UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Algebra Geometrica per la Fisica (Codice: 351SM – FIS/02 – 6 CFU)

(Marco Budinich, A.A. 2022 - 2023)

Algebra lineare – Spazi lineari X, relative basi, cenni a spazi modulari (doppio campo), spazi somma e prodotto. Mappe e loro proprietà generali, mappe lineari e dualità, End X e Aut X, involuzioni e cenni alla somma diretta e alla struttura modulare indotte. Algebre e semplici esempi, campo complesso visto come un algebra reale, sottoalgebre di R(2). Ideali e ideali minimi, rango dell'ideale minimo di End X. Mappe fra algebre: generatori dell'algebra, automorfismi e involuzioni; elementi idempotenti e definizione di automorfismi irriducibili. Spazi quadratici definiti per mezzo di un prodotto scalare simmetrico e definizioni equivalenti con forme quadratiche e correlazioni lineari. Mappe ortogonali e definizione di funzione aggiunta, condizioni di ortogonalità. Sottospazi ortogonali, cenni al caso di sottospazi nulli. Riflessioni come antirotazioni ortogonali; teorema di Cartan Dieudonnè e dimostrazione per induzione, semplici esempi in R^2 e R^3. Signature di uno spazio lineare, correlazioni lineari 'skew' e spazi simplettici con relative proprietà, spazi Euclidei. Antinvoluzioni dell'algebra R(n) e loro corrispondenza all'antinvoluzione indotta dall'adjoint su spazi con correlazione lineare (prodotto scalare) simmetrica o skew. Cenni ai casi di spazi complessi e quaternionici. Prodotto tensoriale fra algebre: semplici esempi con le algebre di matrici; cenni alla complessificazione vista come prodotto tensoriale per C. Esempi di riconoscimento di sottoalgebre. Cenni alle strutture complesse e simplettiche.

Algebra di Clifford – Definizione assiomatica dell'algebra di Clifford: copie del campo e dello spazio lineare nell'algebra e relative iniezioni, mappa di Clifford, parti simmetriche ed antisimmetriche del prodotto di Clifford e loro significato, inverso di un vettore. Basi dello spazio lineare e generatori dell'algebra; base dell'algebra e sue dimensioni, universal Clifford algebra. Cenni alla costruzione ricorsiva dell'algebra di Clifford di R^{n,n}, agli isomorfismi fra algebre ed alla periodicità di Bott. Cenni agli spazi spinoriali dell'algebra; relazioni fra isomorfismi dello spazio lineare e dell'algebra. Involuzioni e anti-involuzioni, grading dell'algebra, costruzione della sottoalgebra pari. Elemento di volume o pseudoscalare dell'algebra, dualità di Hodge, ruolo differente nel caso di spazi di dimensione pari e dispari. Prodotto di un vettore per un multivettore, cenni al generico prodotto di multivettori. Algebra geometrica dello spazio di Minkowski, cenni al tensore metrico ed alla base duale, segnatura adottata e cenni alle diverse algebre per n=4, isometrie generate dai bivettori, trivettori ed elemento di volume, reversion, sottoalgebra pari e sua 'naturale' struttura complessa. Cenni al gruppo di Clifford Lipschitz ed al gruppo di Lorentz. Bivettori dell'algebra geometrica dello spazio di Minkowski, cenni ai paravettori. Bivettore dello spazio di Minkowski come somma di un vettore polare ed uno assiale relativi alla sottoalgebra pari identificata come l'algebra dello spazio Euclideo.

Applcazioni alla Fisica – Wedge product come parte antisimmetrica del prodotto di Clifford e semplici proprietà, cenni alla Grassmann algebra. Similitudine fra l'algebra R(2) e i complessi sia come elementi del piano che come generatori delle rotazioni. Geometric algebra degli spazi Euclidei R^2 e R^3, ruolo delle matrici di Pauli, relativi cenni storici. Generico prodotto di vettori e bivettori: similitudini e differenze, prodotto vettoriale come bivettore 'camuffato'. Riflessioni ed estensione ad automorfismi dell'algebra, rotazioni e teorema di Cartan, defnzione di rotore. Frames e frames reciproci, cenni alle componenti controvarianti e covarianti. Introduzione al calcolo vettoriale: derivata vettoriale e direzionale con esempi di applicazione a diversi campi: scalare, vettoriale e multivettoriale (cenni). Frames in relatività ristretta, ruolo della velocità, split spazio-temporale e vettori relativi, paravettori, vettori di Gibbs come bivettori nell'algebra geometrica dello spazio di Minkowski; split spazio-temporale e paravettori dell'algebra di R^3. Split spazio-temporale della derivata vettoriale e dei bivettori. Equazioni di Maxwell e semplificazione ottenibile col vettore complesso di Silberstein Riemann F = E + i B. Identificazione delle equazioni di Maxwell come elementi di grado diverso nell'algebra geometrica dello spazio di Minkowski e equazioni di Maxwell come derivata vettoriale di un bivettore F = E + I B, definizione del vettore di Minkowski delle cariche elettriche (quadricorrente). Riconoscimento delle equazioni di Maxwell nel vuoto nella generica equazione \Delta F = 0. Derivazione delle equazioni canoniche della meccanica Hamiltoniana e loro scrittura in forma simplettica. Cenni alla struttura dello spazio delle fasi: spazi tangenti e cotangenti, esempio del pendolo semplice. Struttura simplettica generata da un bivettore e prodotto scalare antisimmetrico indotto, equazioni canoniche scritte sfruttando la struttura simplettica, applicazione al caso del pendolo semplice. Definizione delle parentesi di Poisson con la struttura simplettica ed estendibilità della definizione a quantità multivettoriali, esempio delle equazioni di Hamilton. Cenni alla trasformazioni canoniche come trasformazioni il cui flusso conserva il bivettore simplettico; cenni al teorema di Liouville ad alla sua dimostrazione in algebra geometrica.

Testi consigliati **Collocazione biblioteca Dipartimento di Fisica:**

Porteous Ian R., Clifford algebras and the Classical Groups, Cambridge University Press, 1995, pp. X 295.

Doran, Chris J. L. and Lasenby, Anthony N., Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, 2003, pp. Xiv 578.

Sessioni ufficiali d'esame di: Algebra Geometrica per la Fisica

26 gennaio 2023 23 febbraio 2023	8 giugno 2023 6 luglio 2023	19 settembre 2023
30 gennaio 2024		

Tutti gli esami si svolgono alle ore 9:30 al Dipartimento di Fisica, in via A. Valerio 2