

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE**  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Metodi Numerici delle Equazioni Differenziali (Codice: SM054 - 5 CFU)

(Marco Budinich, A.A. 2003 - 2004)

**Fondamenti di architettura** - cpu, bus, ram, I/O. Funzionamento delle varie componenti e registri della cpu nell'esecuzione dettagliata di un'istruzione espressa in un linguaggio ad alto livello (per esempio  $c = b + a$ ). Program counter e stack pointer e loro funzionamento nella chiamata di funzioni.

**Linguaggio C** - Struttura fondamentale del linguaggio C comparata al Fortran: espressioni, funzioni, istruzioni di branch e di loop. Variabili di tipo intero, char, float e double. Dichiarazioni e inizializzazioni di variabili, cast di variabili, dichiarazione di funzioni, semplice input/output da terminale e su file. Operatori numerici e logici, costanti, variabili locali, globali e static e loro memorizzazione nella ram. Compilatore, assembler e preprocessing. Controllo di flusso: if, for e while, istruzioni break e continue. Funzioni ricorsive e principio di funzionamento. Array uni & multidimensionali, puntatori e puntatori a funzione, allocazione statica e dinamica della memoria (malloc e free). Vettori di puntatori e loro applicazione per la memorizzazione di matrici, inizializzazione della struttura, confronto con la memorizzazione tradizionale.

**Mathematica** - Il programma Mathematica: organizzazione client-server, variabili con valori numerici e simbolici, grafici di funzioni a una e più variabili. Calcoli numerici e simbolici, assegnazione di valori (=) e sostituzioni (/.), liste, tabelle e matrici. Funzioni e loro definizione sia differita (:=) che immediata (=), definizione di funzioni per valori fissi ( $f[0] = 1$ ). Raccolta ed analisi di dati sperimentali, matrici di dati e loro manipolazione, cenni al controllo della precisione numerica nei calcoli, funzioni di approssimazione numerica  $N[]$  e  $Chop[]$ . Soluzione simbolica e numerica di equazioni differenziali, funzioni di interpolazione. Funzioni utili per la programmazione (If, For, Block), funzioni Sum e D. Animazione di grafici applicata al problema dei tre corpi.

**Equazioni differenziali** - Equazioni differenziali ordinarie lineari: soluzioni fondamentali dell'omogenea associata, integrali particolari con il metodo del Wronskiano. Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Applicazioni all'oscillatore armonico smorzato con forza esterna sinusoidale e impulsiva ( $\delta$  di Dirac). Linearità dell'equazione e soluzione di casi in cui la forza esterna sia sviluppabile in serie di Fourier, caso dell'onda quadra.

**Algoritmi e metodi numerici** - Rappresentazione e precisione delle variabili floating point, errori numerici di troncamento e arrotondamento: esempio di calcolo delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Cenni all'implementazione dell'aritmetica a precisione arbitraria. Metodi di Eulero e di Runge-Kutta per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie; scrittura di un semplice programma in C per usare questi metodi con l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato e forzato con vari tipi di forze esterne: nulla (oscillatore libero), periodica

(oscillatore forzato) ed impulsiva: discussione della relativa trattazione numerica. Metodo di Runge-Kutta di ordine 4 a passo variabile ed errore controllato. Cenni ad altri metodi per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie ed al caso di integrazione di equazioni differenziali di significato fisico. Funzione ODEint (tratta dal libro Numerical Recipes) e sua applicazione al caso di equazioni dell'oscillatore armonico forzato. Cenni ai diversi metodi di controllo dell'errore. Semplice soluzione numerica del problema dei tre corpi.

### **Esperienze svolte in laboratorio**

1. Uso del programma Mathematica: esempi di calcoli numerici e simbolici, grafici di funzioni ad una e due variabili, costruzioni di semplici tabelle, calcolo simbolico dei termini dello sviluppo in serie di Taylor.
2. Scrittura di semplici funzioni ricorsive in C per il calcolo del fattoriale e dei coefficienti binomiali e analisi dell'algoritmo.
3. Programmazione in C: tabulazione di una funzione da programma e suo display con Mathematica; confronto dei risultati ottenuti con quelli esatti ottenuti con Mathematica, discussione degli errori numerici commessi dal programma in C; eventuale scrittura di un programma per la determinazione della precisione della macchina.
4. Scrittura di un programma in C per la soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie di primo ordine con i metodi di Eulero e Runge-Kutta. Confronto dei risultati con la soluzione esatta ottenuta con Mathematica; studio degli errori e della loro dipendenza dal passo.
5. Scrittura di un programma in C per la soluzione numerica, con i metodi di Eulero e Runge-Kutta, di equazioni differenziali ordinarie di secondo ordine a coefficienti costanti. Confronto dei risultati con la soluzione esatta calcolata con Mathematica (soluzione generale dell'oscillatore armonico smorzato e forzato).
6. In continuazione dell'esperienza precedente studio dell'oscillatore armonico smorzato con forza sinusoidale e impulsiva ( $\delta$  di Dirac). Confronto dei risultati con la soluzione analitica esatta calcolata con Mathematica.
7. Uso della funzione di libreria Odeint per la soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie con passo variabile ed errore predeterminato. Applicazione all'oscillatore armonico smorzato soggetto ad una forza "ad onda quadra". Soluzione in Mathematica mediante sviluppo in serie discreta di Fourier e confronto con le soluzioni numeriche di Odeint. Confronto degli errori ottenuti nello sviluppo della forza e della rispettiva soluzione..
8. Semplice soluzione numerica del problema dei tre corpi. Generazione di un 'animazione' della soluzione numerica con l'ausilio di Mathematica.

### **Alcuni esercizi "per casa"**

- Controllo dell'errore di arrotondamento dell'ultimo bit in una variabile floating point e poi
- grafico di  $\Delta x/x$  al variare di  $x$  nell'errore di arrotondamento dell'ultimo bit
- Programma in C per calcolare l' $\epsilon$  della macchina ( $1. + \text{eps} == 1.$ )
- Programma in C per il calcolo dei coefficienti binomiali con funzioni ricorsive e poi
- calcolo del numero di chiamate per i coefficienti binomiali ricorsivi nei 2 modi proposti
- Integrare il problema dei 3 corpi in formulazione Hamiltoniana con 4 gradi di liberta'.
- Applicare Odeint al problema dei 3 corpi e animazione con dati interpolati con Mathematica.
- Integrazione di un pendolo smorzato e forzato.

Kernigham B.W. & Ritchie D.M. I - 288  
The C Programming Language  
Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ USA 1998, second edition, pp. xii 272

Press William H., Flannery Brian P., Teukolsky Saul A. & Vetterling William T. I - 296  
Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing  
Cambridge University Press, Cambridge 1988/9/92, second edition, pp. xxvi 994

Wolfram Stephen  
The Mathematica Book  
Cambridge fourth edition

Saff E.B. & Snider A.D. I - 389  
Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics Science and Engineering  
Prentice Hall, NJ USA 1993, second edition, pp. xii 468

Landau Rubin H. & Páez Manuel J. I - 433  
Computational Physics Problem Solving with Computers  
John Wiley & Sons Inc., New York USA 1997, pp. xxx 520

**Sessioni ufficiali d'esame di: Metodi Numerici delle Equazioni Differenziali**

19 marzo 2004 6 aprile 2004	28 giugno 2004 9 luglio 2004	10 settembre 2004	15 dicembre 2004
11 gennaio 2005	22 marzo 2005	29 giugno 2005	13 settembre 2005

Tutti gli esami si svolgono alle ore 9:30 al Dipartimento di Fisica