Esercitazione 3 – stime e distribuzione multinormale

16 ottobre 2023, da completare entro due settimane

Simulare 10000 volte l'esperimento dell'esercitazione 1 (per valori numerici vedi pag. 2), assumendo la relazione $I = m_0\, V,\ \ m_0 = 20$ mA/V, e generando gli "errori accidentali" per ogni valore dell'intensità di corrente usando le stesse deviazioni standard date nel testo [1].

Per ogni simulazione, ipotizzando la relazione lineare $I = mV + q$, determinare le stime $\hat{m}$ e $\hat{q}$ dei parametri, le loro incertezze σ_m e σ_q, e il coefficiente di correlazione ρ.

1. Per controllo, riportare in istogrammi i 10000 valori di σ_m, di σ_q e di ρ.
2. Riportare in un istogramma [2] i 10000 valori di $\hat{m}$ e, in ogni intervallo, i corrispondenti valori di aspettazione (con l'incertezza statistica) ottenuti assumendo che le stime abbiano funzione di distribuzione binormale.
   Produrre l'istogramma corrispondente con i valori di $\hat{q}$.
3. Riportare in un grafico bidimensionale le 10000 coppie di valori $(\hat{m}_i, \hat{q}_i)$.
   Contare
   i. il numero di coppie all'interno delle ellissi definite da
   $$Q^2 = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(\hat{m}-m_0)^2}{\sigma_{\mathrm{m}}^2} - 2\rho\frac{(\hat{m}-m_0)\,(\hat{q}-q_0)}{\sigma_{\mathrm{m}}\sigma_q} + \frac{(\hat{q}-q_0)^2}{\sigma_{\mathrm{q}}^2}\right\} = 1 \ \text{ e } \ Q^2 = 4;$$
   ii. il numero di coppie all'interno dell'ellisse definita da
   $$Q^2 = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(\hat{m}-\hat{m}_x)^2}{\sigma_{\mathrm{m}}^2} - 2\rho\frac{(\hat{m}-\hat{m}_x)\,(\hat{q}-\hat{q}_x)}{\sigma_{\mathrm{m}}\sigma_q} + \frac{(\hat{q}-\hat{q}_x)^2}{\sigma_{\mathrm{q}}^2}\right\} = 1$$
   dove $(\hat{m}_x, \hat{q}_x)$ è una qualsiasi coppia di valori, scelta arbitrariamente.
   iii. Il numero di coppie con $m_0 - \sigma_m < \hat{m} < m_0 + \sigma_m$;
   iv. Il numero di coppie con $-\sigma_q < \hat{q} < \sigma_q$;
   v. Il numero di coppie con $m_0 - \sigma_m < \hat{m} < m_0 + \sigma_m$ e $-\sigma_q < \hat{q} < \sigma_q$.
   Per tutti i conteggi dei punti i.-v., calcolare le incertezze statistiche.
4. Riportare in un grafico tutte le rette ottenute con i parametri stimati nei 10000 esperimenti simulati.

5. Riportare in 3 istogrammi (con stessa scala orizzontale) i valori di $\hat{q}$ corrispondenti a:
   i. $\hat{m}$ in $(m_0 - 1.1\sigma_m, m_0 - 0.9\,\sigma_m)$
   ii. $\hat{m}$ in $(m_0, -0.1\sigma_m,\ m_0 + 0.1\sigma_m)$
   iii. $\hat{m}$ in $(m_0 + 0.9\sigma_m, m_0 + 1.1\,\sigma_m)$
   e i corrispondenti valori di aspettazione ottenuti assumendo che le stime abbiano funzione di distribuzione binormale. (*facoltativo*)

---

[1] per simulare un esperimento, calcolare i valori $I_{c\,i} = m_0 V_i$, $i = 1{,}7$, generare 7 valori x_i con distribuzione normale standard, e considerare, come valori di corrente misurati, $I_{\,i} = I_{ci} + x_i \cdot \sigma_{Ii}$.

[2] scala orizzontale da $\hat{m} - 4\,\sigma_m$ a $\hat{m} + 4\,\sigma_m$, 80 intervalli (?)

Da esercitazione 1

Misurando la differenza di potenziale V ai capi di una resistenza R e l'intensità di corrente I che scorre nella resistenza, si sono ottenuti i seguenti valori:

V (V)	I (mA)		
0.5	8.6	±	2.3
1.0	20.4	±	2.2
1.5	36.8	±	4.8
2.0	35.2	±	4.5
3.0	67.0	±	10.5
4.0	90.6	±	10.1
5.0	99.9	±	10.2

dove le incertezze su I sono statistiche e quelle su V sono trascurabili.

….