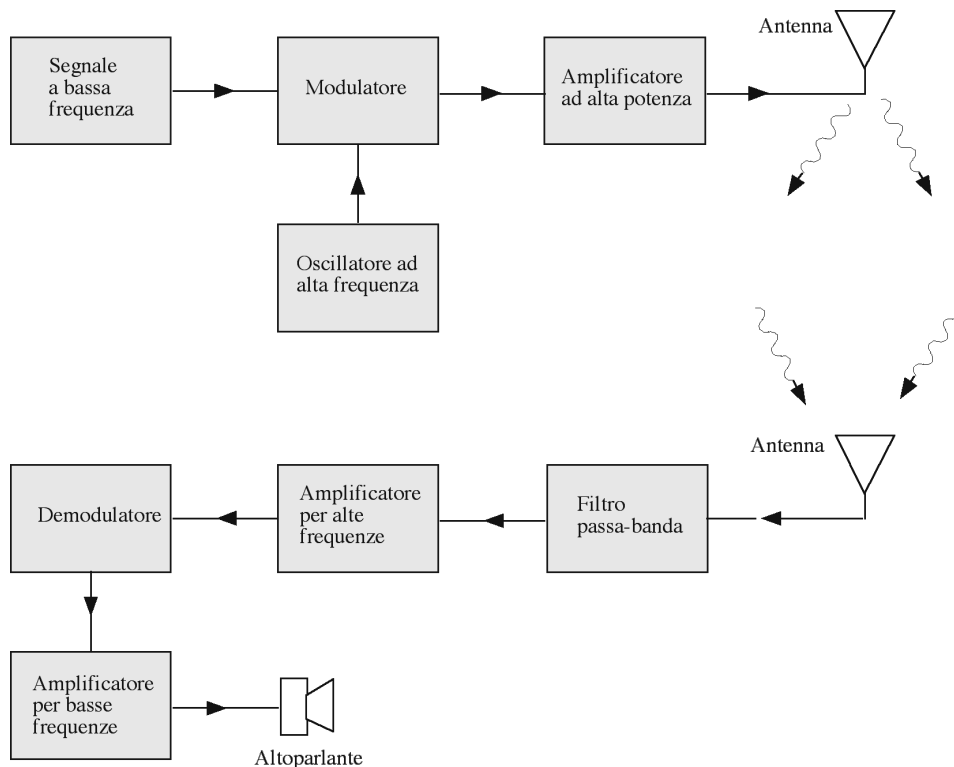


## 5. Metodi di codifica dell'informazione per la trasmissione dati.

Il metodo più comune per trasmettere informazione su un canale radio o un canale ottico consiste nell'assegnare una parte dello spettro a ciascuno dei trasmettitori. Ciascun trasmettitore codifica l'informazione e la trasmette lungo il canale; alla fine il segnale arriva al ricevitore che lo decodifica ed estrae l'informazione in esso contenuta. I metodi di codifica sono molti, e ora analizziamo il più semplice tra essi, il metodo di *modulazione di ampiezza*.

### 5.1 La modulazione di ampiezza (AM)

Lo schema completo di un sistema di trasmissione e di ricezione in *modulazione di ampiezza* (AM = Amplitude Modulation) è mostrato nella figura seguente



Vediamo ora come si può ottenere in pratica la modulazione della portante ad alta frequenza. A tale scopo consideriamo un sistema che non si usa più da moltissimo tempo, ma che serve ad illustrare efficacemente il ruolo della non-linearità dei componenti elettrici. Prendiamo un componente elettrico con una caratteristica tensione-corrente non lineare:

$$V = AI + BI^2 \tag{5.1}$$

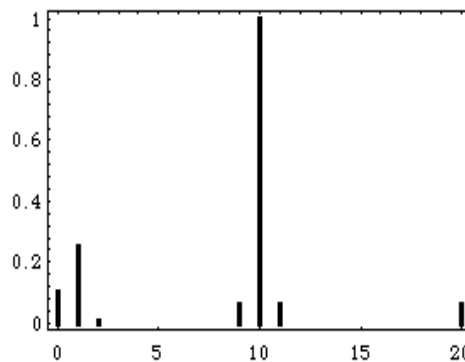
e supponiamo che la corrente sia data dalla somma della corrente prodotta dall'oscillatore ad alta frequenza e dalla sorgente a bassa frequenza:

$$I = I_C \cos \omega_C t + I_A \cos \omega_A t \quad (5.2)$$

(e questo lo si può fare mettendo in parallelo i due generatori di corrente). Allora

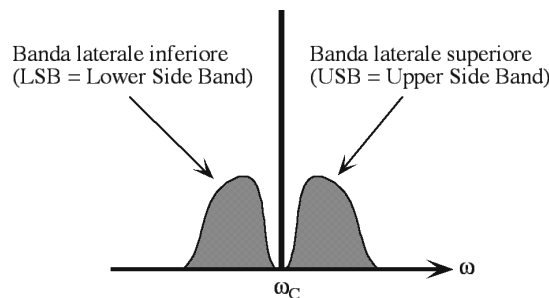
$$\begin{aligned} V &= A(I_C \cos \omega_C t + I_A \cos \omega_A t) + B(I_C \cos \omega_C t + I_A \cos \omega_A t)^2 \\ &= A(I_C \cos \omega_C t + I_A \cos \omega_A t) \\ &\quad + B(I_C^2 \cos^2 \omega_C t + I_A^2 \cos^2 \omega_A t + 2I_C I_A \cos \omega_C t \cos \omega_A t) \\ &= A(I_C \cos \omega_C t + I_A \cos \omega_A t) \\ &\quad + B\left(\frac{I_C^2}{2}(1 + \cos 2\omega_C t) + \frac{I_A^2}{2}(1 + \cos 2\omega_A t) + I_C I_A (\cos(\omega_C + \omega_A)t + \cos(\omega_C - \omega_A)t)\right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si vede che sono presenti altre componenti di Fourier oltre a quelle originali: la figura seguente mostra lo spettro di potenza di  $V$  calcolato con  $A = 1$ ,  $B = -0.5$ ,  $I_A = 0.5$ ,  $I_C = 1$ ,  $\omega_C/\omega_A = 10$  (tutte queste quantità sono date in unità arbitrarie, e la scala orizzontale è in unità di  $\omega_A$ ).



L'ampiezza delle componenti di Fourier a frequenza  $\omega_C \pm \omega_A$  è proporzionale alla corrente  $I_A$  e quindi contiene tutta l'informazione necessaria a ricostruire la forma del segnale originale a bassa frequenza.

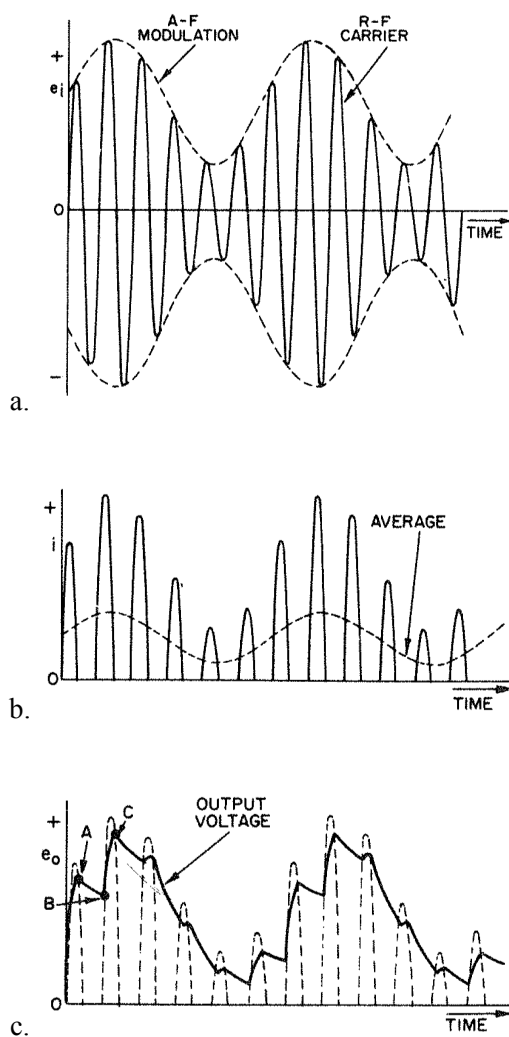
Nella realtà il segnale modulante è composto da diverse componenti di Fourier (ad esempio un segnale sonoro che rappresenta la voce umana), e nello spettro invece di due semplici righe spettrali, compaiono due bande laterali



Le due bande sono una l'immagine speculare dell'altra, ed è possibile trasmettere l'informazione utilizzando anche una sola delle bande (trasmissione in *banda laterale singola* o SSB = Single Side Band). Ci sono alcuni vantaggi

a trasmettere in SSB, ma i circuiti di demodulazione sono più complicati. Si noti ancora che prima di trasmettere il segnale modulato, lo si filtra con un filtro passa banda che trasmette solo la portante e le bande laterali. Infine, nei trasmettitori AM moderni non si usa certo un elemento non-lineare, ma piuttosto un moltiplicatore analogico, come quello che incontreremo più avanti nel capitolo sugli amplificatori operazionali.

Dopo che il segnale modulato arriva all'antenna ricevente lo si deve demodulare, ed un semplice metodo di demodulazione è mostrato nelle figure seguenti: a. al ricevitore arriva l'informazione codificata per mezzo della modulazione in ampiezza di un *onda portante* ad alta frequenza; b. il segnale viene rettificato con un diodo, e il valore medio dell'onda non è più nullo; c. il segnale viene filtrato con un filtro passa-basso, vengono eliminate le componenti ad alta frequenza e resta solo la parte modulante a bassa frequenza.

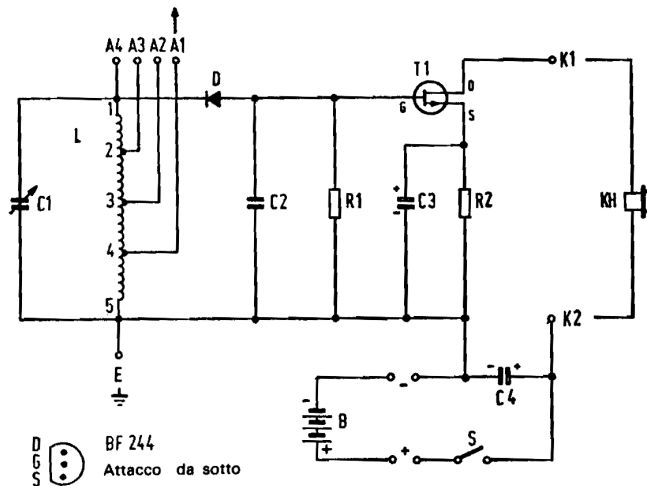


(per illustrare adeguatamente il processo di demodulazione le figure utilizzano un rapporto piccolo tra frequenza della portante e frequenza del segnale modulante; per questo motivo nella parte c. il filtraggio risulta chiaramente insufficiente a recuperare in modo preciso la forma del segnale modulante. Nella realtà la frequenza della

modulante è molto inferiore a quella della portante, e quindi il ripple residuo – in questo caso presente in c. – non compare).

### 5.2 Esempio: un radioricevitore in AM con un FET

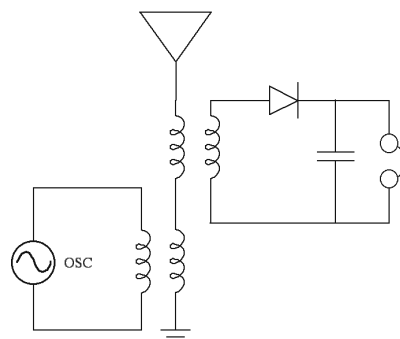
Lo schema elettrico che segue mostra un piccolo ricevitore in AM che contiene tutte le parti fondamentali di una radio AM



*Esercizio:* identificare le varie parti di questo ricevitore con i blocchi indicati nello schema all'inizio di questa sezione.

### 5.3 Demodulazione eterodina

Nei circuiti dei ricevitori considerati finora la demodulazione avviene sempre grazie ad un filtro e ad un elemento non-lineare. È possibile però eliminare il filtro utilizzando uno schema del tipo mostrato in figura:



L'oscillatore locale OSC produce un segnale sinusoidale che viene miscelato al segnale proveniente dall'antenna. Il segnale composto viene mandato ad un componente non lineare (un diodo in questo caso) in cui ha luogo la demodulazione.

*Esercizio:* spiegare matematicamente come avviene la demodulazione eterodina. A cosa serve il condensatore dopo il diodo?

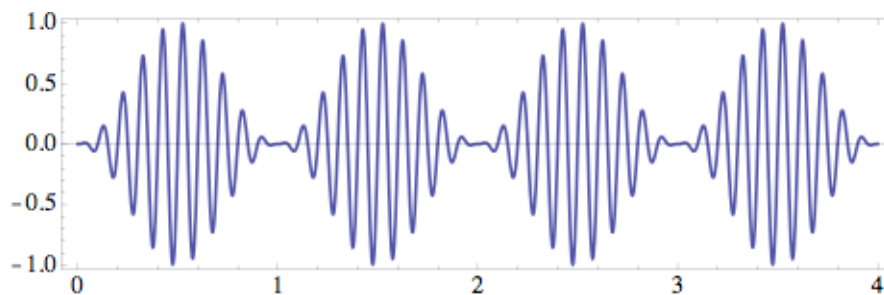
#### 5.4 Altri tipi di modulazione

Se consideriamo la forma generale di un segnale di tipo sinusoidale

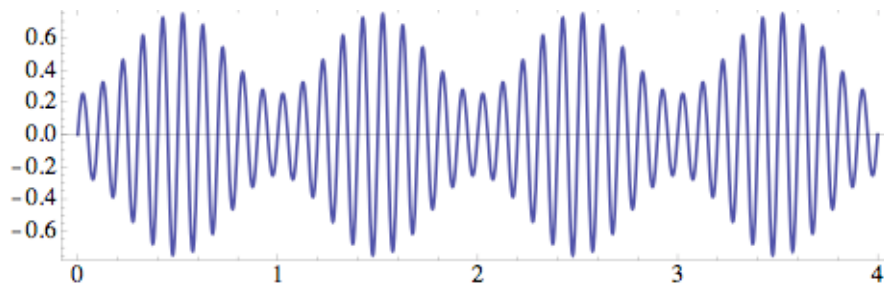
$$A \cos(\omega t + \varphi) \tag{5.4}$$

ci accorgiamo che oltre all'ampiezza si possono modulare anche fase e frequenza del segnale. In effetti esistono sia la codifica con modulazione di fase e con modulazione di frequenza, e tra le due è quest'ultima ad essere la più comune.

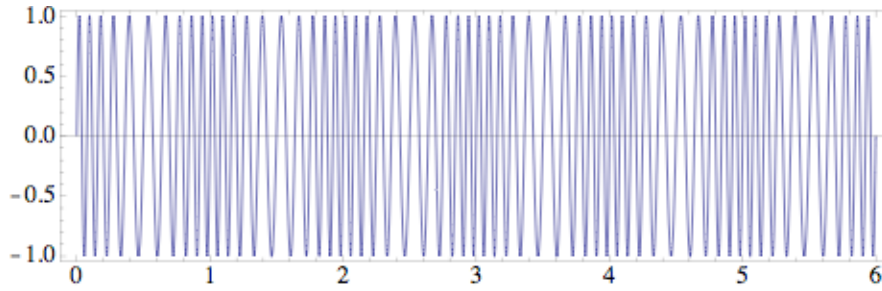
Le figure seguenti illustrano la differenza tra segnali modulati in ampiezza ed uno modulato in frequenza (tempo e ampiezza sono in unità arbitrarie)



Segnale modulato in ampiezza: in questo caso il rapporto tra frequenza della portante e della modulazione vale 10, e l'indice di modulazione vale 1.



Segnale modulato in ampiezza: in questo caso il rapporto tra frequenza della portante e della modulazione vale 10, e l'indice di modulazione vale 0.5.



Segnale modulato in frequenza: in questo caso il rapporto tra frequenza della portante e della modulazione vale 10, e l'indice di modulazione vale 0.005.

La modulazione di frequenza (FM) è più difficile da trattare matematicamente della modulazione di ampiezza, ma possiamo farci un'idea almeno approssimativa dello spettro di un segnale FM notando che se la frequenza al tempo  $t$  è data da  $\omega(t) = \omega_c(1 + m \cos \omega_M t)$  (con  $m$  molto minore di 1), allora la fase è data da

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega_c(1 + m \cos \omega_M t') dt' = \varphi_0 + \omega_c t + m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin \omega_M t \quad (5.5)$$

e quindi le componenti di Fourier del segnale si ottengono dall'espansione

$$\begin{aligned} \cos \left[ \varphi_0 + \omega_c t + m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin \omega_M t \right] &= \cos(\varphi_0 + \omega_c t) \cos \left( m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin \omega_M t \right) - \sin(\varphi_0 + \omega_c t) \sin \left( m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin \omega_M t \right) \\ &\approx \cos(\varphi_0 + \omega_c t) - m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin(\varphi_0 + \omega_c t) \sin \omega_M t \end{aligned} \quad (5.6)$$

dove si è fatta l'ipotesi che  $m \frac{\omega_c}{\omega_M}$  sia molto minore di 1. La formula (5.6) mostra che in prima approssimazione lo spettro di un segnale in FM è dello stesso tipo di quello di un segnale in AM, con un indice di modulazione uguale a  $m \frac{\omega_c}{\omega_M}$ . Espandendo ulteriormente seni e coseni nella formula (5.6) si trova l'espressione

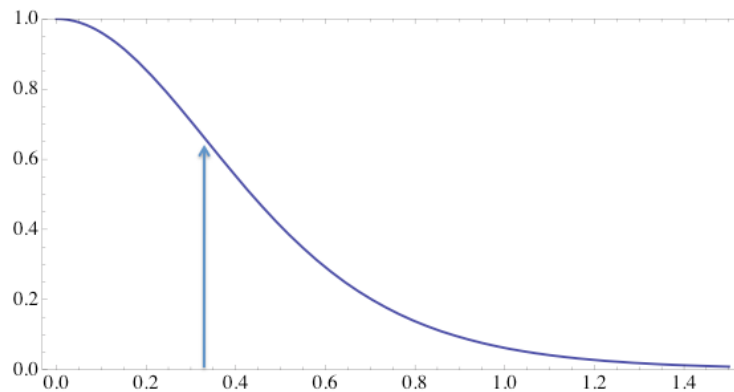
$$\cos(\varphi_0 + \omega_c t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin \omega_M t \right)^{2n} - \sin(\varphi_0 + \omega_c t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( m \frac{\omega_c}{\omega_M} \sin \omega_M t \right)^{2n+1} \quad (5.7)$$

e quindi lo spettro di un segnale FM non è limitato in banda come quello di un segnale AM; in pratica solo le primissime bande laterali sono importanti e hanno un ruolo nello spettro di un segnale FM.

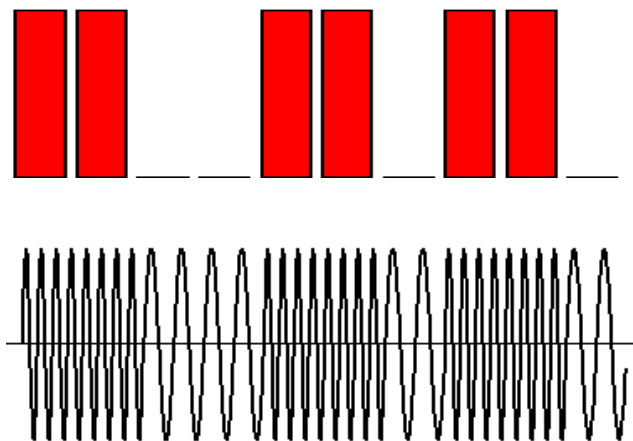
Il metodo più diffuso per la demodulazione dei segnali FM utilizza un circuito PLL (Phase-Locked Loop), ma esistono anche altri tipi di schemi: probabilmente il più semplice è lo *slope detector*, che è costituito da un filtro (in pratica più di un filtro) scelto in modo tale che la frequenza centrale della trasmissione FM stia proprio nella regione di rapida variazione della risposta del filtro. In questo modo variazioni di frequenza si traducono in

variazioni di ampiezza, e il segnale in uscita dallo slope detector può venire demodolato da un comune demodulatore AM.

La figura seguente mostra il modulo quadro della funzione di trasferimento di 4 filtri RC in cascata vs. frequenza angolare in unità di  $1/RC$ ; la freccia indica la posizione del flesso della funzione di trasferimento. Mettendo la frequenza centrale del segnale FM nella posizione del flesso si riesce a minimizzare la distorsione.



Se si considera l'attuale diffusione dei dati in forma digitale si può intuire facilmente l'importanza assunta dai metodi di modulazione dedicati alla trasmissione di questo tipo di dati. Un metodo di modulazione molto diffuso nella trasmissione radio di dati digitali è il metodo FSK (= Frequency Shift Keying), illustrato nella figura seguente:

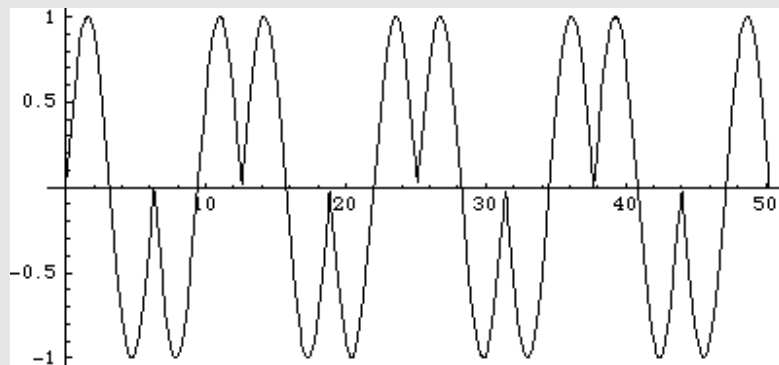


Schema di principio del funzionamento della modulazione FSK (Frequency Shift Keying) per la trasmissione di informazioni codificate in modo binario. La parte superiore della figura mostra i bits che si vogliono trasmettere, mentre la parte inferiore mostra come i bits alti vengono codificati con una frequenza elevata, mentre i bits bassi vengono codificati con una frequenza bassa. I segnali trasmessi vengono spostati ad alta frequenza con l'aggiunta di una portante prima di venire inviati all'antenna.

*Esercizi:*

1. Si discuta la forma dello spettro di un segnale FSK.

2. Una forma di modulazione simile alla FSK è la modulazione PSK (Phase Shift Keying) in cui non si cambia la frequenza, ma la fase del segnale. In realtà esistono diverse specifiche diverse per questa forma di modulazione, e adesso consideriamo un caso molto particolare, quello in cui il segnale della portante viene sfasato di  $180^\circ$  ad ogni ciclo, secondo lo schema illustrato nella figura seguente



Anche in questo caso si discuta la forma dello spettro di questo particolare segnale.

Esistono altre forme di modulazione che sono delle varianti di questi schemi, in particolare la modulazione QPSK e la modulazione MPSK, che codificano coppie di bit, invece di singoli bit.

### 5.5 La modulazione PCM

L'acronimo PCM sta per Pulse Code Modulation, e indica un tipo di codifica di dati che non corrisponde precisamente ad una modulazione, ma ad un processo che comprende i seguenti passi:

1. preconditionamento del segnale analogico per mezzo di una compressione della gamma dinamica (v. più avanti, capitolo dedicato agli ADC);
2. campionamento e digitalizzazione del segnale per mezzo di un ADC (v. capitolo dedicato agli ADC per i dettagli);
3. possibile passo di compressione dati digitalizzati;
4. trasmissione del segnale digitale per mezzo del metodo FSK o PSK.

Il ricevitore esegue quindi questi passi alla rovescia; la conversione da digitale ad analogico si fa con un DAC (v. capitolo sugli ADC).



In telefonia, la frequenza di campionamento è di 8 KHz, e la compressione della gamma dinamica viene fatta per mezzo di un algoritmo con una funzione di trasferimento logaritmica: l'algoritmo  $\mu$ -law in Nord America e Giappone, e l'algoritmo A-law in Europa. Questi algoritmi permettono di ridurre il numero di bit per campione senza ridurre significativamente la qualità della percezione dei suoni, e le formule che li definiscono (per segnali normalizzati all'intervallo  $(-1,1)$ ) sono le seguenti:

codifica  $\mu$ -law:

$$F(x) = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1 + \mu |x|)}{\ln(1 + \mu)} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (5.8)$$

decodifica  $\mu$ -law:

$$F^{-1}(y) = \text{sgn}(y) (1/\mu) [(1 + \mu)^{|y|} - 1] \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (5.9)$$

dove  $\mu = 255$ .

codifica A-law:

$$F(x) = \text{sgn}(x) \begin{cases} \frac{A|x|}{1 + \ln(A)}, & |x| < \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(A|x|)}{1 + \ln(A)}, & \frac{1}{A} \leq |x| \leq 1, \end{cases} \quad (5.10)$$

decodifica A-law:

$$F^{-1}(y) = \text{sgn}(y) \begin{cases} \frac{|y|(1 + \ln(A))}{A}, & |y| < \frac{1}{1 + \ln(A)} \\ \frac{\exp(|y|(1 + \ln(A)) - 1)}{A}, & \frac{1}{1 + \ln(A)} \leq |y| < 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

in Europa il parametro A vale 87.7.

## 5.6 Propagazione atmosferica

La propagazione delle onde radio nell'atmosfera è fortemente influenzata dallo stato di ionizzazione della ionosfera, la parte più alta dell'atmosfera terrestre. Il gas dell'atmosfera viene ionizzato principalmente dalla

radiazione solare e si formano degli strati che sono in grado di riflettere le onde radio che hanno una frequenza inferiore a circa 30 MHz. I processi fisici che determinano il comportamento della ionosfera sono:

- il processo di ionizzazione dei singoli atomi e molecole
- la ricombinazione di ioni ed elettroni
- il passaggio delle onde elettromagnetiche nei plasmi (gas ionizzati)

Qui discutiamo brevemente solo l'ultimo punto, ed in particolare deriviamo la *frequenza di plasma*, il parametro che determina il comportamento degli strati ionizzati.

Si consideri un volume occupato da gas neutro e da gas parzialmente ionizzato, e sia  $n_0$  la densità numerica delle cariche (sia positive che negative, il gas è globalmente neutro). Quando un'onda elettromagnetica piana incide su questo volume, il campo elettrico dell'onda produce uno spostamento degli elettroni e degli ioni; lo spostamento degli ioni è assai più ridotto di quello degli elettroni, perché uno ione pesa assai più degli elettroni (circa 2000 volte di più nel caso dell'idrogeno atomico, il gas più leggero), quindi consideriamo solo lo spostamento degli elettroni. A causa dello spostamento, gli elettroni che prima occupavano uno spessore  $\Delta x$ , occupano uno spessore  $\Delta x + \Delta s$ , e quindi la densità degli elettroni scala del fattore  $\Delta x / (\Delta x + \Delta s)$  (l'onda elettromagnetica ha prodotto una perturbazione dell'equilibrio del gas ionizzato). Questo significa che la densità di carica totale è

$$\rho = qn_0 - qn_0 \left( \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta s} \right) = qn_0 \frac{\Delta s}{\Delta x + \Delta s} \approx qn_0 \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx qn_0 \frac{ds}{dx} \quad (5.12)$$

( $q$  è la carica elementare) e questa densità di carica è legata al campo elettrico dalla legge di Gauss (stiamo considerando un'onda piana polarizzata linearmente e sopravvive solo la componente del campo elettrico parallela alla direzione di polarizzazione che è proprio la direzione dell'asse  $x$ ):

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.13)$$

e questo mostra che la forza su ciascun elettrone si ricava dall'equazione

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{q\rho}{\epsilon_0} \quad (5.14)$$

Quindi troviamo che

$$\frac{dF}{dx} \approx -\frac{q^2 n_0}{\epsilon_0} \frac{ds}{dx} \quad (5.15)$$

da cui

$$F \approx -\frac{q^2 n_0}{\epsilon_0} s + \text{cost} \quad (5.16)$$

Poichè la forza è nulla quando lo spostamento è nullo, troviamo infine l'equazione del moto per un singolo elettrone:

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2} \approx -\frac{q^2 n_0}{\epsilon_0} s \quad (5.17)$$

cioè

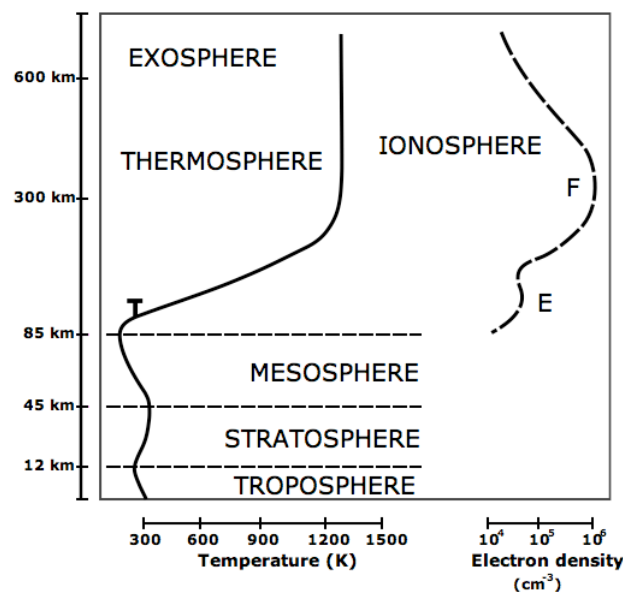
$$\frac{d^2 s}{dt^2} \approx -\frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0} s \quad (5.18)$$

Quest'ultima è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza propria uguale a

$$\omega_p \approx \sqrt{\frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0}} \quad (5.19)$$

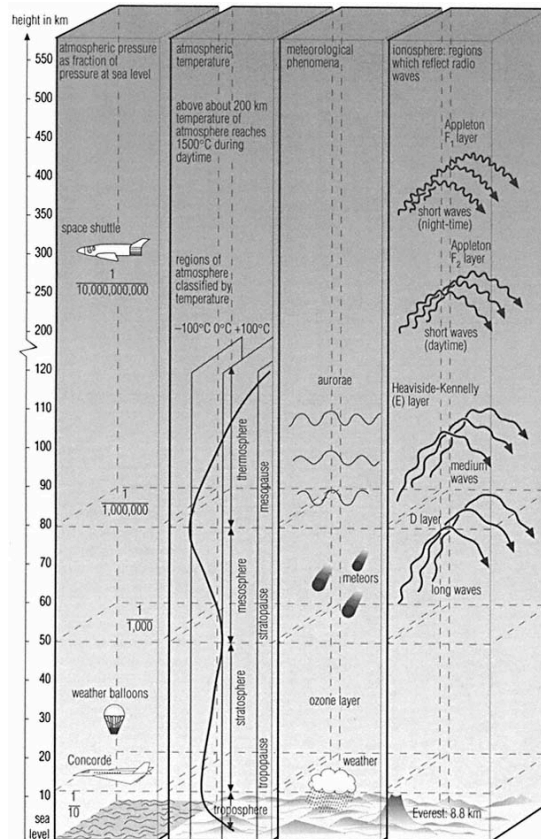
detta appunto *frequenza di plasma*. Si può dimostrare che onde elettromagnetiche con frequenza inferiore alla frequenza di plasma vengono riflesse, mentre se la frequenza è superiore alla frequenza di plasma le onde vengono trasmesse.

Si noti che il solo parametro ambientale che determina la frequenza di plasma è la densità numerica di ioni (e elettroni): tanto più alta è la densità e tanto più alta è la frequenza di plasma. La figura seguente mostra la densità elettronica nell'atmosfera in funzione dell'altezza

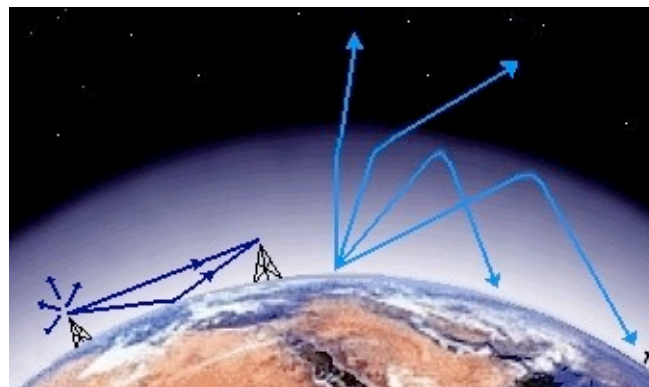


come si vede, la densità sale a partire da 80 km: la riflessione delle onde elettromagnetiche di frequenza più alta avviene quindi ad altezza maggiore. Si noti inoltre che a causa della composizione chimica variabile in funzione dell'altezza, la ionizzazione tende ad organizzarsi in zone stratificate (gli *strati* della ionosfera).

La figura seguente mostra la posizione dei principali strati ionosferici in relazione ad altri fenomeni atmosferici.



La propagazione avviene quindi o in modo diretto dall'antenna trasmittente al ricevitore (ground wave) oppure tramite una o più riflessioni (sky wave)



La tabella seguente mostra i modi di propagazione per onde radio di diverse frequenze:

banda		frequenza	lunghezza d'onda	propagazione
VLF	Very Low Frequency	3–30 kHz	100–10 km	onde guidate tra terra e ionosfera;
LF	Low Frequency	30–300 kHz	10–1 km	onde guidate tra terra e strato D della ionosfera; onde di superficie;
MF	Medium Frequency	300–3000 kHz	1000–100 m	onde di superficie; rifrazione ionosferica negli strati E ed F di notte, quando l'assorbimento dello strato D si attenua;
HF	High Frequency (Short Wave)	3–30 MHz	100–10 m	rifrazione ionosferica nello strato E e negli strati F1, F2;
VHF	Very High Frequency	30–300 MHz	10–1 m	raramente rifrazione ionosferica nello strato E, estremamente rara negli strati F1, F2 durante attività solare, fino a 80 MHz; generalmente onda diretta;
UHF	Ultra High Frequency	300–3000 MHz	1–0.1 m	onda diretta;
SHF	Super High Frequency	3–30 GHz	100–10 mm	onda diretta;
EHF	Extremely High Frequency	30–300 GHz	10–1 mm	onda diretta limitata da assorbimento atmosferico.

Si noti che la propagazione delle onde radio che sfruttano la rifrazione ionosferica dipende dall'attività solare.

### 5.7 Allocazione delle frequenze

L'utilizzo di una portante ad una certa frequenza da parte di un trasmettitore rende inutilizzabile una banda di frequenza (definita dalla bande laterali) da parte degli altri trasmettitori. Ciò significa che la legge di ciascun paese deve prevedere la suddivisione in bande delle regioni di frequenza utilizzabili dai diversi metodi di modulazione. Informazioni sempre aggiornate su questo argomento si possono trovare su alcuni siti Internet; un quadro aggiornato della situazione è ottenibile seguendo i links dedicati all'argomento sulla pagina web del corso.

## 5.8 La radio digitale

Per ovviare ai problemi delle trasmissioni AM, e per includere molte delle innovazioni apportate dalle metodologie digitali, sono in corso di definizione diversi standard di trasmissione digitale. Qui discutiamo brevemente solo uno degli standard che sono stati proposti, lo standard DRM (Digital Radio Mondiale).

Lo schema DRM è stato pensato per poter utilizzare in modo più efficiente le bande su cui attualmente si trasmette in AM, vale a dire le onde lunghe, medie e corte fino a 30 MHz. Queste bande sono tradizionalmente utilizzate per trasmissioni a banda stretta, e sono limitate dai problemi posti dalla propagazione atmosferica – che sebbene permetta una trasmissione in aree molto vaste, produce allo stesso tempo problemi di interferenza e una qualità ineguale e spesso non ben prevedibile.

Lo spettro delle trasmissioni AM viene utilizzato in modo molto inefficiente: la radio DRM sfrutta questa inefficienza per trasmettere contemporaneamente segnali AM e digitali. L'idea fondamentale è che nella trasmissione AM non conta la fase assoluta della portante e delle bande laterali, ma solo la fase relativa: un cambio di fase uguale delle componenti non ha alcun effetto sul processo di demodulazione. Questo significa che è possibile modulare in fase la portante senza modificare le caratteristiche di ricezione AM, e quindi si può trasmettere in AM e allo stesso tempo in PSK modulando in fase la portante. Questo significa che DRM mantiene la compatibilità con le attuali apparecchiature analogiche AM, anche se la banda disponibile è piuttosto ristretta.

Per quel che riguarda la trasmissione e la ricezione digitale, gli stadi del processo sono i seguenti:

### Trasmissione

1. Codifica della sorgente: digitalizzazione PCM e compressione del segnale (MP3 o AAC)
2. Multiplexing del segnale digitale con altre informazioni utili al funzionamento del sistema
3. Codifica del canale per la correzione degli errori
4. Modulazione RF per la trasmissione

### Ricezione

1. Demodulazione
2. Decodifica e correzione degli errori di trasmissione
3. Demultiplexing
4. Decodifica del sistema di compressione e ricostituzione di un segnale analogico

*Codifica della sorgente:* poiché la larghezza di banda disponibile è bassa (9 o 10 kHz), la velocità di trasmissione dell'informazione digitale è bassa (inferiore a 20 kbit/s), e per questo la compressione del segnale è estremamente importante. Nel sistema DRM si utilizza la compressione AAC (Advanced Audio Coding, parte dello standard

MPEG-4), insieme alla tecnica SBR (Spectral Band Replication). La compressione AAC utilizza (come la compressione MP3) una semplice analisi spettrale, e scartando in ciascuna banda audio analizzata i suoni deboli che sono mascherati da suoni più forti. Poiché nel caso del sistema DRM la larghezza di banda del canale di trasmissione è molto stretta, si deve limitare anche la larghezza di banda audio della compressione AAC, mentre la parte ad alta frequenza viene sintetizzata localmente a partire da poche informazioni sulle caratteristiche del suono (tecnica SBR, utilizza il fatto che l'udito umano non percepisce bene le differenze tra suoni ad alta frequenza).

*Multiplexing*: in questo stadio all'informazione audio digitalizzata e compressa vengono aggiunte informazioni sulla natura del canale (identificazione, tipo di trasmissione, etc.). Queste informazioni aggiuntive vengono inserite nel segnale audio solo di tanto in tanto, per non appesantire i problemi dovuti alla piccola larghezza di banda.

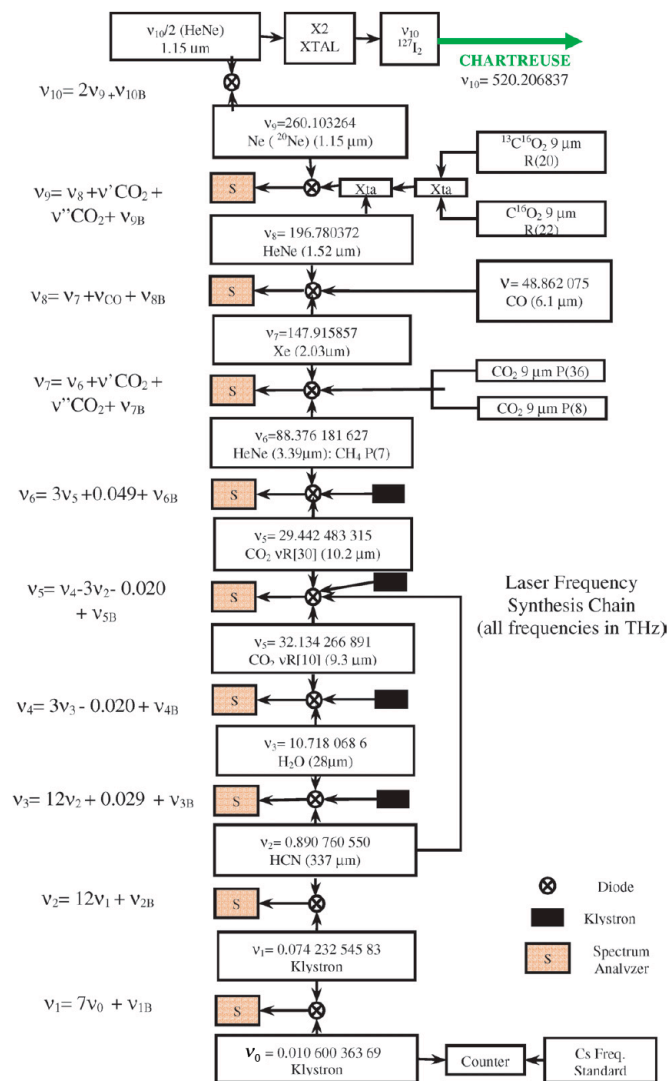
*Codifica e modulazione*: le trasmissioni digitali vengono disturbate in modo particolare dalle riflessioni dei segnali che causano ricezione ritardata e si sovrappongono al segnale diretto. In linea di principio per eliminare il problema basta prendere dei bit di durata sufficientemente grande, ma questo riduce di molto la velocità di trasmissione dei dati digitali. La soluzione consiste nel distribuire il segnale su diverse frequenze portanti (sub-carriers) che possono quindi trasmettere a bassa velocità, e nel ricomporre il segnale nel ricevitore: questo schema di trasmissione si chiama FDM (Frequency Division Multiplexing).

Il problema della FDM è che richiede un gran numero di filtri passa-banda di precisione per recuperare il segnale delle diverse portanti. Questo problema viene eliminato nello schema OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing, noto anche con i nomi COFDM = Coded OFDM e DMT = Discrete Multitone Modulation): la periodicità degli intervalli di transizione tra bit (durata di un simbolo =  $T_s$ ) permette di introdurre delle funzioni di base equivalenti agli esponenziali che si utilizzano nelle serie di Fourier: queste funzioni di base sono ortogonali tra loro e hanno una spaziatura in frequenza uguale a  $\Delta\nu = 1/T_s$ . Ora, se le portanti utilizzate nel metodo FDM sono spaziate fra loro di  $\Delta\nu = 1/T_s$ , allora sono ortogonali rispetto un'integrazione fatta in un intervallo di tempo uguale alla durata di un simbolo, e questo significa che si possono recuperare i valori dei bit per mezzo di una trasformata di Fourier discreta dei dati campionati in questo periodo di tempo: non occorrono quindi filtri di precisione, ma solo una buona capacità di calcolo. Questo metodo è robusto e versatile, ed è utilizzato non solo dal sistema DRM ma anche dagli altri principali metodi di trasmissione digitale audio e video (in particolare DAB e DVB-T).

Bisogna infine menzionare che i dati sono ulteriormente protetti da un codice di correzione d'errore (come il codice Gray: questo però non è argomento di questo corso ...).

### 5.9 Utilizzo della tecnica eterodina in metrologia

Tecniche analoghe a quelle che abbiamo appena analizzato vengono comunemente utilizzate anche in metrologia, ad esempio per misure di frequenze estremamente elevate ad alta precisione. La figura seguente mostra una catena di sintesi di frequenza sviluppata al NIST per misurare la frequenza di un laser a colorante stabilizzato all'iodio che opera nel visibile (520 THz), relativamente ad uno standard primario di frequenza (orologio atomico al cesio)



In questa catena di sintesi di frequenza, il grande rapporto tra frequenza dell'orologio atomico che fa da standard di riferimento (circa 9.1 GHz) e quella ottica (520 THz) viene coperto in passi successivi. In ogni passo le frequenze di due oscillatori vengono confrontate (i klystron sono dei generatori di microonde). Il segnale dei due oscillatori viene combinato in un componente non-lineare in modo da dare dei battimenti a bassa frequenza, con un periodo facilmente misurabile. Per esempio la frequenza del secondo klystron viene combinata con la settima armonica del primo klystron in modo da produrre un segnale a bassa frequenza  $\nu_B = \nu_1 - 7\nu_0$  che viene



facilmente misurata dal primo analizzatore di spettro: in questo modo si conosce la frequenza del secondo klystron, con precisione elevata. Utilizzando questo metodo le frequenze dei due oscillatori sono correlate coerentemente una con l'altra. I meccanismi non lineari utilizzati sono principalmente diodi Schottky, diodi MIM (metal-insulator-metal) e cristalli non-lineari.

Per capire come funziona una catena di questo tipo, si ricordi che la curva caratteristica del diodo (e di molti altri componenti non-lineari) può essere scritta nella forma di una serie di Taylor

$$I(V) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k V^k \quad (5.23)$$

e quindi se la tensione applicata ai capi del diodo è la somma delle tensioni dei due oscillatori si trova che

$$I(V) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^l \sin^l \omega_1 t \cdot B^{k-l} \sin^{k-l} \omega_2 t \quad (5.13)$$

Si ricordi che

$$\begin{aligned} \sin^n x &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n = \frac{(-i)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\cos(2k-n)x + i \sin(2k-n)x] \end{aligned} \quad (5.14)$$

(e simili per il coseno), e quindi potenze di seni e coseni di un angolo  $x$  si possono esprimere tramite somme di seni e coseni di multipli dello stesso angolo. Applicando queste formule all'espressione (5.13) che ci dà la corrente nel dispositivo non-lineare, troviamo infine che la corrente è una somma di termini del tipo  $\sin n\omega_1 t \sin m\omega_2 t$ , etc.

D'altra parte  $\sin n\omega_1 t \sin m\omega_2 t = \frac{1}{2}(\cos(n\omega_1 - m\omega_2)t - \cos(n\omega_1 + m\omega_2)t)$ , e quindi la somma contiene funzioni

trigonometriche che hanno per argomento somme e differenze di multipli interi delle frequenze iniziali.

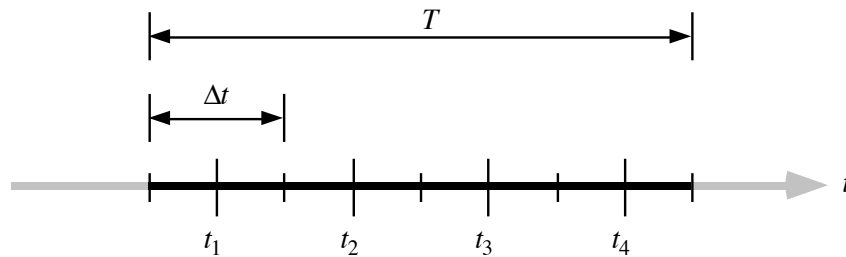
In questo modo è possibile misurare con alta precisione delle frequenze elevate facendo sempre e solo delle misure a bassa frequenza

Tecniche avanzate simili a quella illustrata permetteranno entro pochi anni di misurare la frequenza della luce visibile con una precisione di 1 Hz, e si prevede che metodi di questo tipo (optical frequency comb) possano alla fine arrivare ad incertezze dell'ordine di 1 parte in  $10^{18}$ .

La ricerca in questo campo è stata recentemente premiata con il Nobel (2005) a Hall e Hänsch (che lo hanno condiviso con Glauber che ha lavorato su un tema correlato), per ulteriori dettagli si veda il sito della fondazione Nobel: [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2005/](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2005/)

## 6. Le trasformate di Fourier discrete.

Come si fa a trattare un segnale reale invece di una funzione espressa in forma analitica per mezzo del formalismo di Fourier? Se torniamo a considerare la formula che definisce la trasformata, notiamo che nei casi di segnali misurabili, l'integrale è necessariamente esteso ad un intervallo finito  $T$ , e inoltre il segnale è definito solo su un insieme discreto di  $N$  campioni.



La figura mostra la relazione tra tempo di campionamento e tempo totale  $T$ . I campioni vengono raccolti in un intervallo di tempo che dura  $\Delta t$ .

Supponiamo che gli istanti di campionamento siano equispaziati nel tempo e che l'intervallo di campionamento sia  $\Delta t = T/N$ , allora è abbastanza naturale approssimare l'integrale nel modo seguente:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^T f(t)e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-i\omega t_n} \Delta t \quad (6.1)$$

Poiché ci sono  $N$  campioni non ci possono essere più di  $N$  frequenze linearmente indipendenti, e siccome i tempi di campionamento sono equispaziati assumiamo ora che anche le frequenze che ci interessano siano equispaziate, definiamo dunque

$$F_m = F(\omega_m) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-i\omega_m t_n} \Delta t \quad (6.2)$$

con  $\omega_m = m\Delta\omega$  e  $t_n = n\Delta t$  Allora

$$F_m \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-imn\Delta\omega\Delta t} \Delta t \quad (6.3)$$

dove si è posto  $f_n = f(t_n)$ . Resta ora da definire l'intervallo tra frequenze  $\Delta\omega$ , oppure - ed è la stessa cosa - la frequenza massima che entra nella somma (6.3). Si noti che il segnale è definito sull'intervallo  $(0, T)$ , mentre la trasformata di Fourier richiede che esso sia definito su tutto l'asse reale, allora per calcolare la trasformata di questo nostro segnale dobbiamo estenderlo in qualche modo a tutto l'asse reale. Una possibile scelta è quella di

considerarlo nullo al di fuori dell'intervallo  $(0, T)$ . Però la somma (6.3) contiene funzioni periodiche che sono definite e non nulle anche al di fuori di  $(0, T)$ , e quindi è naturale fare l'altra possibile scelta, e cioè di considerare il segnale una funzione periodica con periodo  $T$ . In tal caso la frequenza fondamentale associata a questa periodicità è  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , mentre le altre sono multipli di questa frequenza fondamentale, e allora  $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ .

Si noti adesso che la trasformata di Fourier comprende allo stesso modo sia frequenze positive, sia frequenze negative, e quindi solo metà delle frequenze che compaiono nella (6.3) sono positive e quindi la frequenza angolare massima è data da  $\omega_{\max} = \frac{N}{2} \Delta\omega = \frac{2\pi N}{2T} = 2\pi \frac{1}{2\Delta t}$ . La frequenza  $2\nu_{\max} = 2 \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{\Delta t}$  è detta *frequenza di Nyquist*, e nel prossimo paragrafo daremo fondamenta più salde a queste considerazioni. Proseguiamo ora

notando che  $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N}$ , e quindi

$$F_m \approx \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i m n}{N} \Delta t} \quad (6.4)$$

Ciò significa nella trasformata così discretizzata le funzioni periodiche rilevanti sono gli esponenziali del tipo  $e^{-\frac{2\pi i m n}{N}}$ , e perciò è importante studiarne le proprietà di ortogonalità:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} e^{\frac{2\pi i l n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i (m-l) n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{-\frac{2\pi i (m-l)}{N}} \right)^n \quad (6.5)$$

Se  $(m-l) \bmod N = 0$ , la (6.5) vale  $N$ , mentre se  $(m-l) \bmod N \neq 0$  possiamo applicare la solita regola per le somme geometriche e troviamo:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{-\frac{2\pi i (m-l)}{N}} \right)^n = \frac{1 - e^{-2\pi i (m-l)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i (m-l)}{N}}} = 0 \quad (6.6)$$

dunque

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} e^{\frac{2\pi i l n}{N}} = N \delta_{m,l} \quad (6.7)$$

In seguito alla relazione (6.7) si usa definire la coppia trasformata discreta - antitrasformata discreta nel modo seguente:

$$\begin{cases} F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \\ f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \end{cases} \quad (6.8)$$

Questa coppia definisce appunto la trasformata di Fourier discreta, o DFT (= Discrete Fourier Transform).

Esercizio: spiegare perché la somma (6.6) si annulla.

### 6.1 Proprietà della DFT

È semplice mostrare che la DFT gode di proprietà simili a quelle già dimostrate per la trasformata di Fourier (sezione 3). Alcune di queste proprietà sono però complicate dal fatto che la DFT produce implicitamente un'estensione periodica del segnale campionato (estensione sull'anello dei numeri interi); una teorema che vale la pena di esaminare più in dettaglio è il *teorema di convoluzione per la DFT*. Siano dunque  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  due segnali campionati, si consideri la convoluzione

$$h_n = \sum_{l=0}^{N-1} f_l g_{n-l} \quad (6.9)$$

e si denotino con i simboli  $F_k$ ,  $G_k$  e  $H_k$  le DFT dei tre segnali nell'espressione (6.9), allora la DFT dell'espressione (6.9) è

$$\begin{aligned} H_k &= \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{2\pi i k n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{N-1} f_l g_{n-l} \right) e^{2\pi i k n / N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{2\pi i k l / N} \sum_{n=0}^{N-1} g_{n-l} e^{2\pi i k (n-l) / N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{2\pi i k l / N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{2\pi i k n / N} \\ &= F_k G_k \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si noti che in questa dimostrazione si è utilizzato in modo essenziale la caratteristica di estensione periodica del segnale campionato (vale a dire il fatto che nel caso della DFT  $f_n = f_{n+N}$ )

#### Esercizi

1. Spiegare in che modo l'estensione periodica  $f_n = f_{n+N}$  venga utilizzata nella dimostrazione dell'espressione (6.10).
2. Si dimostrino le altre proprietà della DFT analoghe a quelle della trasformata di Fourier elencate nella sezione 3.

### Esempio: DFT di una senoide

Consideriamo una senoide definita dalla formula

$$f_n = A \cos \frac{2\pi n k_0}{N} \quad (6.11)$$

dove  $k_0$  è un intero (la frequenza della senoide coincide con una delle frequenze della DFT), allora la sua DFT è data da

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( A \cos \frac{2\pi n k_0}{N} \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\ &= \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{\frac{2\pi i n k_0}{N}} + e^{-\frac{2\pi i n k_0}{N}} \right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( e^{\frac{2\pi i n (k_0 - k)}{N}} + e^{-\frac{2\pi i n (k_0 + k)}{N}} \right) \\ &= \frac{A}{2} (N \delta_{k, k_0} + N \delta_{k, N - k_0}) = \frac{A}{2} N (\delta_{k, k_0} + \delta_{k, N - k_0}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Come si vede ci sono due picchi che hanno un'ampiezza proporzionale all'ampiezza della senoide originale e alla radice quadrata del numero di campioni.

*Esercizio:* spiegare nel dettaglio tutti i passaggi matematici dell'esempio precedente.

## 6.2 DFT come modello fisico dei dati.

Riprendiamo ora la formula dell'antitrasformata

$$f_n^{(th)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \quad (6.13)$$

questa formula può essere considerata - indipendentemente da tutto quello che è stato detto sopra - un modello dei dati osservati in cui le quantità  $F_m$  sono i parametri del modello. Definiamo allora un Chi-quadrato:

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|f_n - f_n^{(th)}|^2}{\sigma_n^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(f_n - f_n^{(th)})^* (f_n - f_n^{(th)})}{\sigma_n^2} \quad (6.14)$$

e supponiamo che l'errore sia lo stesso per tutte le misure, allora derivando  $S$  rispetto i parametri  $F_m$  troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial F_m} &= -\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial f_n^{(th)}}{\partial F_m} \right)^* (f_n - f_n^{(th)}) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \left( f_n - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi i n l}{N}} \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

$S$  è minimo quando tutte queste derivate si annullano, allora, ricordando le relazioni di ortogonalità (6.7)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S}{\partial F_m} = -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n - \frac{1}{N} \sum_{n,l=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} F_l e^{\frac{2\pi i n l}{N}} \right\} \\ &= -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l (N \delta_{l,m}) \right\} \\ &= -\frac{2}{\sigma^2 N} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n - F_m \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

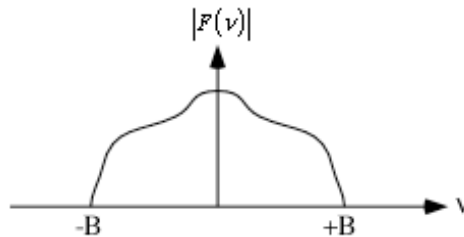
la parte in parentesi graffe si deve annullare, indipendentemente da  $N$ , e quindi

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} f_n \quad (6.17)$$

e possiamo dunque concludere che i coefficienti di Fourier discreti sono i parametri di un modello teorico dei dati in cui il segnale viene considerato una somma di funzioni trigonometriche.

### 6.3 Teorema del campionamento (Teorema di Nyquist)

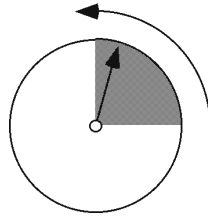
Consideriamo ora un segnale  $f(t)$  che ha una trasformata di Fourier  $F(\nu)$  *limitata in banda* (con ciò si intende dire che si annulla al di fuori di una certa banda di frequenze); il grafico del modulo della  $F$  potrebbe essere di questo tipo



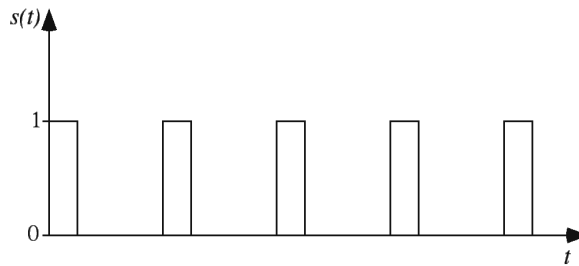
e la  $F(\nu)$  è nulla al di fuori della banda di frequenza  $(-B, B)$ <sup>1</sup> (il segnale occupa la larghezza di banda  $B$ ).

Campionare il segnale significa osservarlo di tanto in tanto in modo da misurarne l'ampiezza: un campionatore meccanico potrebbe essere costituito da un interruttore rotante, come nella figura seguente, in cui c'è un contatto strisciante che passa con regolarità su una parte metallizzata e permette il passaggio di corrente

<sup>1</sup> si noti che in questo paragrafo utilizziamo la frequenza invece della frequenza angolare.



così che il segnale di circuito chiuso  $s(t)$  ha questa dipendenza temporale



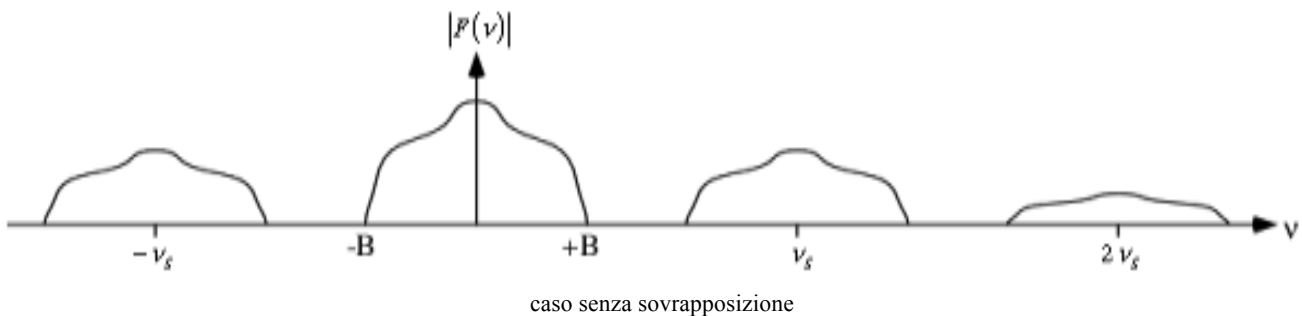
La risposta  $s(t)$  del campionatore è in ogni caso un segnale periodico con frequenza  $\nu_s = 1/\Delta t$ , dove  $\Delta t$  è il periodo del campionatore, e quindi possiamo rappresentare  $s(t)$  per mezzo di una serie di Fourier

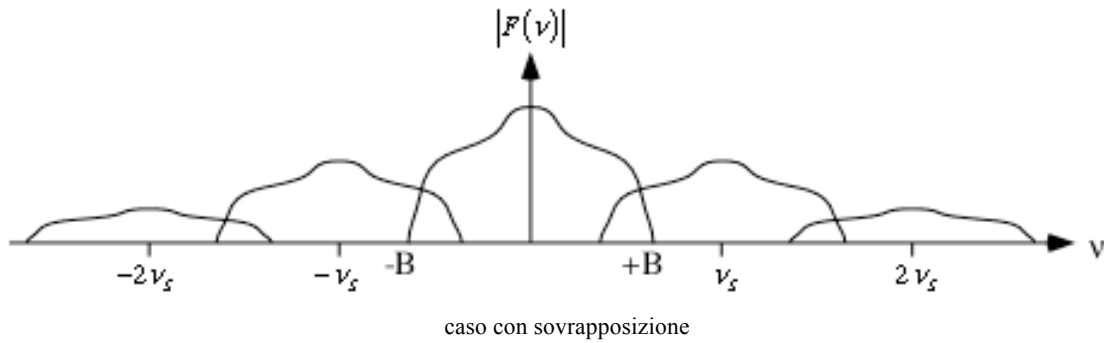
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{2\pi i n \nu_s t} \tag{6.18}$$

mentre il segnale campionato è dato dalla funzione  $g(t) = f(t) \cdot s(t)$ , la cui trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{2\pi i n \nu_s t} e^{-2\pi i \nu t} dt = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i (\nu - n \nu_s) t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \cdot F(\nu - n \nu_s) \end{aligned} \tag{6.19}$$

dove questa formula è il cosiddetto *teorema del campionamento* e  $\nu_s = 1/\Delta t$  è la *frequenza di campionamento*. Questa trasformata di Fourier è una ripetizione di tante copie della trasformata del segnale originale, distanziate di  $\nu_s$  una dall'altra e scalate con l'opportuno coefficiente di Fourier





Come si vede le copie non si sovrappongono solo se  $B \leq v_N = v_s/2$ : se ciò accade, la parte di trasformata del segnale campionato che compare tra  $-B$  e  $+B$  è sufficiente a ricostruire il segnale originale, mentre se c'è sovrapposizione non c'è più modo di recuperare la trasformata originale, e quindi la trasformata di Fourier originale è ricostruibile dal segnale campionato solo se il campionamento avviene ad una frequenza  $v_s \geq 2B$ . Questo fenomeno di sovrapposizione di informazione ad alta frequenza su informazione a bassa frequenza è noto come *aliasing*.

Abbiamo già visto in precedenza che se conosciamo la trasformata di Fourier  $F$  allora conosciamo perfettamente anche il segnale  $f$ : da ciò concludiamo che campionando il segnale  $f(t)$  con una frequenza  $v_s$  riusciamo a ricostruirlo perfettamente se le sue componenti di frequenza sono tutte inferiori alla frequenza di Nyquist  $v_N = v_s/2$ .

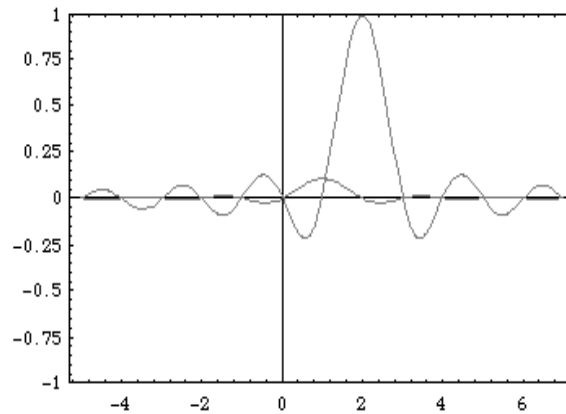
A questo punto resta ancora da risolvere un problema pratico: se conosciamo i campioni, come facciamo a ricostruire il segnale (limitato in banda di frequenza)? Ricordiamo ora il risultato della sezione 4.1: la trasformata di Fourier di un impulso rettangolare è una funzione sinc. D'altra parte - per la simmetria trasformata - antitrasformata - questo risultato vale anche alla rovescia, e cioè la trasformata di Fourier di una funzione sinc è un impulso rettangolare. Ciò significa che se  $f_k$  è il campione del nostro segnale al tempo  $t_k = k\Delta t$ , allora la funzione  $f_k(t) = f_k \text{sinc}(2\pi B(t - t_k))$  ha esattamente il valore del nostro segnale al tempo  $t_k = k\Delta t$ , ed è limitata all'interno della banda di frequenza richiesta. Inoltre questa funzione si azzera quando  $2\pi B(t - t_k) = m\pi$  ( $m \neq 0$ ), e quindi si azzera nelle posizioni di tutti gli altri campioni (che per ipotesi sono equispaziati). Perciò la funzione

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k \text{sinc}(2\pi B(t - t_k)) \tag{6.20}$$

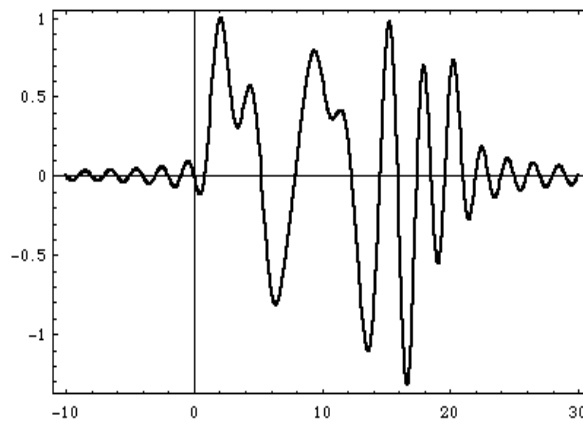
riproduce il valore del segnale  $f(t)$  in tutti i punti di campionamento ed è limitata alla banda di frequenze richiesta, quindi questa funzione è una rappresentazione continua del segnale campionato (questo è detto metodo di ricostruzione di Shannon).

La figura che segue mostra due delle funzioni  $f_k(t) = f_k \text{sinc}(2\pi B(t - t_k))$  relative all'espansione di un certo segnale





si noti che entrambe le funzioni hanno il massimo principale in corrispondenza ad uno zero dell'altra funzione. La figura seguente mostra invece un segnale ricostruito a partire da 20 campioni che si trovano in posizione 1,2,...,20



si noti che il segnale ricostruito non si annulla al di fuori dell'intervallo di campionamento (com'è correlato questo fatto all'ipotesi di limitatezza in banda? C'è una relazione con il fenomeno di Gibbs?)

*Esercizio:* si consideri un segnale che ha due sole componenti di Fourier,

$$s(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos 3\omega_0 t$$

e si consideri ciò che accade se l'intervallo di campionamento è a.)  $\Delta t = 3/v$ ; b.)  $\Delta t = 4/v$ ; c.)  $\Delta t = 6/v$ ; d.)  $\Delta t = 8/v$ ; dove  $\omega = 2\pi v$ .

#### 6.4 Relazione con il sistema OFDM.

La matematica che abbiamo utilizzato nella dimostrazione della formula di ricostruzione di Shannon ha delle interessanti somiglianze con quella che permette il funzionamento del metodo OFDM che si utilizza per le comunicazioni wireless e la radio e la tv digitale.

Consideriamo un sistema ricevente che prende  $N_S$  campioni di un segnale nel tempo di misura  $T$ . Questo significa che la DFT inversa corrispondente è

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_s-1} x_n e^{2\pi i k(t-t_s)/T} \quad (6.21)$$

dove  $t_s$  è il tempo di inizio del campionamento e gli  $x_n$  sono i valori dei singoli bit (0 o 1) che si vogliono trasmettere. Questa rappresentazione vale soltanto all'interno dell'intervallo  $(t_s, t_s + T)$ . La trasformata di Fourier di ciascuna delle singole componenti sinusoidali del segnale (che sono limitate allo stesso intervallo) vale

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{2\pi i k(t-t_s)/T} e^{-2\pi i \nu t} dt &= e^{-2\pi i k t_s/T} \int_0^T \exp\left[-2\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right) t\right] dt = e^{-2\pi i k t_s/T} \frac{\exp\left[-2\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right) t\right]}{-2\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right)} \Bigg|_0^T \\ &= e^{-2\pi i k t_s/T} \frac{1 - \exp\left[-2\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right) T\right]}{2\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right)} = e^{-2\pi i k t_s/T} e^{-\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right) T} \frac{\sin\left[\pi \left(\nu - \frac{k}{T}\right) T\right]}{\pi \left(\nu - \frac{k}{T}\right)} \\ &= T e^{-2\pi i k t_s/T} e^{-\pi i \left(\nu - \frac{k}{T}\right) T} \text{sinc}\left[\pi \left(\nu - \frac{k}{T}\right) T\right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

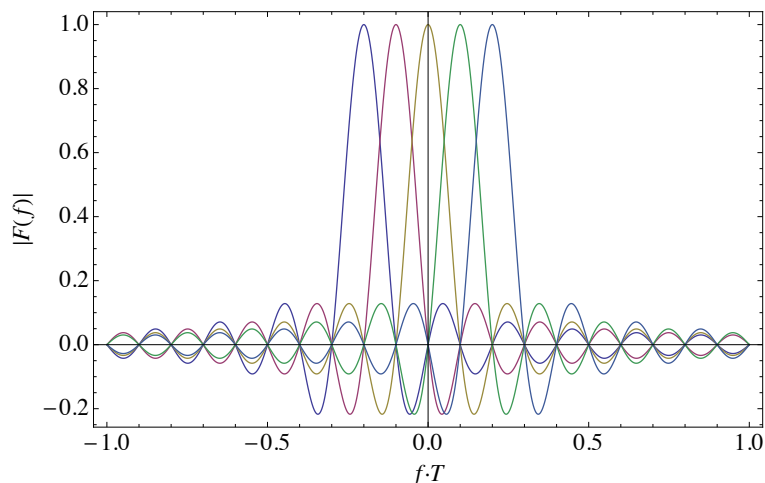
Gli zeri della funzione sinc stanno in

$$\nu_{k,m} = \frac{k}{T} + \frac{m}{T} \quad (6.23)$$

e i picchi principali stanno in

$$\nu_{k,0} = \frac{k}{T} \quad (6.24)$$

quindi gli zeri di una funzione sinc stanno nelle posizioni dei picchi delle altre funzioni sinc (come nella figura seguente). Questo dipende solo dalla durata  $T$  di un bit, e non dal valore di ciascun bit. Si vede quindi che la DFT del segnale campionato permette di riottenere i singoli bit, senza contaminazione dai bit trasmessi sui canali adiacenti.



### 6.5 Calcolo numerico delle trasformate di Fourier: il lemma di Danielson-Lanczos e la FFT.

Quando si calcola la DFT si devono valutare  $N$  somme di  $N$  termini ciascuna, e quindi il numero di operazione è dell'ordine di  $N^2$  (questo si scrive di solito nella forma  $O(N^2)$ ). Ciò significa che al crescere di  $N$  il tempo necessario per calcolare la DFT cresce assai velocemente, e diventa intollerabilmente lungo per un numero di campioni non molto elevato. Questo problema può venire corretto, come vedremo tra breve: dimostriamo anzitutto un semplice teorema, noto col nome di *lemma di Danielson-Lanczos* (1942). Supponiamo che  $N$  sia un numero pari, e cioè che sia  $N=2M$ , allora possiamo dividere l'insieme dei campioni in due sottoinsiemi, il sottoinsieme dei campioni pari e quello dei campioni dispari, e quindi scrivere:

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} f_n = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i k (2n)}{N}} f_{2n} + \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i k (2n+1)}{N}} f_{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i k n}{M}} f_{2n} + \left( e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \right)^k \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i k n}{M}} f_{2n+1} \end{aligned} \quad (6.25)$$

perciò se definiamo  $W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$  e introduciamo la trasformata  $F_k^{(p)}$  degli  $M$  campioni pari e la trasformata  $F_k^{(d)}$  degli  $M$  campioni dispari, possiamo scrivere

$$F_k = F_k^{(p)} + W^k F_k^{(d)} \quad (6.26)$$

Se utilizziamo questa formula per il calcolo della DFT l'ordine della durata del calcolo è  $2 \cdot O(N^2/4) = O(N^2/2)$ , e quindi il tempo di calcolo si dimezza. Se  $N$  è una potenza di 2 possiamo applicare ripetutamente il lemma di Danielson-Lanczos, e ridurre così ogni volta il numero di operazioni necessario per il calcolo. Dopo  $\log_2 N$  applicazioni del lemma dobbiamo calcolare  $N$  sottotrasformate, ma ciascuna di queste sottotrasformate si riferisce ad un sottoinsieme che contiene un solo campione, e quindi la trasformata coincide con il campione stesso. Per calcolare la trasformata dobbiamo allora fare le seguenti operazioni:

1. catalogare i campioni nell'ordine giusto, in modo che i campioni riordinati ci diano direttamente le trasformate dei sottoinsiemi di lunghezza 1. Questo passo iniziale lo si può fare una volta per tutte con  $O(N)$  operazioni.
2. partire dal livello più basso e costruire le sottotrasformate di ordine più elevato. Ciascuna ricostruzione richiede  $\log_2 N$  passi, e poiché la trasformata ha  $N$  componenti, ci vogliono in tutto  $O(N \log_2 N)$  operazioni.

Il calcolo della trasformata di Fourier eseguito secondo questo schema si chiama FFT (= Fast Fourier Transform) ed in totale esso richiede  $O(N) + O(N \log_2 N) \approx O(N \log_2 N)$  operazioni: come si confronta questo algoritmo con il calcolo diretto della DFT? Prendiamo ad esempio un segnale suddiviso in  $2^{10} = 1024$  campioni: nel caso della DFT ci vogliono  $O(2^{20}) \approx O(10^6)$  operazioni, mentre nel caso della FFT ci vogliono solo  $O(10 \cdot 2^{10}) \approx O(10^4)$

operazioni, con un guadagno in velocità di un fattore 100, ed il guadagno aumenta sempre più al crescere del numero di campioni.

Abbiamo visto che secondo il lemma di Danielson-Lanczos le due trasformate da calcolare sono

$$F_k^{(e)} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i k n}{M}} f_{2n}; \quad F_k^{(o)} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i k n}{M}} f_{2n+1} \quad (6.27)$$

(*e*, e *o* indicano le abbreviazioni delle parole inglesi che significano pari (*even*) e dispari (*odd*)) e si combinano insieme per mezzo della formula

$$F_k = F_k^{(e)} + W^k F_k^{(o)}; \quad (6.28)$$

con  $W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ ; si noti che le operazioni sono tutte complesse, e quindi ad ogni passaggio ci sono in totale 4 moltiplicazioni reali e 4 somme reali.

Proviamo adesso ad applicare questo schema di calcolo ad un piccolo insieme di dati ( $N = 8$ );, così che

$$F_k^{(e)} = \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{2\pi i k n}{4}} f_{2n}; \quad F_k^{(o)} = \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{2\pi i k n}{4}} f_{2n+1}; \quad W = e^{-\frac{2\pi i}{8}} \quad (6.29)$$

Passando al livello successivo dobbiamo scomporre ciascuna delle due sottotrasformate:

$$F_k^{(e)} = F_k^{(ee)} + W^k F_k^{(eo)}; \quad F_k^{(o)} = F_k^{(oe)} + W^k F_k^{(oo)}; \quad W = e^{-\frac{2\pi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i \quad (6.30)$$

dove

$$\begin{aligned} F_k^{(ee)} &= f_0 e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2} \cdot k} + W f_4 e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{2} \cdot k}; & F_k^{(eo)} &= f_2 e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2} \cdot k} + W f_6 e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{2} \cdot k}; \\ F_k^{(oe)} &= f_1 e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2} \cdot k} + W f_5 e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{2} \cdot k}; & F_k^{(oo)} &= f_3 e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2} \cdot k} + W f_7 e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{2} \cdot k}; \end{aligned} \quad (6.31)$$

Al livello ancora successivo abbiamo le sottotrasformate

$$\begin{aligned} F_k^{(ee)} &= F_k^{(eee)} + W^k F_k^{(eeo)}; & F_k^{(eo)} &= F_k^{(eoe)} + W^k F_k^{(eoo)}; \\ F_k^{(oe)} &= F_k^{(oee)} + W^k F_k^{(oeo)}; & F_k^{(oo)} &= F_k^{(ooe)} + W^k F_k^{(ooo)}; \end{aligned} \quad W = e^{-\frac{2\pi i}{2}} = e^{-i\pi} = -1 \quad (6.32)$$

dove

$$\begin{aligned} F_k^{(eee)} &= f_0; & F_k^{(eeo)} &= f_4; & F_k^{(eoe)} &= f_2; & F_k^{(eoo)} &= f_6; \\ F_k^{(oee)} &= f_1; & F_k^{(oeo)} &= f_5; & F_k^{(ooe)} &= f_3; & F_k^{(ooo)} &= f_7; \end{aligned} \quad (6.33)$$

Come si vede, a parte il coefficiente numerico, le DFT al livello più basso coincidono con i campioni originali, solo che l'ordine è apparentemente piuttosto strano. Ora però assegnamo lo 0 all'indice  $e$  e l'1 all'indice  $o$ , e allora troviamo la seguente corrispondenza:

$000 \rightarrow 0$ ;  $001 \rightarrow 4$ ;  $010 \rightarrow 2$ ;  $011 \rightarrow 6$ ;  $100 \rightarrow 1$ ;  $101 \rightarrow 5$ ;  $110 \rightarrow 3$ ;  $111 \rightarrow 7$ ;

osservando la sequenza ci accorgiamo che l'insieme di indici che definisce le trasformate al livello più basso non è altro che l'espansione binaria dell'indice del campione, con i bit invertiti rispetto alla rappresentazione ordinaria da sinistra a destra. Nell'algoritmo completo della FFT si devono quindi riordinare i campioni e ricombinarli secondo le formule viste sopra per ottenere la FFT; questo algoritmo è stato inventato da Cooley e Tuckey nel 1964 ed è noto anche come implementazione Radix-2 della FFT.

Data l'importanza dell'algoritmo FFT per le sue estesissime applicazioni sia tecnologiche che scientifiche, dall'epoca di Cooley e Tuckey esso è stato migliorato in molti modi, e la ricerca continua.