

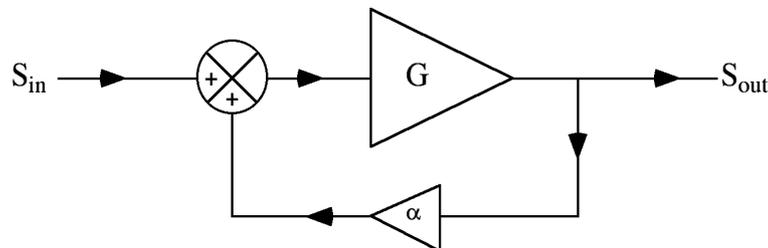
10. Elettronica lineare (retroazione e amplificatori operazionali)

Molte delle funzioni che abbiamo descritto in modo matematico in queste dispense vengono implementate in laboratorio per mezzo della cosiddetta *elettronica lineare*. Con questo termine si indica tutta quella parte dell'elettronica che manipola i segnali elettrici per mezzo di operazioni lineari (amplificazione, moltiplicazione di segnali), e comprende anche tutte le operazioni derivate che si possono realizzare con combinazioni di componenti lineari, ma che non sono necessariamente lineari.

In questa sezione consideriamo in particolare il meccanismo della retroazione, di cui diamo una descrizione matematica, e gli amplificatori operazionali, che sono i più importanti componenti lineari.

10.1 Retroazione (feedback)

Si consideri lo schema mostrato nella figura seguente, che rappresenta un amplificatore con retroazione (feedback):



in questa figura il cerchio segmentato rappresenta un elemento sommatore, mentre i triangoli sono elementi che moltiplicano il segnale per la costante indicata all'interno. In particolare il triangolo superiore rappresenta un amplificatore con *guadagno* G , mentre il triangolo inferiore rappresenta una rete passiva (per cui $|\alpha| < 1$). Allora il segnale all'uscita è dato da:

$$S_{out} = G \cdot (S_{in} + \alpha S_{out}) \quad (10.1)$$

quindi, risolvendo si trova

$$S_{out} = \frac{G}{1 - \alpha G} S_{in} \quad (10.2)$$

e il sistema si comporta come un amplificatore con il guadagno

$$G' = \frac{G}{1 - \alpha G} \quad (10.3)$$

Nel caso più semplice in cui α e G possano essere considerate quantità reali, si possono distinguere 3 casi:

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. $1 - \alpha G > 1$ (e cioè $\alpha G < 0$) allora $G' < G$ | <i>retroazione negativa</i> |
| 2. $1 - \alpha G < 1$ (e cioè $\alpha G > 0$) allora $G' > G$ | <i>retroazione positiva</i> |
| 3. $1 - \alpha G = 0$ | <i>auto-oscillazione</i> |

Nel caso in cui si abbia retroazione positiva il nuovo guadagno è più alto di quello vecchio. Nel caso in cui $1 - \alpha G = 0$ il nuovo guadagno diverge. Ovviamente quest'ultima possibilità non si verifica mai, perché non abbiamo considerato le perdite. Inoltre la rete passiva è normalmente un filtro LRC, e per questo la condizione di zero si verifica solo per una ben determinata frequenza, e il sistema comincia ad amplificare il rumore solo a quella frequenza con il risultato che si ottiene un oscillatore la cui frequenza è controllabile con la rete di reazione.

10.2 Stabilizzazione per mezzo della retroazione negativa

Nonostante la reazione positiva sembri più vantaggiosa di quella negativa, in realtà è quest'ultima che si utilizza normalmente, anche se il nuovo guadagno è inferiore a quello dell'amplificatore non reazionato.

In generale il guadagno di un amplificatore dipende da alcuni parametri (ad esempio il tempo, la temperatura di funzionamento, etc.), e quindi se p è un parametro generico possiamo scrivere

$$G = G(p) \quad (10.4)$$

e quindi derivando rispetto a p troviamo l'espressione

$$\frac{\partial G'}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{G}{1 - \alpha G} \right) = \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{1}{1 - \alpha G} + \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{\alpha G}{(1 - \alpha G)^2} = \frac{\partial G}{\partial p} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha G)^2} \quad (10.5)$$

e infine

$$\frac{1}{G'} \frac{\partial G'}{\partial p} = \frac{1}{(1 - \alpha G)} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \right) \quad (10.6)$$

Si vede allora che quando il guadagno cambia a causa di un cambiamento del parametro p , allora la variazione relativa è più piccola per l'amplificatore con retroazione negativa. La retroazione negativa permette dunque di stabilizzare il guadagno.

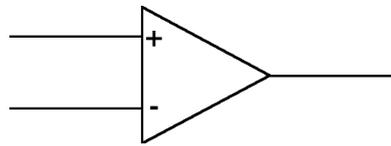
Inoltre, se il guadagno è molto alto, allora dalla formula che dà il nuovo guadagno con la retroazione negativa troviamo che $G' \xrightarrow{G \rightarrow \infty} -\frac{1}{\alpha}$ e che il segnale complessivo in ingresso vale

$$S_{in} + \alpha S_{out} \approx S_{in} + \alpha \left(-\frac{1}{\alpha} \right) S_{in} = 0 \quad (10.7)$$

(in pratica si tratta di un segnale molto piccolo, con ampiezza dell'ordine di $1/G$). Poiché in questo caso $G' \xrightarrow{G \rightarrow \infty} -\frac{1}{\alpha}$, il nuovo guadagno dipende solo dalla rete di retroazione, e quindi anche in caso di non linearità dell'amplificatore, con la retroazione negativa l'amplificatore può essere reso perfettamente lineare.

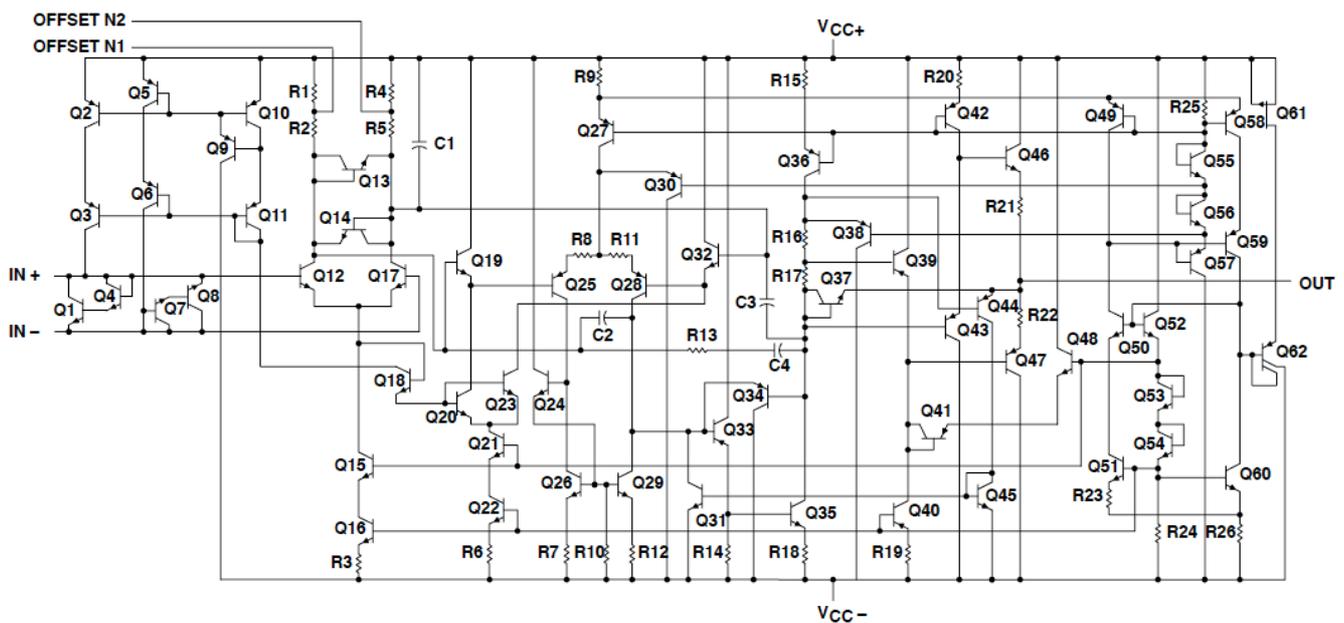
10.3 Amplificatori operazionali (OP-AMP)

Le idee relative alla retroazione negativa vengono realizzate in pratica utilizzando principalmente i cosiddetti *amplificatori operazionali*: si tratta di amplificatori differenziali con un'impedenza di ingresso altissima e con un guadagno enorme (spesso maggiore di 10^6)¹. Il simbolo che indica un amplificatore operazionale è il seguente:



Il segno - indica il terminale invertente mentre il segno + indica il terminale non invertente (l'uscita deve essere collegata al terminale invertente per poter avere retroazione negativa).

Gli amplificatori operazionali sono componenti molto sofisticati: la figura seguente mostra il circuito interno di un amplificatore operazionale TLE2027 della Texas Instruments



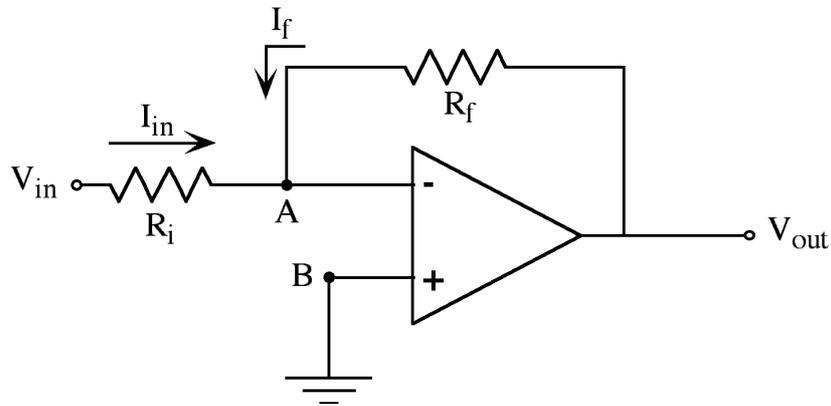
ACTUAL DEVICE COMPONENT COUNT		
COMPONENT	TLE2027	TLE2037
Transistors	61	61
Resistors	26	26
epiFET	1	1
Capacitors	4	4

Poiché l'impedenza d'ingresso è molto elevata e il guadagno è molto grande, le due regole fondamentali (benché approssimate) per il funzionamento degli amplificatori operazionali – con feedback negativo – sono le seguenti:

¹Un amplificatore differenziale dà un'uscita che è proporzionale alla differenza di potenziale tra i due ingressi.

1. Un'OP-AMP non assorbe corrente in ingresso
2. Gli ingressi sono alla stessa tensione

Utilizzando queste due regole analizziamo ora il comportamento del circuito mostrato nella figura seguente:



Poiché la retroazione tende a portare i due ingressi allo stesso potenziale allora la tensione nel punto A tende ad essere uguale alla tensione nel punto B, che in questo caso si trova a massa, e perciò anche il punto A si trova al potenziale di massa (poiché l'effetto è prodotto dalla retroazione si dice che A è una *massa virtuale*). Questo ci permette di calcolare le correnti:

$$I_{in} = V_{in}/R_i \text{ e } I_f = V_{out}/R_f . \quad (10.8)$$

Inoltre l'amplificatore non assorbe corrente e allora

$$I_{in} + I_f = 0 \quad (10.9)$$

e quindi

$$V_{in}/R_i + V_{out}/R_f = 0 \quad (10.10)$$

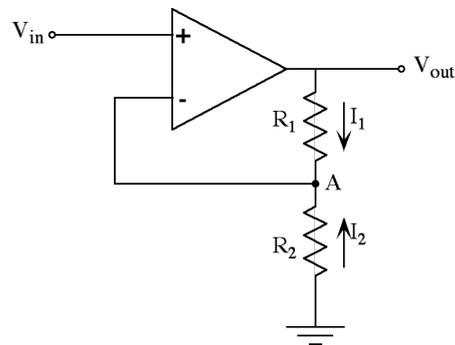
e infine

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_i} V_{in} \quad (10.11)$$

Il circuito si comporta come un amplificatore invertente con un guadagno che dipende solo dalla rete di feedback e non dalle caratteristiche dell'amplificatore operazionale.

10.4 Alcuni semplici esempi di applicazione degli OP-AMP²

- *Amplificatore non-invertente*

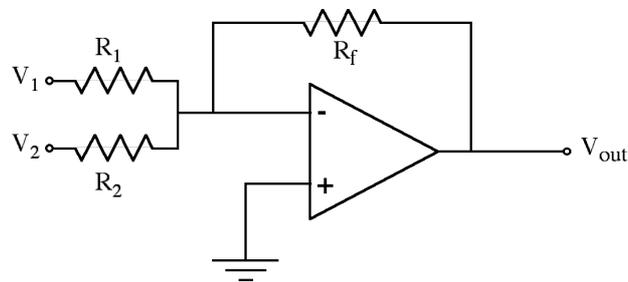


In questo caso il punto A si trova a a potenziale V_{in} , e quindi

$$0 = I_1 + I_2 = \frac{V_{out} - V_{in}}{R_1} - \frac{V_{in}}{R_2} \quad (10.12)$$

$$V_{out} = R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot V_{in} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot V_{in} \quad (10.13)$$

- *Sommatore analogico*



In questo caso si ripete quasi esattamente il ragionamento fatto per l'amplificatore invertente:

$$I_1 + I_2 + I_f = 0 \quad (10.14)$$

e quindi

$$V_1/R_1 + V_2/R_2 + V_{out}/R_f = 0 \quad (10.15)$$

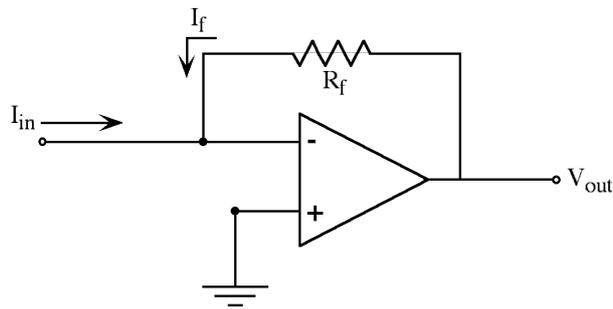
e infine

$$V_{out} = -R_f \cdot \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right) \quad (10.16)$$

e perciò il circuito fa la somma pesata delle tensioni di ingresso.

² Alcune delle figure che compaiono in questa sezione sono tratte dalla nota AN-4 (versione 1995) della National Semiconductor, scritta originariamente da Robert Widlar, l'inventore del primo amplificatore operazionale su circuito integrato.

- *Amplificatore in transimpedenza*



Questo caso è ancora più semplice di quello dell'amplificatore invertente:

$$I_{in} + I_f = 0 \quad (10.17)$$

e quindi

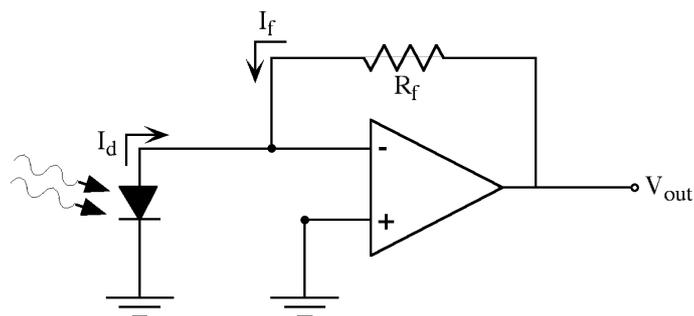
$$I_{in} + V_{out}/R_f = 0 \quad (10.18)$$

e infine

$$V_{out} = -R_f I_{in} \quad (10.19)$$

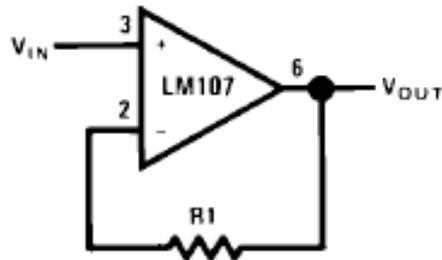
e così questo amplificatore converte una corrente in una tensione.

- *Amplificazione della corrente di un fotodiode*



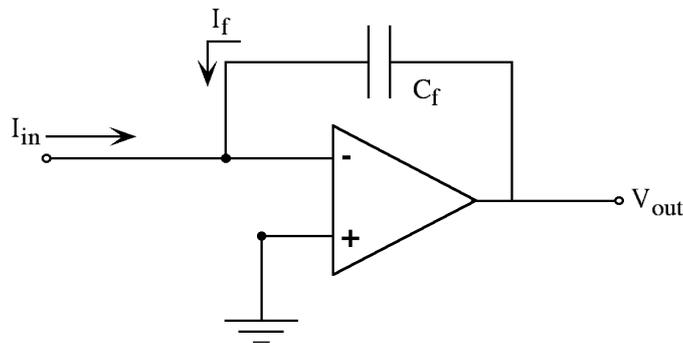
Questa è un'applicazione molto comune dell'amplificatore in transconduttanza. In questo caso il diodo non è polarizzato: si possono ottenere prestazioni migliori con circuiti in cui il diodo è polarizzato, in tal caso si aumentano la sensibilità e la risposta in frequenza.

- *Buffer con guadagno unitario*



In questo caso la tensione di uscita segue la tensione di ingresso, ma visto che l'impedenza di ingresso è alta e quella di uscita è bassa, questa configurazione permette di adattare l'impedenza e in molti casi viene utilizzata come line driver per segnali analogici.

- *Circuito integratore*



In questo caso si ha ancora una volta:

$$I_{in} + I_f = 0 \quad (10.20)$$

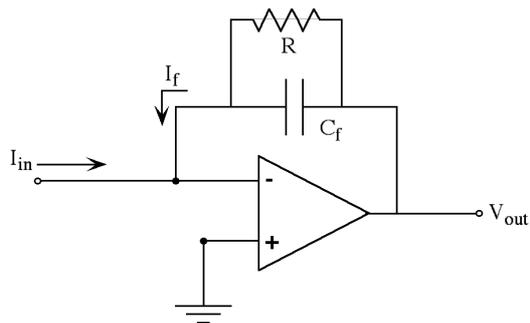
e quindi

$$I_{in} + \frac{d}{dt}(C_f V_{out}) = 0 \quad (10.21)$$

da cui si trova

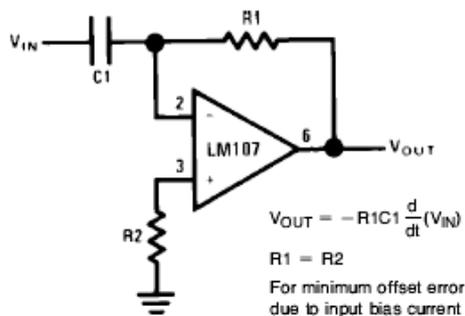
$$V_{out}(t) = -\frac{1}{C_f} \int_0^t I_{in} dt' \quad (10.22)$$

e così questo circuito integra la corrente in ingresso. Si noti però che nell'integrazione si è supposto che il condensatore fosse inizialmente scarico, e quindi perché il circuito funzioni effettivamente come integratore si deve prevedere un meccanismo di scarica, come nella figura seguente:



ora c'è una resistenza in parallelo con il condensatore che serve a scaricarlo. La resistenza R va dimensionata in modo che il tempo RC_f sia molto maggiore della durata degli impulsi di corrente che si vogliono integrare, ed allo stesso tempo molto più piccolo del tempo medio tra due impulsi di corrente, in modo che il condensatore sia effettivamente scarico quando arriva un nuovo impulso.

- *Circuito differenziatore*



In questo caso la corrente totale all'ingresso invertente è

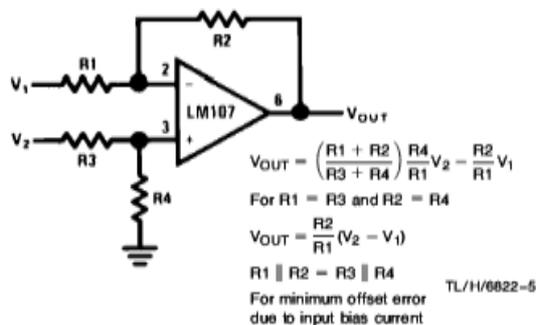
$$I_{tot} = C1 \frac{dV_{in}}{dt} + \frac{V_{out}}{R1} = 0 \tag{10.23}$$

quindi

$$V_{out} = -R1C1 \frac{dV_{in}}{dt} \tag{10.24}$$

e la tensione di uscita è proporzionale alla derivata della tensione di ingresso.

- *Amplificatore differenziale*



In questo caso la tensione dell'ingresso non invertente è

$$V_+ = \frac{R4}{R3 + R4} V_2 \quad (10.25)$$

e a causa della retroazione questa è anche la tensione dell'ingresso invertente. Inoltre la corrente all'ingresso invertente è come al solito

$$I_{tot} = \frac{V_1 - V_+}{R1} + \frac{V_{out} - V_+}{R2} = 0 \quad (10.26)$$

e quindi

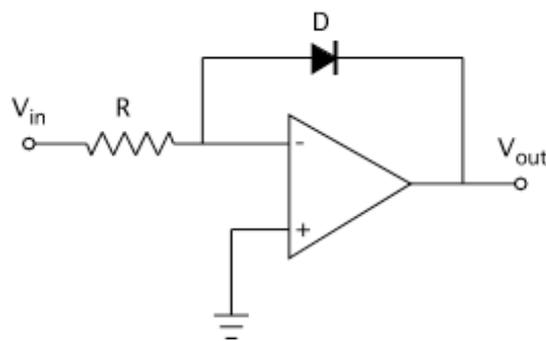
$$\begin{aligned} \frac{V_1}{R1} + \frac{V_{out}}{R2} - \frac{R4}{R1(R3 + R4)} V_2 - \frac{R4}{R2(R3 + R4)} V_2 &= 0 \\ \frac{V_{out}}{R2} &= \frac{R4(R1 + R2)}{R1 \cdot R2(R3 + R4)} V_2 - \frac{V_1}{R1} \\ V_{out} &= \frac{R4(R1 + R2)}{R1(R3 + R4)} V_2 - \frac{R2}{R1} V_1 \end{aligned} \quad (10.27)$$

e quindi se $R1=R3$ e $R2=R4$,

$$V_{out} = \frac{R2}{R1} (V_2 - V_1) \quad (10.28)$$

e la tensione d'uscita è proporzionale alla differenza delle tensioni.

- *Amplificatore logaritmico*



Come al solito si trova la relazione tra corrente in ingresso e corrente del diodo:

$$\frac{V_{in}}{R} - I_D = 0 \quad (10.29)$$

ma

$$I_D \approx I_0 e^{\frac{qV_{out}}{\mu kT}} \quad (10.30)$$

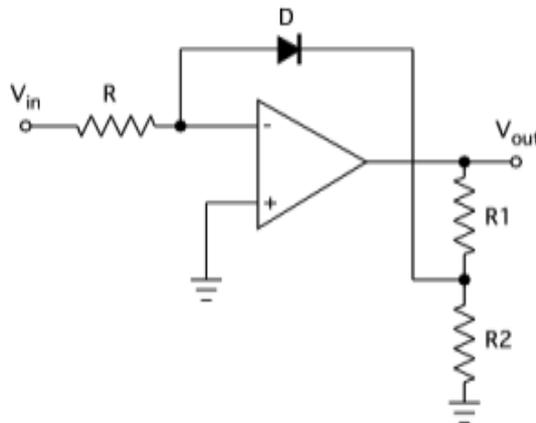
e quindi

$$\frac{V_{in}}{R} \approx I_0 e^{\frac{qV_{out}}{\mu kT}}$$

$$\frac{qV_{out}}{\mu kT} \approx \ln \frac{V_{in}}{RI_0} \tag{10.31}$$

$$V_{out} \approx \frac{\mu kT}{q} (\ln V_{in} - \ln RI_0)$$

Prendiamo ora un circuito leggermente diverso:



in questo caso

$$I_D \approx I_0 \exp\left(\frac{q}{\mu kT} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{out}\right) \tag{10.32}$$

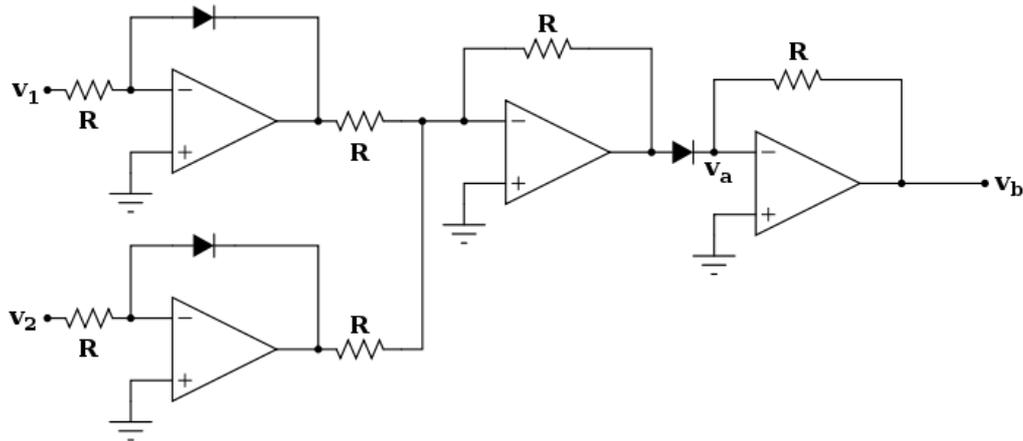
quindi

$$V_{out} \approx \frac{\mu kT}{q} \frac{R_1 + R_2}{R_2} (\ln V_{in} - \ln RI_0) \tag{10.33}$$

e dunque si può regolare il guadagno logaritmico cambiando i valori delle resistenze R1 e R2.

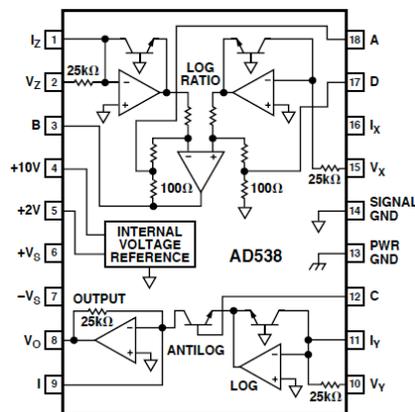
- Circuito moltiplicatore

L'amplificatore logaritmico è la base di partenza per la costruzione dei circuiti moltiplicatori, infatti se si prende il logaritmo di due tensioni, si sommano i logaritmi e si prende l'antilogaritmo del risultato, si ottiene il prodotto delle due tensioni. Questa logica è implementata nel circuito mostrato nella figura seguente



In pratica, invece di utilizzare la giunzione p-n in un diodo semiconduttore si preferisce utilizzare la relazione tra corrente di collettore e tensione base-emettitore in un transistor bipolare (nel 1968 R. Widlar, l'inventore del primo amplificatore operazionale, ha dimostrato che la corrente di collettore può essere proporzionale all'esponenziale della tensione base-emettitore in una regione che copre nove ordini di grandezza), e si utilizzano più giunzioni in modo da ottenere una compensazione in temperatura.

La figura seguente mostra la struttura interna di un vero circuito moltiplicatore analogico, l'AD538 della Analog Devices

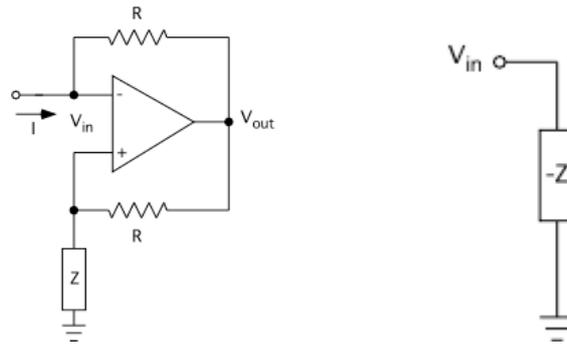


si possono riconoscere nella parte superiore due amplificatori logaritmici e un amplificatore differenziale: l'uscita corrisponde al logaritmo del rapporto delle due tensioni, e si può ottenere il rapporto utilizzando il circuito nella parte inferiore, che calcola l'antilogaritmo.

La pagina web <http://www.analog.com/en/other-products/analog-multipliersdividers/products/index.html> sul sito della Analog Devices riporta le caratteristiche di questo e di altri circuiti moltiplicatori moderni.

- *Gyrator*

Questo è un circuito che permette di cambiare il segno di un'impedenza: il circuito nella figura a sinistra si comporta come il circuito nella figura a destra



infatti la corrente totale nell'ingresso invertente deve essere

$$I + \frac{V_{out} - V_{in}}{R} = 0 \quad (10.34)$$

dove V_{in} è la tensione all'ingresso dell'OP-AMP (la stessa sui due ingressi a causa della retroazione). Inoltre

$$V_{in} = \frac{Z}{R+Z} V_{out}; \quad V_{out} = \frac{R+Z}{Z} V_{in} \quad (10.35)$$

e quindi

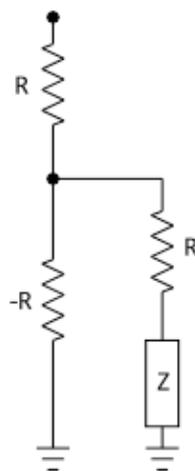
$$V_{out} - V_{in} = \frac{R+Z}{Z} V_{in} - V_{in} = \frac{R}{Z} V_{in} \quad (10.36)$$

$$I = -\frac{1}{Z} V_{in}; \quad V_{in} = -ZI$$

Dall'ultima equazione si vede che nella relazione tra corrente e tensione all'ingresso del gyrator compare l'impedenza $-Z$.

- Induttanza simulata

Utilizzando il gyrator si può “simulare” un'induttanza; si consideri la rete di resistenze e induttanze mostrata in figura



è una rete un po' strana perché contiene una resistenza negativa, ma abbiamo appena visto come si funziona il gyrator, e sappiamo di poterla realizzare. L'impedenza totale si trova facilmente:

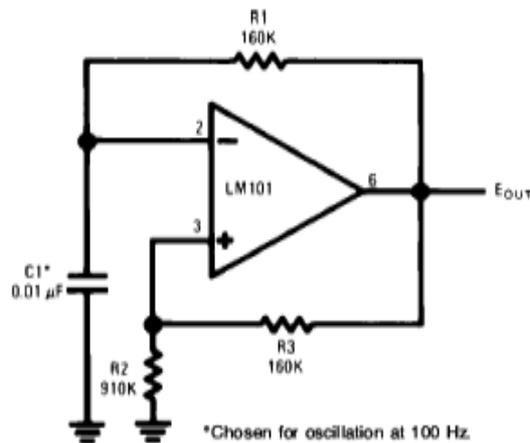
$$Z_{eq} = R + \frac{-R(R+Z)}{-R+R+Z} = R - \frac{R(R+Z)}{Z} = \frac{RZ - RZ - R^2}{Z} = -\frac{R^2}{Z} \quad (10.36)$$

Utilizzando un altro gyrator per cambiare segno a questa impedenza e prendendo come impedenza nel circuito una capacità abbiamo

$$Z = \frac{1}{i\omega C}; \quad Z_{eq} = \frac{R^2}{Z} = i\omega CR^2 \quad (10.37)$$

e quindi l'impedenza equivalente si comporta come un'induttanza.

- *Multivibratore astabile (oscillatore a rilassamento)*



In questo caso non si utilizza la retroazione, ma piuttosto il guadagno estremamente elevato dell'amplificatore operazionale. L'oscillatore mostrato in figura richiede doppia alimentazione.

Supponiamo che all'istante dell'accensione il condensatore sia scarico e che la tensione di uscita sia vicina a 0 V ma positiva. Allora l'amplificatore vede una tensione positiva all'ingresso positivo e una tensione un po' inferiore all'ingresso negativo: a causa dell'altissimo guadagno la tensione di uscita è positiva ed inoltre l'amplificatore va in saturazione, la tensione di uscita è uguale alla tensione di alimentazione positiva $+V_{CC}$. Il condensatore si carica attraverso la resistenza R1 fino a raggiungere il valore $V_+ = \frac{R_2}{R_2 + R_3} V_{CC}$: a questo punto gli ingressi hanno

la stessa tensione, e la tensione d'uscita dell'amplificatore va a 0 V. Quando questo accade, la tensione dell'ingresso negativo diventa più alta della tensione dell'ingresso positivo, l'uscita dell'amplificatore va in saturazione e raggiunge il valore di alimentazione negativa $-V_{CC}$. Il condensatore si scarica allora attraverso la resistenza R1, con una costante di tempo $\tau = R_1 C_1$ (che nel caso mostrato in figura vale 0.0016 s), fino a raggiungere la tensione $V_- = -\frac{R_2}{R_2 + R_3} V_{CC}$, e a questo punto riparte il ciclo di carica. La scarica del condensatore

è descritta dalla funzione

$$V_C(t) = -V_{CC} + (V_+ + V_{CC})e^{-t/\tau} = -V_{CC} + V_{CC} \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} + 1 \right) e^{-t/\tau} \quad (10.38)$$

e il valore $V_- = -\frac{R_2}{R_2 + R_3} V_{CC}$ viene raggiunto al tempo t_C che soddisfa l'equazione

$$V_C(t_C) = -\frac{R_2}{R_2 + R_3} V_{CC} = -V_{CC} + V_{CC} \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} + 1 \right) e^{-t_C/\tau} \quad (10.39)$$

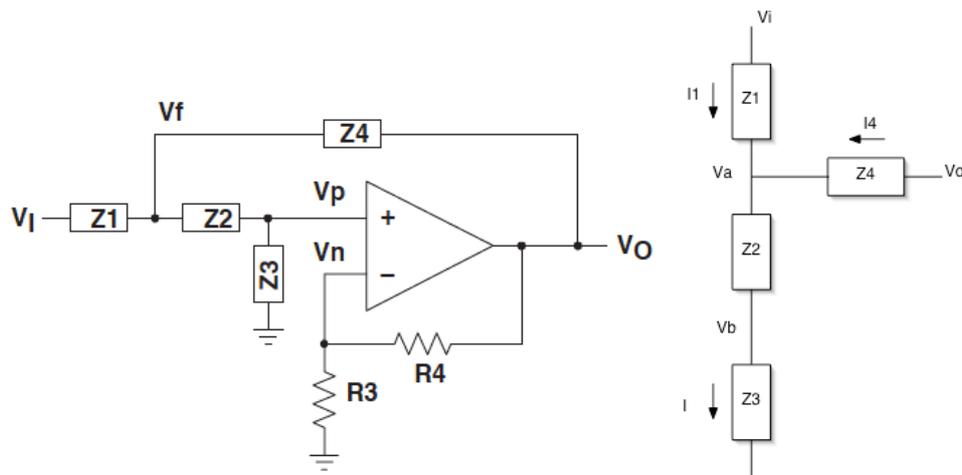
quindi il periodo dell'oscillatore si trova risolvendo l'equazione

$$\begin{aligned} -\frac{R_2}{R_2 + R_3} &= -1 + \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} + 1 \right) e^{-t_C/\tau} \\ \frac{R_3}{R_2 + R_3} &= \frac{2R_2 + R_3}{R_2 + R_3} e^{-t_C/\tau} \\ \frac{R_3}{2R_2 + R_3} &= e^{-t_C/\tau} \\ t_C &= \tau \ln \frac{2R_2 + R_3}{R_3} \\ T = 2t_C &= 2\tau \ln \frac{2R_2 + R_3}{R_3} = 2R_1 C_1 \ln \frac{2R_2 + R_3}{R_3} \end{aligned} \quad (10.40)$$

e il multivibratore produce un'onda quadra simmetrica rispetto allo 0, con periodo T . Nel caso mostrato in figura il periodo è di circa 8ms e la frequenza è di 124 Hz.

- *filtri attivi (configurazione di Sallen-Key)*

Consideriamo il circuito mostrato nella figura seguente, a sinistra:



la rete di impedenze si può mettere nella forma mostrata nella parte destra della figura, dove la tensione

$V_b = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_o$ è determinata dalla tensione di uscita e dalla rete di feedback.

Si vede immediatamente che si possono scrivere le equazioni:

$$I_1 = \frac{V_i - V_a}{Z_1}; \quad I_4 = \frac{V_o - V_a}{Z_4}; \quad I = I_1 + I_4; \quad I = \frac{V_a}{Z_2 + Z_3};$$

$$V_b = Z_3 I = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} V_a = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_o$$
(10.41)

quindi

$$\frac{V_a}{Z_2 + Z_3} = \frac{V_i - V_a}{Z_1} + \frac{V_o - V_a}{Z_4}$$

$$\left(\frac{1}{Z_2 + Z_3} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_4} \right) V_a = \frac{V_i}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_4}$$

$$\left(\frac{1}{Z_2 + Z_3} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_4} \right) \cdot \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_o = \frac{V_i}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_4}$$

$$\frac{1}{Z_3} \left(1 + \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1} + \frac{Z_2 + Z_3}{Z_4} \right) V_o = K \left(\frac{V_i}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_4} \right)$$
(10.42)

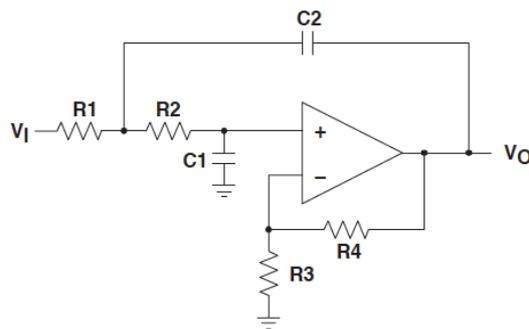
dove $K = \frac{R_3 + R_4}{R_3}$. Dall'ultima relazione si trova

$$\frac{1}{Z_3 Z_4} (Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 - K Z_1 Z_3) V_o = K V_i$$
(10.43)

e infine si trova la funzione di trasferimento del filtro

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{K}{1 + \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + (1 - K) \frac{Z_1}{Z_4}}$$
(10.44)

Utilizzando questa formula si possono calcolare immediatamente molte strutture che equivalgono a filtri del secondo ordine (a due poli). Si consideri per esempio il circuito seguente:



utilizzando la formula generale della funzione di trasferimento di un filtro di Sallen-Key, si trova:

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_i} &= \frac{K}{1 + i\omega R_1 C_1 + i\omega R_2 C_1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + (1-K)i\omega R_1 C_2} \\ &= \frac{K}{1 + i\omega(R_1 C_1 + R_2 C_1 + (1-K)R_1 C_2) - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \end{aligned} \quad (10.45)$$

Questa forma della funzione di trasferimento può venire confrontata con la forma della funzione di trasferimento standard dei filtri a due poli:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{G\Gamma\omega_0}{\omega_0^2 + i\Gamma\omega - \omega^2} = \frac{G\omega_0^2/Q}{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega^2} = \frac{G/Q}{1 + \frac{i\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (10.46)$$

da cui si trova

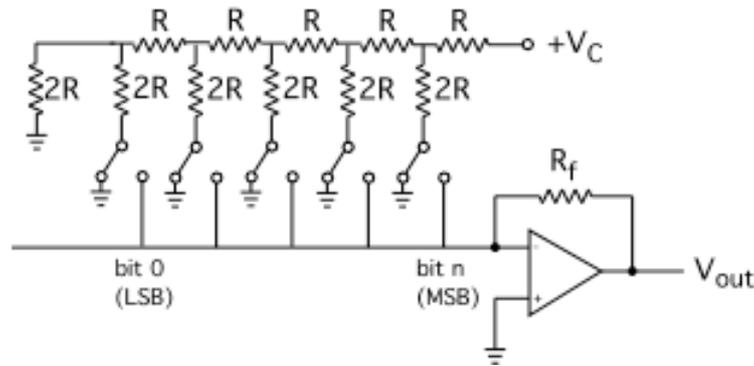
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}; \quad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + (1-K)R_1 C_2} \quad (10.47)$$

Esercizio: si spieghi il significato dei coefficienti che compaiono nell'espressione generica della funzione di trasferimento di un filtro del secondo ordine

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{G\Gamma\omega_0}{\omega_0^2 + i\Gamma\omega - \omega^2} = \frac{G\omega_0^2/Q}{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega^2} = \frac{G/Q}{1 + \frac{i\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

- la rete R-2R

La tipica rete R-2R utilizzata nei DAC è mostrata nella figura seguente:



gli interruttori che compaiono nel disegno sono degli interruttori analogici (potrebbero essere ad esempio dei FET che vengono messi in conduzione o vengono interdetti dalla presenza del bit corrispondente in ingresso). Poiché l'ingresso dell'amplificatore operazionale è una massa virtuale, allora dal punto di vista della distribuzione di corrente nella rete di resistenze non cambia nulla se si modifica la posizione di uno degli interruttori analogici, cambia solo il cammino della corrente (va a massa o a massa virtuale).

La resistenza combinata (in parallelo) delle due resistenze a sinistra (segnate in grassetto nella figura seguente) è evidentemente R , e quindi la resistenza combinata delle tre ultime resistenze è $2R$: questo ragionamento può essere ripetuto ad ogni nodo della catena di resistenze che porta alla tensione di alimentazione V_C , e ad ogni nodo la corrente si ripartisce equamente lungo i due rami.

Così, se si indica con I la corrente che proviene dall'alimentatore, allora la corrente che arriva al contatto del bit più significativo è $I/2$, e questa procede all'amplificatore operazionale se questo è connesso. Al bit successivo arriva la corrente $I/4$, e così via.

Oltre a produrre la massa virtuale, l'OP-AMP somma le correnti, e le traduce in una tensione di uscita.

Si noti che $I = \frac{V_C}{2R}$, e quindi la corrente dovuta al bit più significativo produce la tensione di uscita

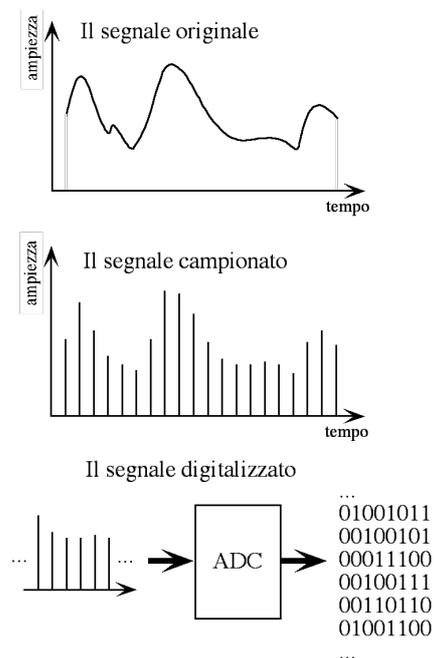
$$V_{out}(MSB) = -R_f I_{MSB} = -R_f \frac{V_C}{4R} \quad (10.48)$$

11. Strumentazione di base.

In questo capitolo vengono descritti brevemente gli strumenti più utilizzati per l'acquisizione e l'analisi dei segnali. In particolare viene descritta la classe di digitalizzatori più utilizzata (gli ADC) e quindi gli oscilloscopi digitali, gli analizzatori di spettro e gli amplificatori lock-in.

11.1 Gli ADC.

In molte applicazioni il segnale originale prodotto da un trasduttore (che può essere un microfono, un fotodiode, una termocoppia, ecc.) viene campionato: questo significa che un circuito elettrico osserva l'ampiezza del segnale solo in certi istanti di tempo. Ciascuno di questi campioni viene passato ad un circuito specializzato, il convertitore analogico-digitale (o ADC dall'inglese Analog to Digital Converter), e ciascun campione viene trasformato in un numero binario, cioè in una sequenza di livelli di tensione alti o bassi che rappresentano le cifre binarie 0 e 1. In questa conversione viene sacrificato qualche cosa, ad esempio se un ADC accetta in ingresso dei segnali compresi tra 0 Volt e 10 Volt e li codifica con numeri binari di 3 bit, allora è possibile rappresentare solo 8 livelli diversi, spaziatosi fra loro di 1.25 Volt, e per esempio una tensione di 1.5 Volt in ingresso è indistinguibile da una tensione di 2 Volt: entrambe danno in uscita il numero binario 001. Questa discretizzazione del segnale può però essere facilmente migliorata utilizzando un ADC con un maggior numero di bit, e non rappresenta un problema per la maggior parte delle applicazioni.



Schematizzazione del meccanismo di digitalizzazione di un segnale.

La digitalizzazione dei singoli campioni può avvenire in molti modi diversi: le architetture più importanti dei moderni ADC sono descritte negli articoli allegati in appendice a questo capitolo.

11.2 Il range dinamico.

Quando si campiona un segnale per mezzo di un ADC si introduce un rumore aggiuntivo, il cosiddetto rumore di quantizzazione, che non è associato ad alcun processo fisico specifico, ma proviene dal fatto che l'ADC ha una precisione finita. Ad esempio, un ADC a 10 bit che campiona una tensione di ingresso compresa tra 0 V e 10 V suddivide l'intervallo di tensione 0 V - 10 V in 1024 sottointervalli, ciascuno di circa 9.77 mV. La tabella seguente mostra la tensione massima associata ad un certo codice di uscita di un ADC a 10 bit

tensione massima (V)	codice
0.00488281	0000000000
0.0146484	0000000001
0.0244141	0000000010
0.0341797	0000000011
0.0439453	0000000100
0.0537109	0000000101
0.0634766	0000000110
0.0732422	0000000111
0.0830078	0000001000
0.0927734	0000001001
...	...

Come si vede, se la tensione è compresa tra 0.0341797 V e 0.0439453 V il codice di uscita è 0000000100, e questo significa che per quel che ne sappiamo la tensione è equidistribuita tra i due valori limite. Ricordiamoci ora che la deviazione standard di una distribuzione uniforme compresa tra i valori a e b è³ $(b-a)/\sqrt{12}$, e quindi l'effetto della quantizzazione è quello di introdurre un rumore bianco (perché campioni successivi sono scorrelati tra loro) con una deviazione standard

$$\sigma_Q = \frac{2^{-M} \Delta V}{\sqrt{12}} \quad (11.1)$$

dove ΔV è l'intervallo di tensione dell'ADC a M bit. Per un segnale sinusoidale che copre l'intero intervallo di quantizzazione dell'ADC

$$\frac{\Delta V}{2} \sin \omega t \quad (11.2)$$

la potenza media è

³Questo si vede facilmente notando che il valore medio è semplicemente $(b+a)/2$, e quindi la varianza è

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) - \frac{1}{4}(b^2 + 2ab + a^2) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

$$\frac{(\Delta V/2)^2}{2} = \frac{\Delta V^2}{8} \quad (11.3)$$

Il rapporto tra potenza media del segnale sinusoidale e potenza media del rumore di quantizzazione è detta *range dinamica* (*dynamic range*), e dalle formule precedenti si vede che esso vale

$$\frac{\Delta V^2}{8} \bigg/ \frac{2^{-2M} \Delta V^2}{12} = 3 \cdot 2^{2M-1} \quad (11.4)$$

Normalmente si preferisce esprimere questo rapporto in dB:

$$DR = 10 \log_{10} (3 \cdot 2^{2M-1}) = 10 \log_{10} (3/2) + 20M \log_{10} 2 = 1.76 + 6.02M \quad (11.5)$$

Nel caso in cui il rumore di quantizzazione non sia il solo rumore presente, il range dinamico cambia:

$$\frac{\Delta V^2}{8} \bigg/ \left(\frac{2^{-2M} \Delta V^2}{12} + \sigma_{el}^2 \right) = \frac{1}{2 \cdot 2^{-2M} / 3 + 8 \sigma_{el}^2 / \Delta V^2} \quad (11.6)$$

dove σ_{el}^2 è il rumore dell'elettronica, ed esprimendolo in dB come prima si ottiene

$$DR = -10 \log_{10} (2 \cdot 2^{-2M} / 3 + 8 \sigma_{el}^2 / \Delta V^2) \quad (11.7)$$

Vediamo ora come si calcola il range dinamico di un analizzatore di spettro: poiché la varianza è equidistribuita sulle $N/2$ frequenze che costituiscono il periodogramma (il rumore di quantizzazione è bianco), allora la densità spettrale del rumore di quantizzazione è

$$\frac{\sigma_Q^2}{N/2} = \frac{2^{-2M} \Delta V^2}{6N} \quad (11.8)$$

Il rapporto tra potenza media del segnale sinusoidale e potenza media del rumore di quantizzazione è

$$\frac{\Delta V^2}{8} \bigg/ \frac{2^{-2M} \Delta V^2}{6N} = \frac{3}{4} \cdot 2^{2M} N \quad (11.9)$$

quindi passando ai dB:

$$DR = 10 \log_{10} \left(\frac{3}{4} \cdot 2^{2M} N \right) = 10 \log_{10} (3/4) + 20M \log_{10} 2 + 10 \log_{10} N \approx -1.25 + 6.02M + 10 \log_{10} N \quad (11.10)$$

e perciò il range dinamico cresce al crescere del numero di campioni presi per calcolare la FFT.

Se oltre al rumore di quantizzazione si considerano anche gli altri rumori invece della (11.9) bisogna prendere

$$\frac{\Delta V^2}{8} \bigg/ \left(\frac{2^{-2M} \Delta V^2}{6N} + \frac{\sigma_{el}^2}{N/2} \right) = \frac{1}{\frac{4 \cdot 2^{-2M}}{3N} + \frac{16\sigma_{el}^2}{N\Delta V^2}} \quad (11.11)$$

quindi passando ai dB:

$$DR = -10 \log_{10} \left(\frac{4 \cdot 2^{-2M}}{3N} + \frac{16\sigma_{el}^2}{N\Delta V^2} \right) \quad (11.12)$$

Si noti che se il "rumore elettrico" è bianco, e σ_0^2 è la sua varianza per unità di frequenza, allora si può introdurre direttamente anche una dipendenza dalla frequenza, perché $\sigma_{el}^2 = \sigma_0^2 B$ (B è la larghezza di banda), e quindi

$$DR = -10 \log_{10} \left(\frac{4 \cdot 2^{-2M}}{3N} + \frac{16\sigma_0^2 B}{N\Delta V^2} \right) \quad (11.13)$$

N dipende dalla larghezza di banda e dal tempo di acquisizione dati T : $N=2BT$ e quindi

$$DR = -10 \log_{10} \left(\frac{4 \cdot 2^{-2M}}{3N} + \frac{8\sigma_0^2}{T\Delta V^2} \right) \quad (11.14)$$

e il range dinamico aumenta in funzione di N , fintantoché si arriva al limite imposto dal secondo termine nell'equazione (11.14) (il secondo termine diminuisce solo aumentando il tempo di acquisizione)

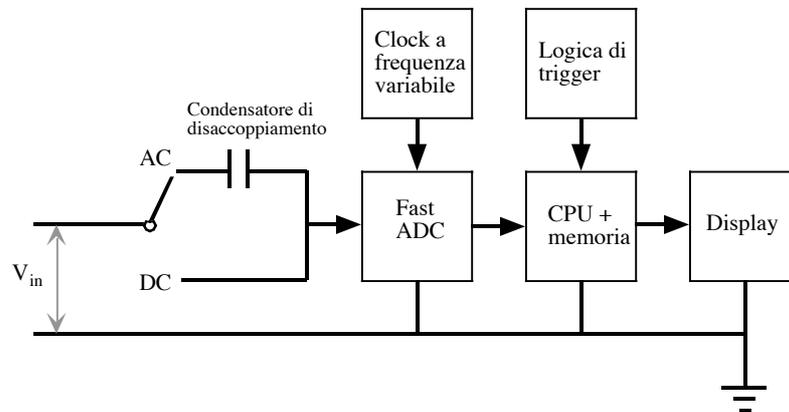
Esercizi:

1. si calcolino i range dinamici di ADC a 8, 10, 12, 16, 20 e 24 bit, assumendo che non ci sia altro che rumore di quantizzazione.
2. Si calcoli il range dinamico (11.13) in funzione di $\sigma_{el}^2 / \Delta V^2$ per un ADC a 10 bit, assumendo che questo parametro possa variare da 10^{-4} a 10^{-2} .

11.3 Gli oscilloscopi digitali

L'oscilloscopio digitale contiene un flash ADC che esegue il campionamento della tensione che è estremamente veloce (ci sono ADC veloci che hanno frequenze di campionamento dell'ordine di qualche decina di GHz), e inoltre i campioni così ottenuti non vengono mandati direttamente allo schermo ma vengono immagazzinati in una memoria; solo successivamente il contenuto della memoria viene mostrato sullo schermo dell'oscilloscopio (che può essere un tubo a raggi catodici come quello utilizzato dall'oscilloscopio analogico, o anche di altro tipo, per esempio a cristalli liquidi) in modo che diventa possibile catturare e poi mostrare forme d'onda che è impossibile visualizzare con un oscilloscopio analogico. Tipicamente gli ADC utilizzati negli oscilloscopi digitali sono degli ADC a 8 bit.

Il fatto che il segnale si trovi campionato e memorizzato in una memoria digitale permette molte elaborazioni successive sui dati raccolti: per esempio è possibile mantenere un singolo segnale campionato sul display, senza alcun problema di ripetitività; è possibile calcolare immediatamente il valore minimo, massimo e medio dei campioni raccolti, ed effettuare molte altre operazioni matematiche.

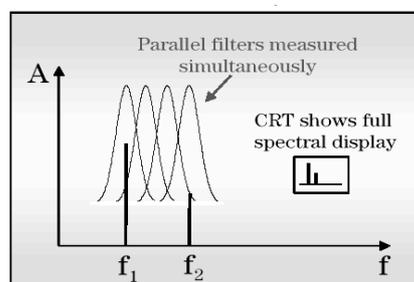


Le analisi che si possono fare sono però piuttosto limitate dal piccolo range dinamico dell'ADC dell'oscilloscopio.

11.4 Gli analizzatori di spettro.

Gli analizzatori di spettro sono degli strumenti in grado di analizzare un segnale e di mostrarne la densità spettrale su uno schermo, in tempo reale. Qui noi descriviamo i due tipi di analizzatori che attualmente sono maggiormente in uso: i Fourier analyzers e gli swept analyzers⁴.

I Fourier analyzers sono essenzialmente dei digitalizzatori che poi applicano una FFT al segnale campionato, e mostrano quindi il risultato sullo schermo. Naturalmente questo significa che possono lavorare solo a frequenze abbastanza basse (di solito non possono trattare segnali a frequenze superiori a 100 KHz alla data di queste dispense), perché il computer che calcola la FFT ha una velocità ed una memoria limitate (anche se elevate). L'azione di un analizzatore di questo tipo è equivalente all'applicazione simultanea di un gran numero⁵ di filtri passa-banda al segnale che si vuole analizzare.



HEWLETT
PACKARD

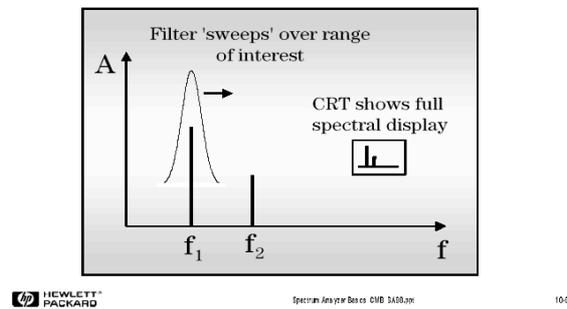
Spectrum Analyzer Basics GMB 0110.rpt

1008
7

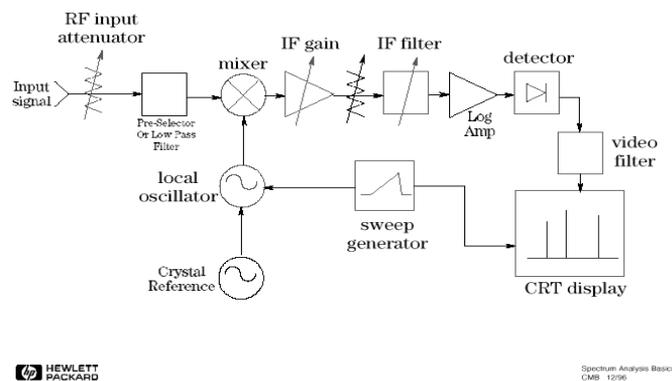
⁴Anche in questo caso viene utilizzata la terminologia inglese per compatibilità con la letteratura esistente. "to sweep" significa spazzare e gli swept analyzers sono quelli che "spazzano" lo spettro con una passata della loro elettronica.

⁵Di solito N=512 o N=1024.

La figura seguente mostra schematicamente l'azione di uno swept analyzer: un filtro passa-banda con una frequenza centrale variabile viene applicato successivamente ad un segnale ripetitivo, e l'ampiezza del segnale che riesce a superare il filtro viene mostrata su uno schermo⁶.



Quello che segue è lo schema funzionale di un analizzatore di spettro di questo tipo, che si comporta essenzialmente come un analizzatore lock-in in cui la frequenza dell'oscillatore possa venire variata con continuità (vedremo più avanti il funzionamento dell'amplificatore lock-in).



Vediamo ora come si calcola il range dinamico di un analizzatore di spettro: poiché la varianza è equidistribuita sulle $N/2$ frequenze che costituiscono il periodogramma (il rumore di quantizzazione è bianco), allora la densità spettrale del rumore di quantizzazione è

$$\frac{\sigma_Q^2}{N} = \frac{2^{-2M} \Delta V^2}{12N} \tag{11.15}$$

Il rapporto tra potenza media del segnale sinusoidale e potenza media del rumore di quantizzazione è

$$\frac{\Delta V^2}{8} \bigg/ \frac{2^{-2M} \Delta V^2}{12N} = 3 \cdot 2^{2M-1} N \tag{11.16}$$

quindi passando ai dB:

$$DR = 10 \log_{10} (3 \cdot 2^{2M-1} N) = 10 \log_{10} (3/2) + 20M \log_{10} 2 + 10 \log_{10} N = 1.76 + 6.02M + 10 \log_{10} N \tag{11.17}$$

⁶CRT sta per Cathode Ray Tube = Tubo a Raggi Catodici, ma il display potrebbe essere di altro tipo.

e perciò il range dinamico cresce al crescere del numero di campioni presi per calcolare la FFT.

Esercizi:

1. calcolare il range dinamico di un analizzatore di spettro che utilizza un ADC a 16 bit e che prende 1024 campioni per calcolare lo spettro del segnale, assumendo il solo rumore di quantizzazione.
2. si supponga che in aggiunta al rumore di quantizzazione ci sia anche un rumore bianco Gaussiano, che ha una varianza σ^2 . Come cambia il range dinamico dell'analizzatore?
3. Si supponga che la banda di frequenza dell'analizzatore sia B , e che il rumore bianco dell'esercizio precedente sia dovuto solo al contributo del rumore Johnson. Discutere la variazione del range dinamico in funzione della temperatura.

11.5 Gli amplificatori lock-in.

Consideriamo la solita espressione per la trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \quad (11.18)$$

e osserviamo che se si prende un segnale fisico, lo si moltiplica per un seno e un coseno e quindi si integra il risultato, si ottengono proprio la parte reale e la parte immaginaria della trasformata di Fourier. In realtà l'integrale non può mai essere esteso all'infinito, e ci si deve accontentare di qualcosa di meno, ovvero delle quantità

$$\begin{aligned} C &= A \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos(\omega t)dt \\ S &= A \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned} \quad (11.19)$$

dove A è una costante: c'è un tipo di strumento che misura esattamente queste quantità S e C , l'amplificatore lock-in. È chiaro che per tempi T abbastanza grandi, la densità spettrale del segnale in corrispondenza alla frequenza ω è proporzionale a S^2+C^2 , quindi l'amplificatore lock-in è uno strumento che complementa l'azione di un analizzatore di spettro nel senso che mentre l'analizzatore misura la densità spettrale del segnale per molte frequenze diverse ma con un'accuratezza che è limitata dal tempo di acquisizione e dal numero massimo di campioni che si possono acquisire, l'amplificatore lock-in misura la densità spettrale ad una sola frequenza, ma riesce a farlo con maggiore accuratezza perché è in grado di trattare un gran numero di campioni, ed inoltre riesce a farlo all'interno di una banda molto stretta perché può acquisire il segnale per tempi anche lunghi.

In pratica l'amplificatore lock-in si usa ogni volta che un segnale fisico viene modulato da un oscillatore accessibile allo sperimentatore. Questo stesso oscillatore viene utilizzato per generare i segnali sinusoidali che moltiplicano poi il segnale fisico. In tal modo si riesce ad acquisire il segnale in una banda di frequenza

estremamente stretta, il che significa che si possono misurare segnali molto piccoli – ma ben definiti in frequenza – su un fondo di rumore che può essere anche piuttosto elevato.

Supponiamo per esempio che il segnale da misurare sia di 10 microVolt, che la deviazione standard della tensione di rumore sia di 10 mV, che il rumore sia bianco e che la misura venga effettuata con una larghezza di banda di 100 MHz. Allora la densità di rumore è $10^{-2} V / \sqrt{100 MHz} = 1 \mu V / \sqrt{Hz}$; ciò significa che se il lock-in riesce a definire la banda di ingresso in modo che sia larga solo 1 Hz, allora il rumore in tensione in questa banda stretta ha una deviazione standard di 1 microVolt, cioè 10 volte meno del segnale, che risulta quindi facilmente misurabile.

A questo punto ci si potrebbe chiedere come faccia il lock-in a definire una certa larghezza di banda: torniamo dunque alle definizioni dei valori C ed S e notiamo che se prendiamo la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases} \quad (11.20)$$

allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} C &= A \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \cos(\omega t) dt \\ S &= A \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (11.21)$$

e questo è equivalente a valutare la trasformata di Fourier

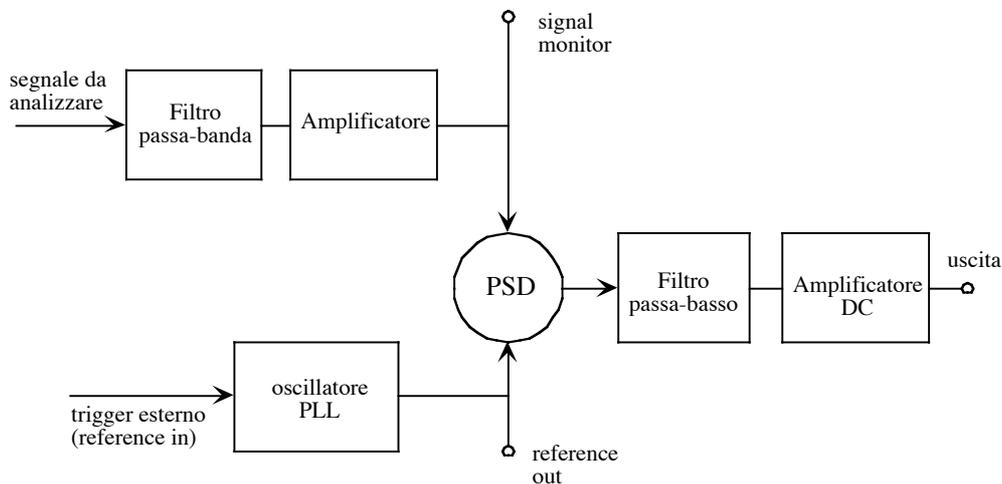
$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega'') e^{i\omega'' t} d\omega'' \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega'' G(\omega') F(\omega'') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega' + \omega'' - \omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' d\omega'' G(\omega') F(\omega'') \delta(\omega' + \omega'' - \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' G(\omega') F(\omega - \omega') \end{aligned} \quad (10.22)$$

(questo non è altro che il teorema di convoluzione – ancora una volta). Così, in realtà, il valore ottenuto sperimentalmente è una convoluzione, cioè una sovrapposizione di valori adiacenti, della trasformata di Fourier voluta. Inoltre la trasformata di Fourier G si calcola facilmente:

$$G(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}) = T \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} = T \text{sinc}(\omega T / 2) \quad (10.23)$$

La funzione sinc ha i suoi primi due zeri accanto al picco centrale in corrispondenza ai valori $\omega T / 2 = \pm\pi$, quindi in corrispondenza alle frequenze $\pm 1/T$, perciò il picco centrale ha una larghezza dell'ordine di $1/T$: il tempo totale di misura determina perciò in modo ovvio la larghezza di banda della misura.

Lo schema di principio di un amplificatore lock-in è mostrato nella figura seguente



Il segnale da analizzare viene mandato anzitutto ad un filtro passa-banda largo in modo da eliminare possibili problemi di aliasing e da eliminare almeno in parte il rumore, e quindi ad un amplificatore per aumentare l'ampiezza del segnale che normalmente è molto piccola. Questo stadio di ingresso riesce a sopportare un rapporto massimo tra la potenza del rumore e quella del segnale, rapporto che viene detto *riserva dinamica* dell'amplificatore lock-in, e di solito viene espresso in dB.

Allo stesso tempo viene tenuto sotto controllo il segnale dell'oscillatore che modula l'effetto fisico e quindi il segnale da analizzare, e questo segnale dell'oscillatore viene inseguito da un oscillatore PLL all'interno del lock-in. Il segnale amplificato e l'uscita dell'oscillatore PLL vengono mandati ad un moltiplicatore (qui indicato con la sigla PSD = Phase Sensitive Detector). Il filtro passa basso è equivalente all'operazione di integrazione. Infine l'amplificatore DC aumenta l'ampiezza del valore ottenuto dopo l'integrazione con il filtro passa basso.

Queste operazioni possono essere fatte in modo analogico, oppure anche in modo digitale. I lock-in digitali erano inizialmente svantaggiati rispetto a quelli analogici, ma ormai dominano il mercato.

La figura qui sotto mostra un lock-in analogico, una volta prodotto dalla EG&G (ora dalla AMETEK che ha assorbito la EG&G):



L'amplificatore lock-in 5110A della EG&G

La tabella di dati che segue dà le specifiche tecniche di questo amplificatore lock-in:

Input			
	Mode	Voltage Current	Single-ended or true differential Virtual ground
	Sensitivity	Voltage Current	10 nV to 1 V (with output expand) 10^{-6} A/V and 10^{-8} A/V conversion
	Impedance	Voltage Current	100 M Ω // 25 pF 25 Ω (10^{-6} A/V)
	Noise	Voltage Current	5.5 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ at 1 kHz 16 fA/ $\sqrt{\text{Hz}}$ (10^{-8} A/V) at 1 kHz
	C.M.R.R.		100 dB at 1 kHz 0.5 Hz to 100 kHz
Frequency Response			
	Dynamic Reserve		105 dB (max)
Output			
	Modes	5109 5110A	X (%), X (V), Noise X,Y, (%): X,Y, (V): R, θ , Noise
	Time constant		< 20 μs , 1 ms to 300 s (1-3-10 sequence)
	Roll-off		6 or 12 dB/octave
	Voltage		1.0 V FS
	Impedance		1 k Ω
	Oscillator	Voltage	0 to 2 V rms (1 mV steps) 0 to 5 V rms (software only)
		Frequency	0.5 Hz to 100 kHz
		Impedance	450 Ω

Esercizio: si utilizzi la descrizione dell'amplificatore lock-in per spiegare il funzionamento dello swept analyzer.

Appendice A: Trasformate di Fourier di funzioni con particolare simmetria.

1. Trasformata di una funzione reale

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt = F(-\omega) \quad (\text{A.1})$$

in particolare questo significa che

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)| \quad (\text{A.2})$$

e quindi $|F(\omega)|$ è una funzione pari, e inoltre

$$\arg F(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im } F(\omega)}{\text{Re } F(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{\text{Im } F^*(\omega)}{\text{Re } F^*(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{\text{Im } F(-\omega)}{\text{Re } F(-\omega)}\right) = -\arg F(-\omega) \quad (\text{A.3})$$

e quindi la fase della trasformata è una funzione dispari.

2. Trasformata di una funzione puramente immaginaria

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-f(t))e^{i\omega t} dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt = -F(-\omega) \quad (\text{A.4})$$

in particolare questo significa che anche in questo caso

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)| \quad (\text{A.5})$$

e quindi $|F(\omega)|$ è una funzione pari, e inoltre

$$\arg F(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im } F(\omega)}{\text{Re } F(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{\text{Im } F^*(\omega)}{\text{Re } F^*(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{\text{Im } F(-\omega)}{\text{Re } F(-\omega)}\right) = -\arg F(-\omega) \quad (\text{A.6})$$

e quindi anche in questo caso la fase della trasformata è una funzione dispari.

3. Trasformata di una funzione reale pari

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt = F(-\omega) = F^*(\omega) \quad (\text{A.7})$$

quindi la trasformata di Fourier di una funzione reale pari è puramente reale.

4. Trasformata di una funzione reale dispari

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t} dt = -F(-\omega) = -F^*(\omega) \quad (\text{A.8})$$

quindi la trasformata di Fourier di una funzione reale dispari è puramente immaginaria.

Appendice B: la distribuzione di Poisson.

La distribuzione di Poisson si può derivare in diversi modi. Qui noi scegliamo un metodo di derivazione che ci permette di capire un'importante caratteristica di questa distribuzione. Assumiamo dunque che la probabilità di osservare un evento nell'intervallo di tempo compreso tra t e $t+dt$ sia adt : questa probabilità non dipende da t e questo significa che non viene influenzata dalla storia precedente del processo casuale, e gli eventi sono indipendenti tra loro.

Chiediamoci ora quale sia la probabilità di non osservare alcun evento nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e $t+dt$. Se denotiamo questa probabilità con il simbolo $P_0(t+dt)$ allora possiamo scrivere

$$P_0(t + dt) = P_0(t)(1 - adt) \quad (\text{B.1})$$

perchè la probabilità di non osservare alcun evento nell'intervallo di tempo $(0,t+dt)$ è uguale alla probabilità di non osservare alcun evento nell'intervallo $(0,t)$ E di non osservarne nessuno nell'intervallo $(t,t+dt)$. L'equazione (B.1) può essere riscritta nella forma di un'equazione differenziale:

$$dP_0 = -aP_0(t)dt \quad (\text{B.2})$$

così

$$P_0(t) = P_0(0)e^{-at} \quad (\text{B.3})$$

d'altra parte $P_0(0) = 1$, quindi

$$P_0(t) = e^{-at} \quad (\text{B.4})$$

Adesso calcoliamo la probabilità di osservare esattamente un evento nello stesso intervallo di tempo: questa la possiamo scrivere anche come la probabilità di osservare esattamente un evento nell'intervallo $(0,t)$ E di non osservarne nessuno nell'intervallo $(t,t+dt)$ più la probabilità di non osservare alcun evento nell'intervallo $(0,t)$ E di osservarne esattamente uno nell'intervallo $(t,t+dt)$, cioè

$$P_1(t + dt) = P_1(t)(1 - adt) + P_0(t)adt = P_1(t)(1 - adt) + e^{-at}adt \quad (\text{B.5})$$

Anche questa può essere messa nella forma di un'equazione differenziale:

$$\frac{dP_1}{dt} + aP_1(t) = ae^{-at} \quad (\text{B.6})$$

oppure nella forma alternativa

$$e^{-at} \frac{d}{dt} (e^{at} P_1(t)) = ae^{-at} \quad (\text{B.7})$$

e questa è un'equazione differenziale lineare di primo ordine non omogenea. Nella forma (B.7) l'equazione può venire integrata immediatamente, e si ottiene

$$e^{at} P_1(t) = at + C \quad (\text{B.8})$$

Il valore della costante C si trova notando che $P_1(0) = 0$, e quindi $C = 0$ e

$$P_1(t) = ate^{-at} \quad (\text{B.9})$$

Gli stessi ragionamenti si possono ripetere nel caso di N eventi, e si ottiene

$$P_N(t + dt) = P_N(t)(1 - a dt) + P_{N-1}(t) a dt \quad (\text{B.10})$$

e

$$\frac{dP_N}{dt} + aP_N(t) = e^{-at} \frac{d}{dt} (e^{at} P_N(t)) = aP_{N-1}(t) \quad (\text{B.11})$$

A partire da questa è facile dimostrare per induzione che la soluzione deve essere

$$P_N(t) = \frac{(at)^N}{N!} e^{-at} \quad (\text{B.12})$$

e questa distribuzione di probabilità è la distribuzione di Poisson.

Si trova immediatamente che la distribuzione (B.12) è correttamente normalizzata, infatti

$$\sum_{N=0}^{\infty} P_N(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(at)^N}{N!} e^{-at} = e^{-at} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(at)^N}{N!} = e^{-at} e^{at} = 1 \quad (\text{B.13})$$

Il valore medio è

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N P_N(t) = \sum_{N=0}^{\infty} N \frac{(at)^N}{N!} e^{-at} = e^{-at} at \frac{d}{d(at)} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(at)^N}{N!} = e^{-at} at \frac{d}{d(at)} e^{at} = at \quad (\text{B.14})$$

Il valore quadratico medio è

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 P_N(t) = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 \frac{(at)^N}{N!} e^{-at} = e^{-at} at \frac{d}{d(at)} \sum_{N=0}^{\infty} N \frac{(at)^N}{N!} = e^{-at} at \frac{d}{d(at)} at \frac{d}{d(at)} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(at)^N}{N!} \\ &= e^{-at} at \frac{d}{d(at)} at \frac{d}{d(at)} e^{at} = e^{-at} at \frac{d}{d(at)} (ate^{at}) = e^{-at} at (ate^{at} + e^{at}) \\ &= (at)^2 + at \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ed infine la varianza è

$$\text{Var}(N) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = at \quad (\text{B.16})$$

Chiediamoci ora quanto tempo si deve attendere in media prima che abbia luogo un evento: chiaramente la probabilità che ci non ci sia alcun evento nell'intervallo di tempo $(0, t)$ e che ce ne sia esattamente uno nell'intervallo $(t, t+dt)$ è

$$dp(t) = P_0(t)adt = ae^{-at} dt \quad (\text{B.17})$$

questa densità di probabilità è detta *distribuzione degli intervalli*.

Esercizi:

1. si completi il passo di induzione che porta alla distribuzione (C.11).
2. Si calcolino il terzo e il quarto momento della distribuzione di Poisson: $\langle N^3 \rangle$ e $\langle N^4 \rangle$.
3. Si utilizzi la distribuzione degli intervalli per calcolare quanto tempo si debba attendere in media perché si verifichi un evento, e la deviazione standard attorno a questo valore medio.

Appendice C: modello della conduzione nei metalli di Drude e Lorentz.

Supponiamo che gli elettroni di conduzione in un metallo si comportino approssimativamente come un gas di elettroni liberi: questo vuol dire che si assume che gli elettroni non interagiscono tra loro e hanno come unico vincolo quello di essere "contenuti" dentro il metallo. Supponiamo che le collisioni tra gli elettroni ed le imperfezioni del reticolo cristallino siano indipendenti una dall'altra, e che il tempo medio tra le collisioni sia τ .

Consideriamo questo gas classico di elettroni quasi liberi all'interno del conduttore metallico: dal principio di equipartizione dell'energia sappiamo che la loro energia cinetica media deve essere

$$\text{energia cinetica media} = \frac{1}{2} m \langle v_i^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (\text{C.1})$$

dove m è la massa dell'elettrone, k è la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta e $\langle v_i^2 \rangle$ è il valore medio del quadrato della velocità del moto termico (completamente casuale). Da questa espressione troviamo la velocità quadratica media

$$\langle v_i^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \quad (\text{C.2})$$

si noti che a temperatura ambiente ($T = 300 \text{ °K}$) $\langle v_i^2 \rangle^{1/2} \approx 1.2 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$.

Se applichiamo una differenza di potenziale V ai capi di un conduttore di lunghezza L , allora c'è un campo elettrico $E=V/L$ (E = modulo del campo elettrico), e se indichiamo con q la carica elettronica, allora su ciascun elettrone agisce una forza (in modulo)

$$F = qE = \frac{qV}{L} \quad (\text{C.3})$$

a cui corrisponde un'accelerazione

$$a = \frac{qV}{mL} \quad (\text{C.4})$$

e una variazione di velocità (nella direzione del filo conduttore) $\Delta v(t) = at$. La variazione media di velocità si ottiene utilizzando la distribuzione degli intervalli:

$$\langle \Delta v \rangle = \int_0^{\infty} \Delta v(t) e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau} = \int_0^{\infty} a t e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau} = a\tau \quad (\text{C.5})$$

Questa variazione media della velocità nella direzione del filo conduttore corrisponde ad un moto sistematico che sposta gli elettroni da una parte all'altra del filo: possiamo identificare questa velocità con la velocità di deriva e così possiamo scrivere

$$v = a\tau = \frac{qE\tau}{m} = \frac{qV\tau}{mL}. \quad (\text{C.6})$$

Se utilizziamo la densità elettronica n (= numero di elettroni per unità di volume) e introduciamo la densità di corrente $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$, allora la corrente I è il flusso di \mathbf{J} su una sezione del filo, cioè

$$I = \int_{\substack{\text{sezione} \\ \text{del filo}}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{C.7})$$

dove dS è un elemento di sezione e \mathbf{n} è la normale alla superficie, e inoltre

$$\mathbf{J} = \frac{nq^2\tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{C.8})$$

(la costante σ è detta *conduttività*).

Se \mathbf{J} è costante sulla sezione S del filo allora $I = S \cdot |\mathbf{J}|$ e

$$I = \frac{nq^2\tau}{m} \left(\frac{S}{L}\right) V = \sigma \left(\frac{S}{L}\right) V, \quad (\text{C.9})$$

le formule (C.8) e (C.9) sono due formulazioni della legge di Ohm.

Il tempo τ è legato al *cammino libero medio* ℓ :

$$\ell = \tau \cdot \langle v_t^2 \rangle^{1/2} \quad (\text{C.10})$$

che è la distanza media percorsa tra due collisioni. Infine possiamo riassumere i risultati del modello nelle formule

$$\begin{aligned} \tau &\approx \frac{\ell}{\langle v_t^2 \rangle^{1/2}}; \\ \sigma &= \frac{nq^2\tau}{m} \approx \frac{nq^2\ell}{m\langle v_t^2 \rangle^{1/2}} \\ \rho &= \frac{m}{nq^2\tau} \approx \frac{m\langle v_t^2 \rangle^{1/2}}{nq^2\ell} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$