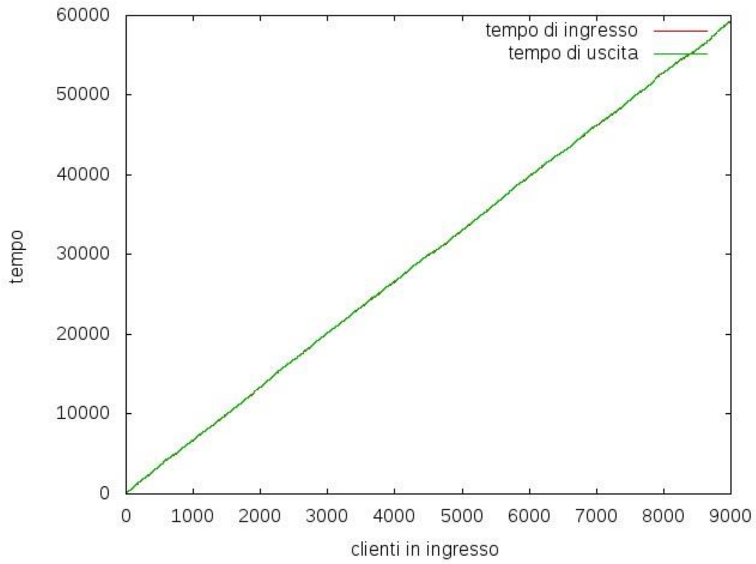
```
nel sistema ci sono           3 persone

       8994       59256.5039         3.18670702          3.90937138          59260.4141          3.91015625
nel sistema ci sono           1 persone

       8995       59259.6914        0.997924030          3.02991867          59263.4453          3.75390625
nel sistema ci sono           2 persone

       8996       59260.6875        0.834410071         0.917702615          59264.3633          3.67578125
nel sistema ci sono           2 persone

       8997       59261.5234         4.35136604          8.87338734          59273.2383          11.7148438
nel sistema ci sono           3 persone

       8998       59265.8750         9.73330975          4.89895821          59278.1367          12.2617188
nel sistema ci sono           2 persone

       8999       59275.6094        0.717316151          4.46666193          59282.6016          6.99218750
nel sistema ci sono           2 persone

       9000       59276.3281         2.00710845         0.401484668          59283.0039          6.67578125
nel sistema ci sono           3 persone


numero medio di clienti nel sistema
  3.00000000

numero medio di clienti in coda
  2.00000000

tempo medio di attesa in coda
  15.0000000

tempo medio di servizio
  5.00000000

tempo medio in attesa nel sistema
  20.0000000

test di ipotesi

stima di tau_perso
  20.1018429
```

- PERSONE IN MEDIA NEL SISTEMA: 3
- PERSONE IN MEDIA IN CODA: 2
- TEMPO MEDIO PERSO IN CODA: 15 min
- TEMPO MEDIO DI SERVIZIO ($\tau_s = \frac{60}{\mu}$): 5 min
- TEMPO MEDIO PERSO NEL SISTEMA: 20 min
- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso}: $\boldsymbol{E\left[t_{perso}\right] = \tau^* = 20'6''}$

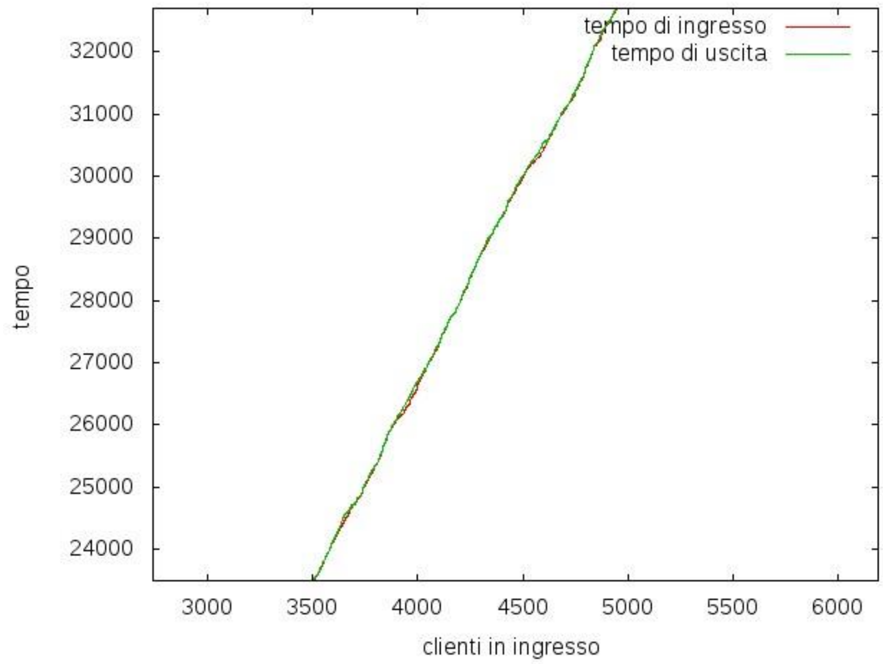
Anche in questo caso è stato controllato che i tempi di arrivo e di servizio seguissero le funzioni di distribuzioni con i parametri impostati.



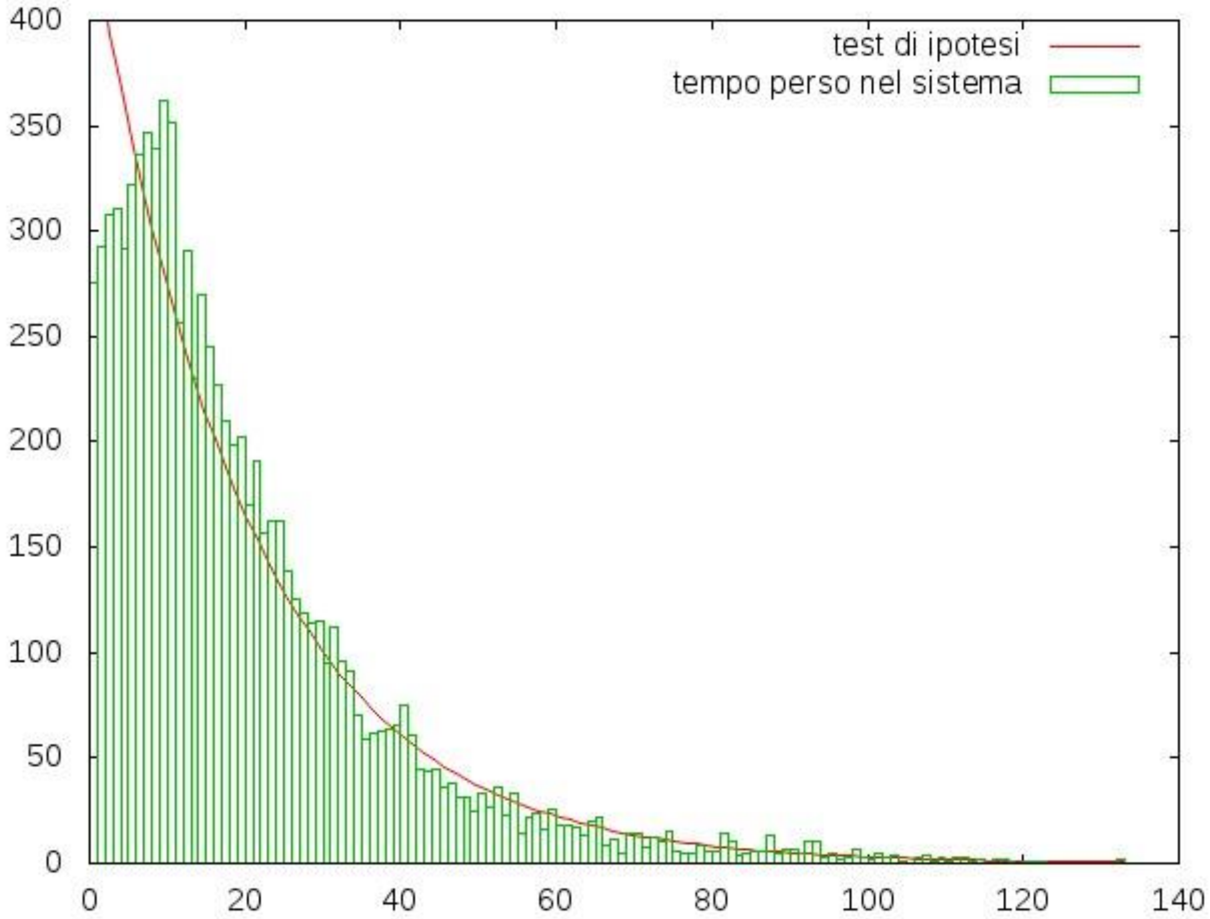
Prima di studiare il tempo perso nel sistema e di effettuare il test d’ipotesi è stato controllato se effettivamente la coda fosse finita:



Si può osservare in maniera più chiara la sovrapposizione ingrandendo il grafico soprastante:



Le due curve rimangono sempre quasi sovrapposte. Ciò significa che al passare delle ore il sistema rimane efficiente (conferma l'impostazione di un sistema i cui parametri non variano nel tempo) e il tempo medio perso nel sistema può essere stimato e studiato.



Questo fit è stato fatto con la funzione esponenziale nel quale il parametro τ è il τ^* stimato dal programma.

In questo caso si può notare la dipendenza del tempo perso nel sistema dai tempi di servizio osservando che, a differenza di quanto ottenuto nella simulazione MM1, per i valori più piccoli i dati sperimentali non seguono in modo preciso un andamento esponenziale. L'esponenziale, però, è una funzione di distribuzione decrescente i cui valori più probabili sono i più piccoli.
Nel grafico si nota come i minori tempi persi nel sistema siano sempre più conformi ad un andamento esponenziale.
La statistica fornisce un valore pari a $0.389 < 1.96$. Questo valore rientra nella curva gaussiana considerando un'attendibilità ai nostri calcoli del 5%.
Per cui si può confermare l'ipotesi anche in questo caso.

3. $M/M/S/\infty/\infty/FIFO$

Il programma

Anche con più servitori l'analisi si sviluppa in un ciclo do loop il cui inizio rappresenta l'ingresso di un nuovo cliente.
Questo inizia dopo aver dato in input alcuni dati:

- *λ, il numero medio di clienti in 1 ora;*
- *μ, il numero di persone servite da un operatore in 1 ora;*
- *s, il numero di operatori;*
- *T, il tempo per il quale si vuole studiare il sistema.*

Nel caso in cui nel sistema siano presenti più operatori il fattore di utilizzazione, poiché rappresenta anche la probabilità che un utente in ingresso ha di attendere, prende in considerazione tutti i servitori venendo, quindi, definito come $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$. anche in questo caso il sistema viene detto stazionario e non si ha formazione di code infinite se $\rho < 1$.

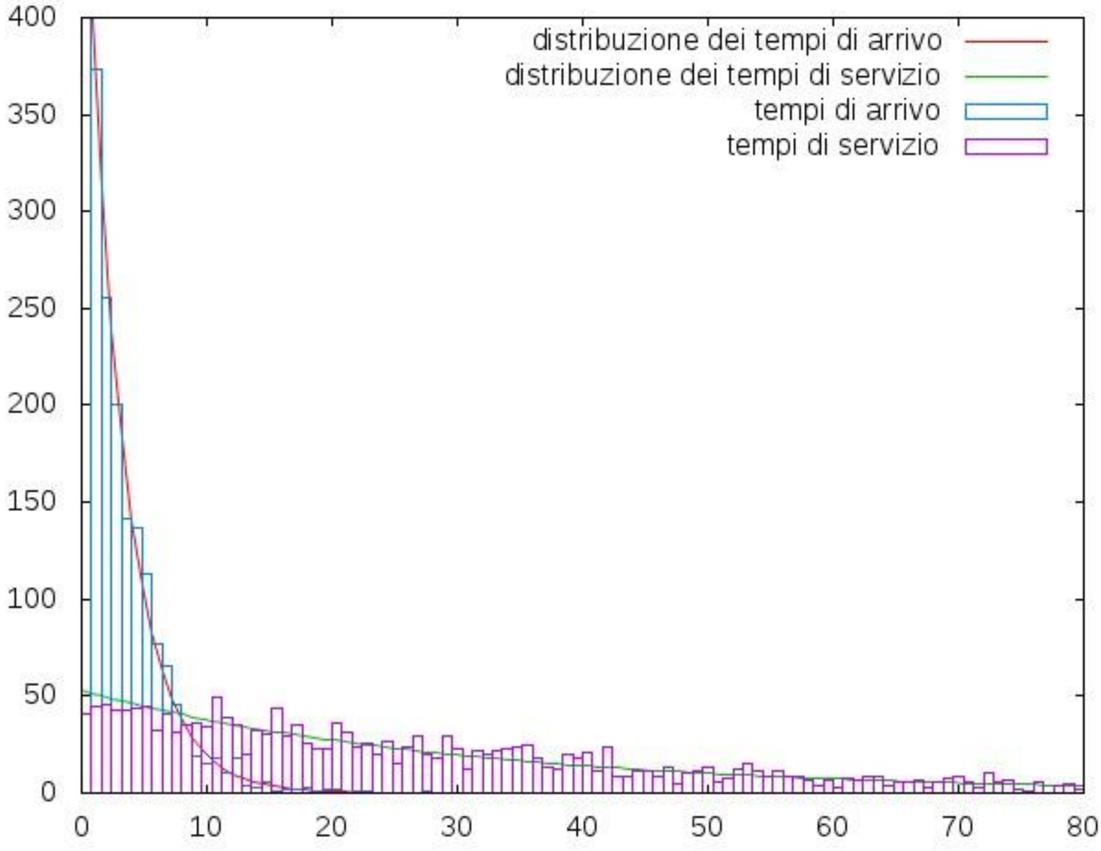
a) Sono stati generati – come fatto precedentemente - dei numeri con distribuzione esponenziale per i t_{arrivo} utilizzando la funzione di distribuzione cumulativa;
b) Sono stati generati – come fatto precedentemente - dei numeri con distribuzione esponenziale per i $t_{servizio}$ utilizzando la funzione di distribuzione cumulativa, ma in questo caso il parametro della funzione di distribuzione varia a seconda che tutti gli operatori siano occupati o meno.
   Nel primo caso, infatti, il numero medio di clienti soddisfatti nell'unità di tempo dal sistema sarà $\mu_{eff} = s \cdot \mu$ perché tutti i servitori sono occupati; nel secondo caso, invece, il sistema si trova in una situazione di assenza di coda, di conseguenza $\mu_{eff} = np \cdot \mu$, dove np indica il numero di persone presenti nel sistema, infatti il numero di persone servite dipenderà dal numero di persone alle casse dato che esse sono in numero maggiore dei clienti.
c) Anche in questo caso sono stati introdotti dei contatori delle persone in ingresso e delle persone in uscita rendendo possibile calcolare il numero di persone presenti nel sistema.
d) Infine il test d'ipotesi è stato implementato come nei casi precedenti in cui il servitore era solo uno. Infatti i tempi di servizio dei singoli operatori seguono comunque una legge esponenziale e l'intero sistema è alimentato dagli arrivi dei clienti. Per tale ragione ci si può ragionevolmente aspettare che il tempo perso rimanga descrivibile da un'esponenziale.

ANALISI DATI

CODA INFINITA

- $\lambda = 20$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $s = 2$ *numero di operatori nel sistema*
- $\mu = 1$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 10 > 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 100$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 2000$ *clienti in ingresso nel periodo di studio*

Per prima cosa è stato verificato l'andamento dei tempi di arrivo e di servizio per controllare se rispettano l'andamento esponenziale impostato:

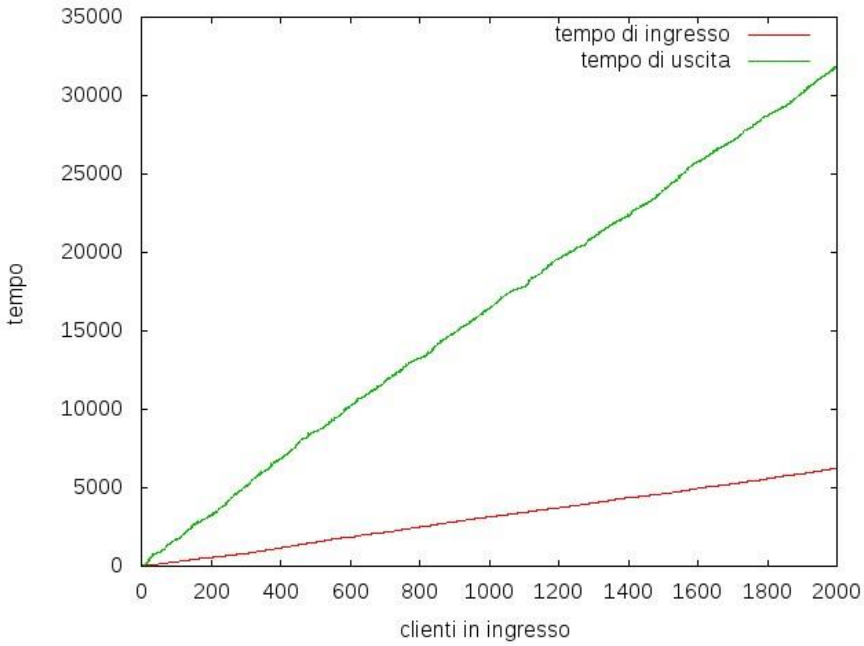


Come si può osservare il fit di entrambi combacia perfettamente con la propria funzione di distribuzione. Anche se il parametro relativo ai tempi di servizio è molto basso e non permette l'identificazione di un netto andamento esponenziale.

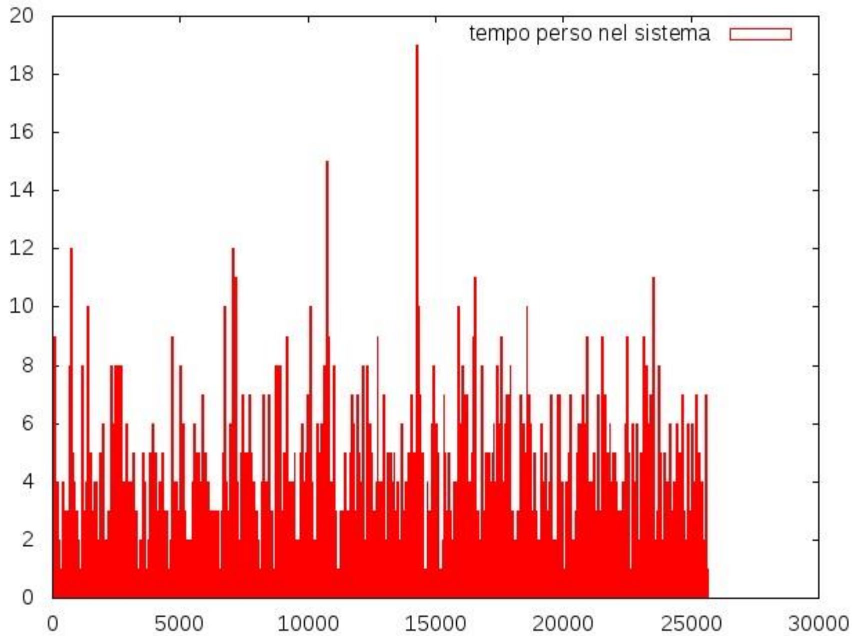
Una volta verificato ciò è interessante capire cosa accade alla coda in questo caso e quanto tempo perdono le persone all'interno del sistema:

- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso}: $\boldsymbol{E[t_{perso}] = \tau^* = 13150\, min = 219\, ore \sim 9\, giorni}$

  Il numero delle persone nel sistema continua ad aumentare, questo significa che la coda sta diventando infinita e che il sistema non riuscirà mai ad esaurire i clienti che dovrebbero passare nel sistema più di una settimana!



Il grafico soprastante conferma il fatto che la coda stia diventando infinita in quanto la distanza tra la curva rappresentante i tempi di ingresso e quella relativa ai tempi di uscita, al trascorrere del tempo, continua ad aumentare. Ciò significa che al passare delle ore il tempo trascorso dal cliente nel sistema va aumentando.



Anche questo caso è evidente che il tempo perso non è descrivibile da una funzione di distribuzione nota per cui non è significativo effettuare il test di ipotesi dato che il sistema non è funzionante. Il grafico si presenta simile a quello ottenuto nei casi precedenti.

CODA FINITA

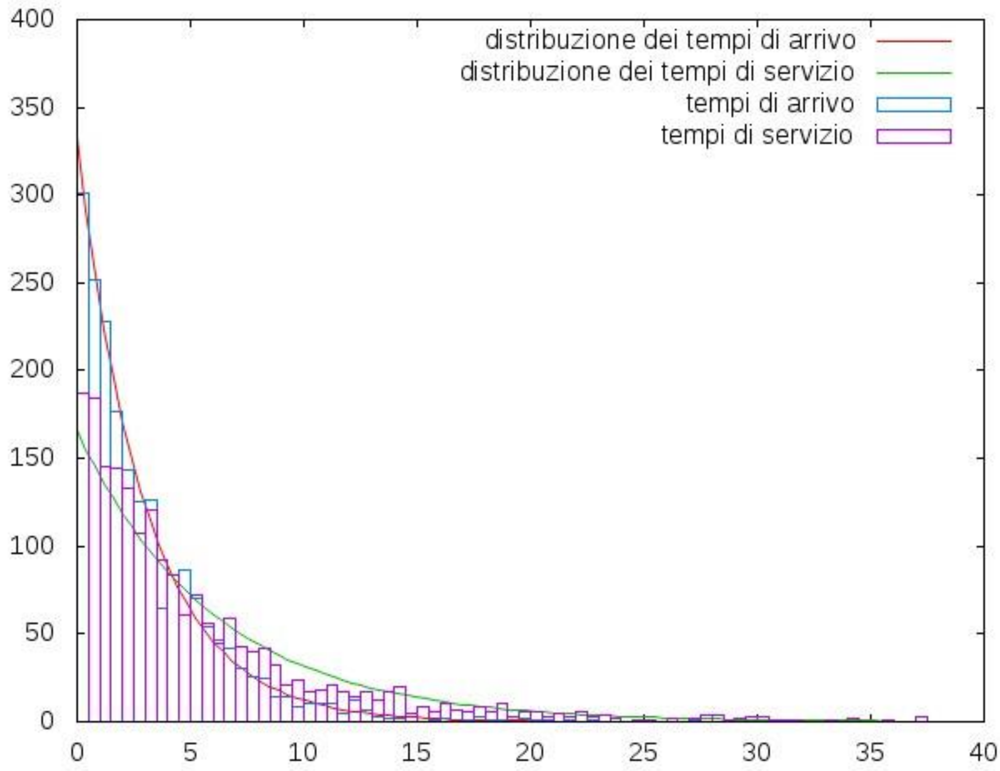
- $\lambda = 20$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $s = 10$ *numero di operatori nel sistema*
- $\mu = 5$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 0.4 < 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 100$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 2000$ *clienti in ingresso*

In questo caso, dato il parametro ρ, ci aspettiamo la coda sia finita.

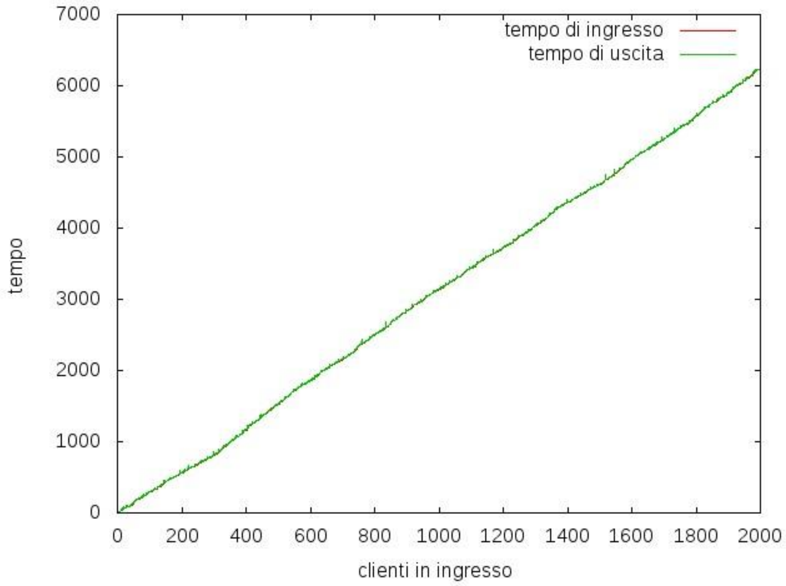
Infatti il programma fornisce il seguente risultato:

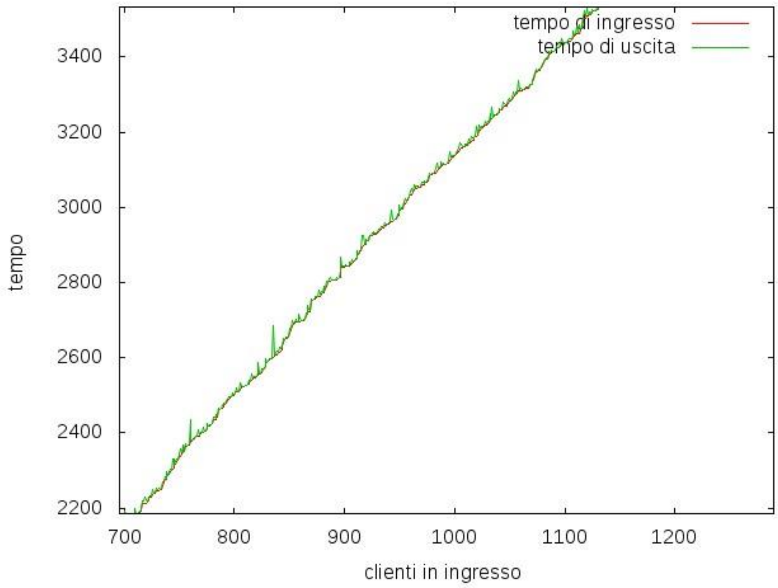
- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso}: $\boldsymbol{E[t_{perso}] = \tau^* = 5'36''}$

Anche in questo caso è stato controllato che i tempi di arrivo e di servizio seguissero le funzioni di distribuzioni con i parametri impostati.



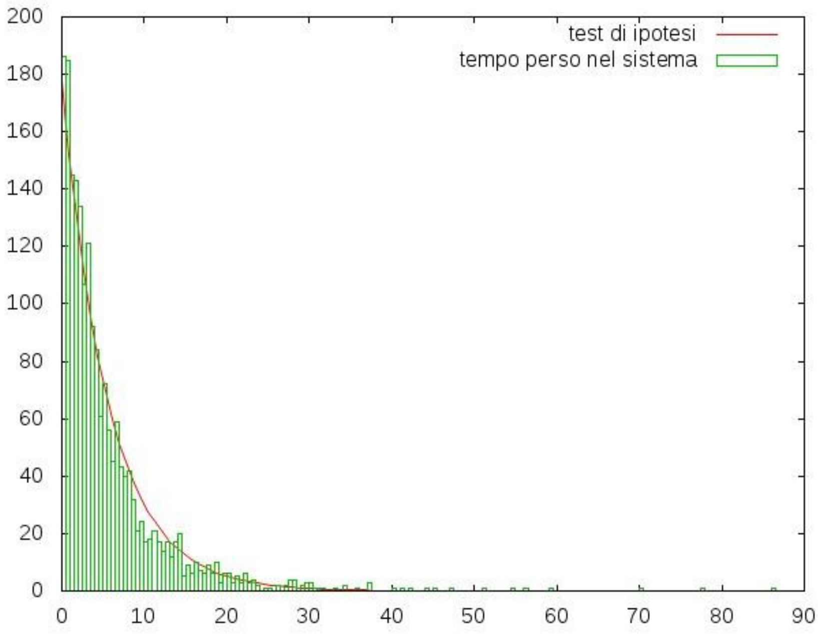
Prima di studiare il tempo perso nel sistema e di effettuare il test d'ipotesi è stato controllato se effettivamente la coda fosse finita:





In questo caso il tempo di uscita presenta dei picchi, ma, nonostante ciò, le due curve rimangono ben sovrapposte.

Si può, quindi, passare ad effettuare il test d'ipotesi:



Questo fit è stato fatto con la funzione esponenziale nel quale il parametro τ è il τ^* stimato dal programma. L'andamento dei tempi persi nel sistema rispecchia pienamente quello della funzione esponenziale per cui si può accettare, anche in questo caso, l'ipotesi fatta.
Tale ipotesi viene anche confermata dalla statistica che fornisce un valore pari a $0.056 < 1.96$. Questo valore rientra nella curva gaussiana considerando un'attendibilità ai nostri calcoli del 5%.

4. $M/G/S/\infty/\infty/FIFO$

L'ultimo studio è stato effettuato per un sistema a coda con più servitori i cui tempi di servizio seguono una funzione di distribuzione gaussiana.

Il programma

Il programma è stato implementato come quello della coda MMS, con la sola differenza relativa alla generazione dei tempi di servizio già descritta in merito alla coda MG1.
In questo caso, è il parametro relativo al numero di clienti serviti in un'ora varia a seconda del numero di persone presenti in fila, come accade per la cosa MMS.
Questo fa sì che i parametri della gaussiana varino di volta in volta per cui, per controllare l'andamento totale dei tempi di servizio sono stati stimati il valore di aspettazione e la varianza dell'intero campione:

- *Il valore di aspettazione* μ_s è stato stimato tramite la media, metodo già illustrato precedentemente;
- *La deviazione standard* σ_s, invece, è stata stimata introducendo una variabile w definita come segue:

$$w = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{s,i} - \mu_s\right)^2$$

Dove w è stata centrata dividendola $\frac{1}{n-1}$ per poiché le variabili $t_{s,i}$ vengono utilizzate per stimare μ_s.

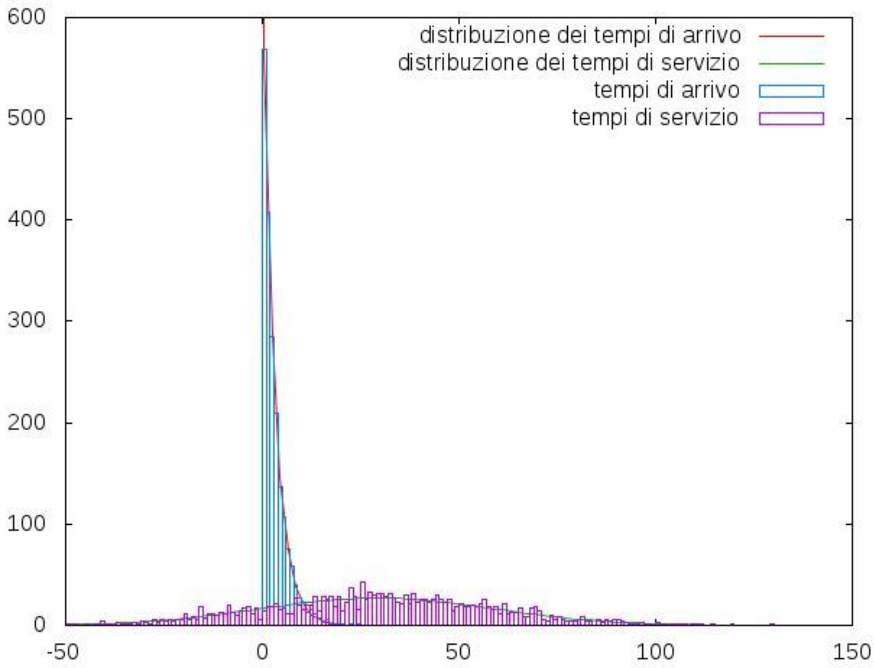
$$E[w] = {\sigma_s}^2$$

ANALISI DATI

CODA INFINITA

- $\lambda = 20$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $s = 2$ *numero di operatori nel sistema*
- $\mu = 1$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 10 > 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 100$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 2000$ *clienti in ingresso nel periodo di studio*

Per prima cosa è stato verificato l'andamento dei tempi di arrivo e di servizio:

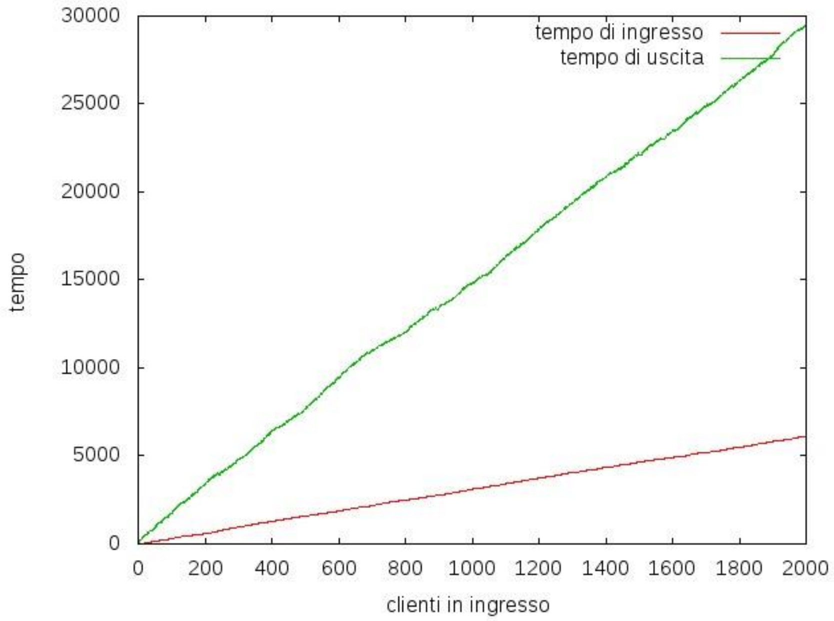


Come si può osservare il fit di entrambi combacia perfettamente con la propria funzione di distribuzione.

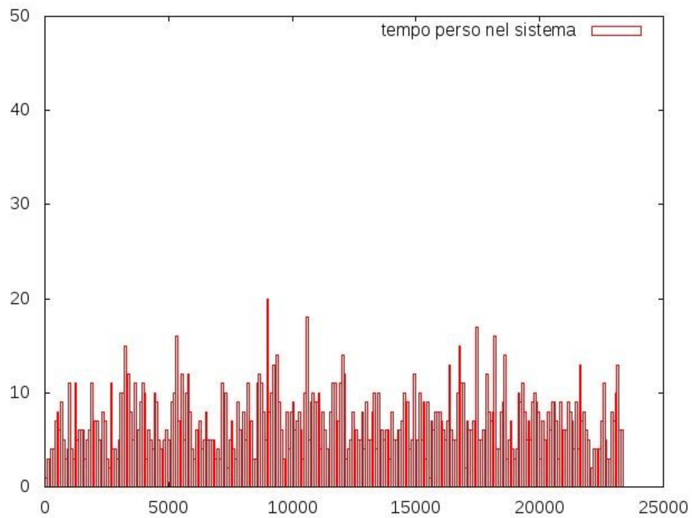
Una volta verificato ciò è interessante capire cosa accade alla coda in questo caso e quanto tempo perdono le persone all'interno del sistema:

- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso} : $\boldsymbol{E[t_{perso}] = \tau^* = 11847\ min = 197.45\ ore \sim 8\ giorni}$

Il numero delle persone nel sistema continua ad aumentare, questo significa che la coda sta diventando infinita e che il sistema non riuscirà mai ad esaurire i clienti che dovrebbero passare nel sistema più di una settimana!



Il grafico soprastante conferma il fatto che la coda stia diventando infinita in quanto la distanza tra la curva rappresentante i tempi di ingresso e quella relativa ai tempi di uscita, al trascorrere del tempo, continua ad aumentare. Ciò significa che al passare delle ore il tempo trascorso dal cliente nel sistema va aumentando.



Anche questo caso è evidente che il tempo perso non è descrivibile da una funzione di distribuzione nota per cui non è significativo effettuare il test di ipotesi dato che il sistema non è funzionante. Il grafico si presenta simile a quello ottenuto nei casi precedenti.

CODA FINITA

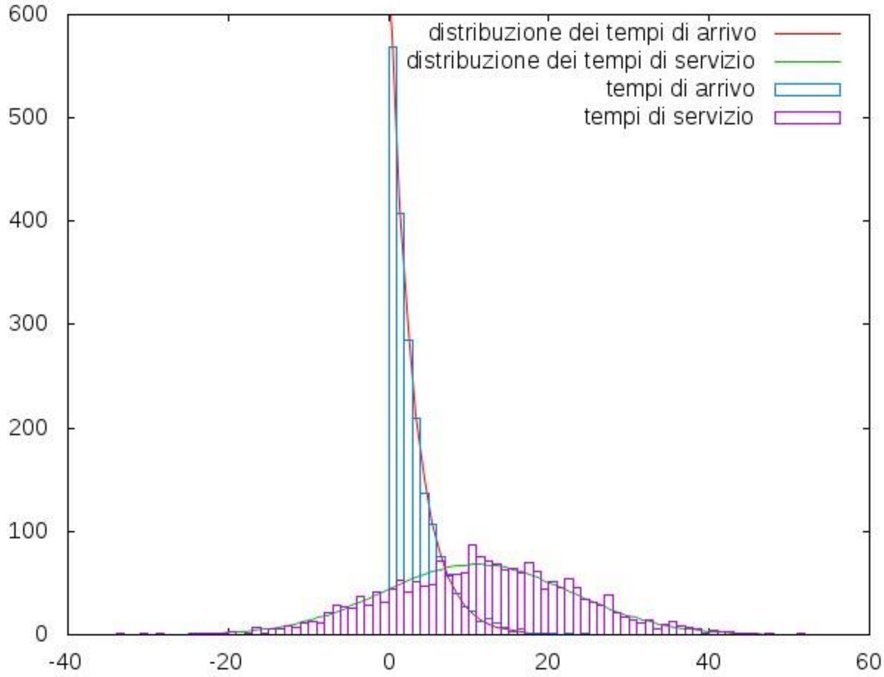
- $\lambda = 20$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $s = 10$ *numero di operatori nel sistema*
- $\mu = 5$ *clienti in ingresso in 1 ora*
- $\rho = 0.4 < 1$ *fattore di utilizzazione*
- $T = 100$ *ore di studio del sistema*
- $\lambda T = 2000$ *clienti in ingresso*

In questo caso, dato il parametro ρ, ci aspettiamo la coda sia finita.

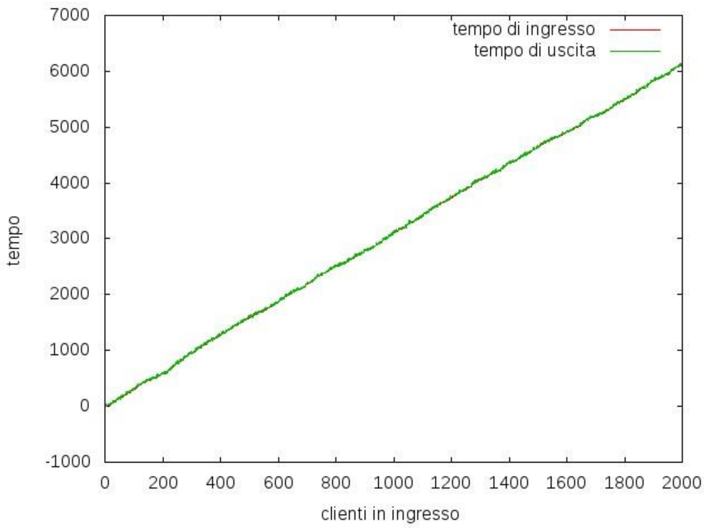
Infatti il programma fornisce il seguente risultato:

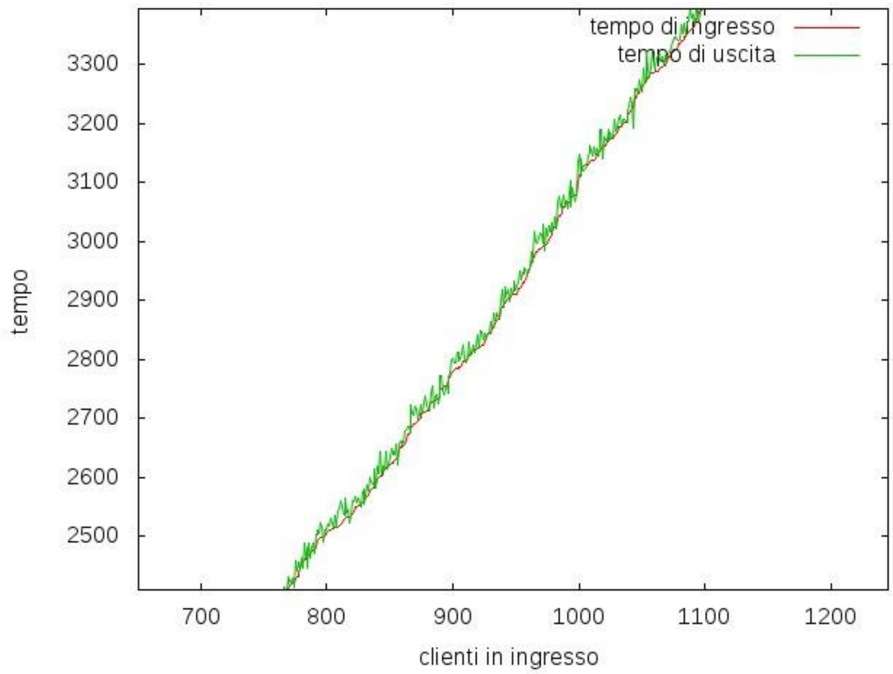
- VALORE DI ASPETTAZIONE DI t_{perso}: $\boldsymbol{E[t_{perso}] = \tau^* = 13'44''}$

Anche in questo caso è stato controllato che i tempi di arrivo e di servizio seguissero le funzioni di distribuzioni con i parametri impostati.



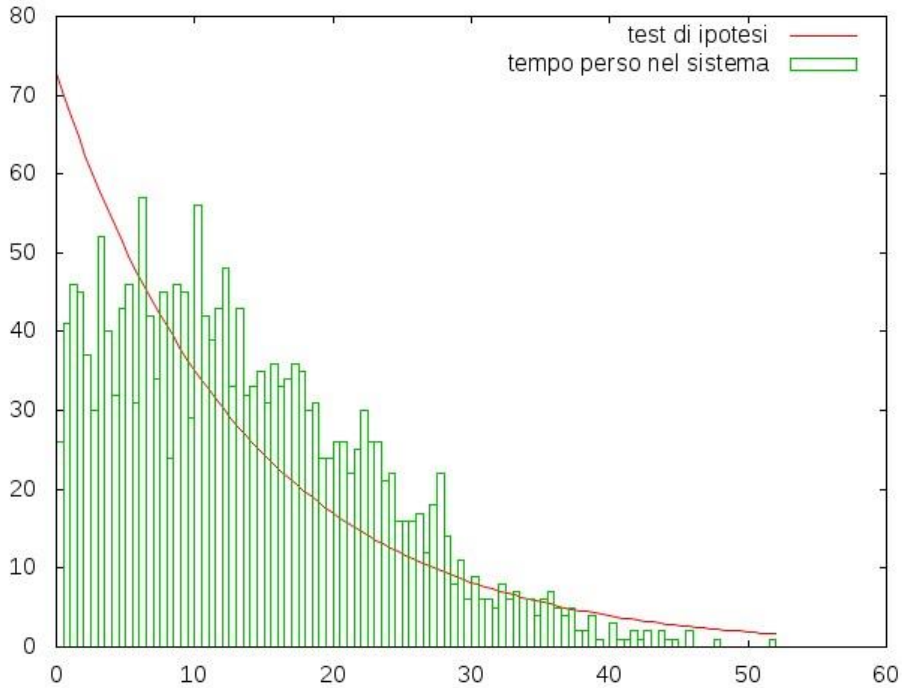
Prima di studiare il tempo perso nel sistema e di effettuare il test d'ipotesi è stato controllato se effettivamente la coda fosse finita:





Anche in questo caso il tempo di uscita presenta dei picchi, ma, nonostante ciò, le due curve rimangono ben sovrapposte.

Si può, quindi, passare ad effettuare il test d'ipotesi:



Questo fit è stato fatto con la funzione esponenziale nel quale il parametro τ è il τ^* stimato dal programma. La statistica fornisce un valore pari a $0.0047 < 1.96$. Questo valore rientra nella curva gaussiana considerando un'attendibilità ai nostri calcoli del 5%.

Avendo utilizzato gli stessi parametri delle funzioni di distribuzione esponenziale e gaussiana dei tempi di servizio, nonché per quella dei tempi di arrivo, è possibile confrontare anche i valori ottenuti. In particolare si può osservare che il tempo medio di attesa è sempre, anche se a volte di poco, inferiore nel caso

M/M rispetto a quello M/G. Da ciò si potrebbe dedurre che un sistema del primo tipo potrebbe essere più efficiente rispetto a uno del secondo tipo.