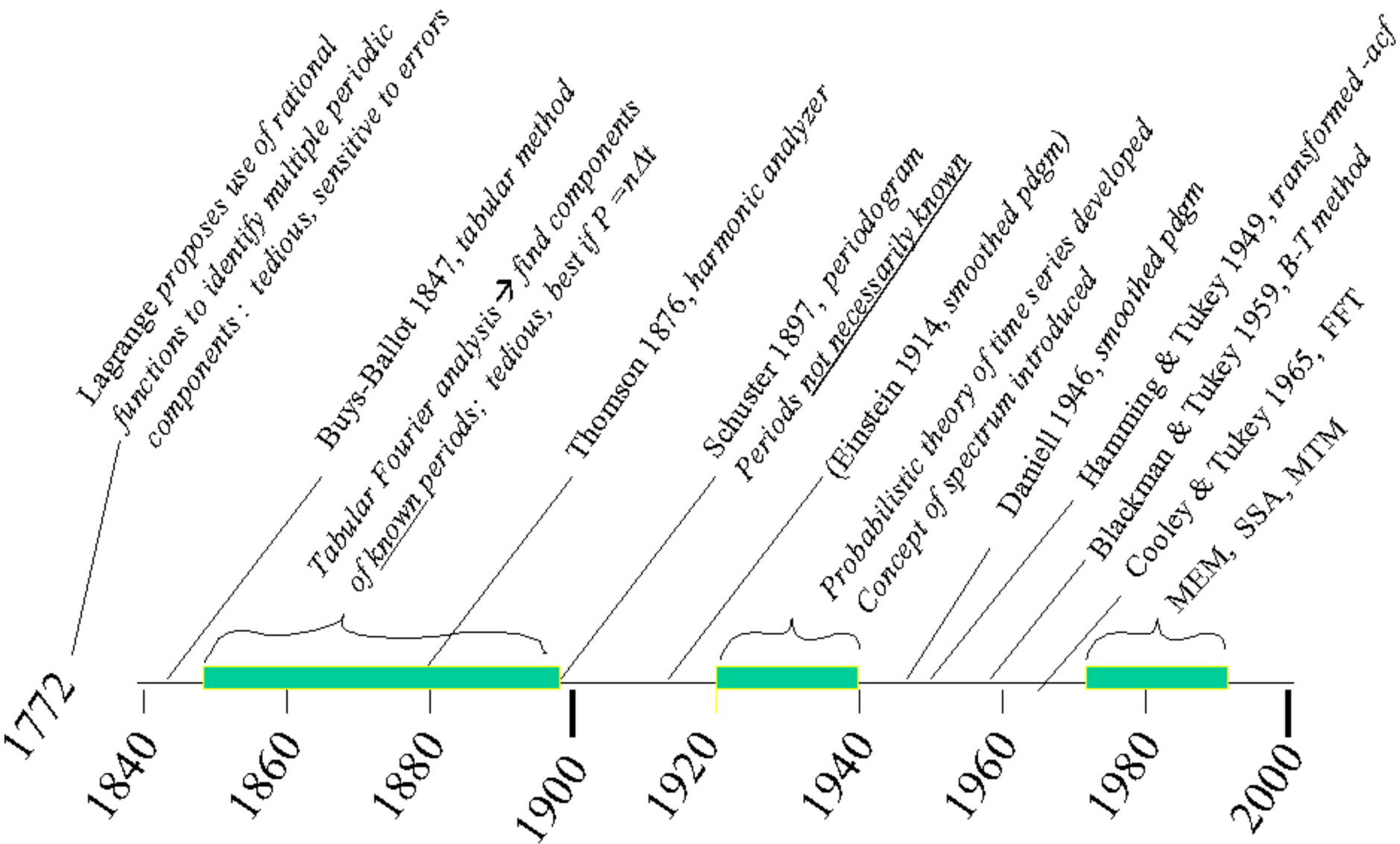
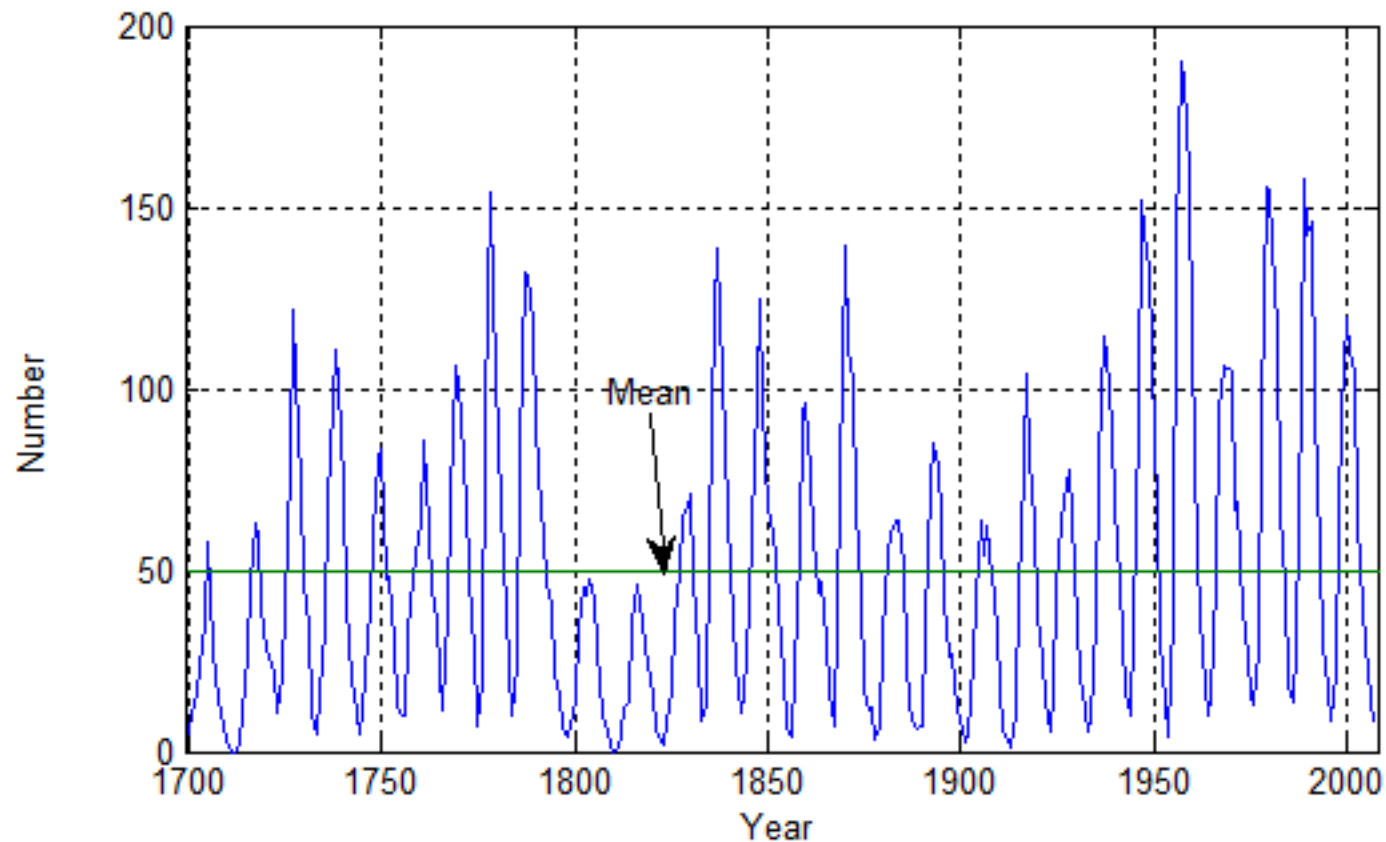


Historical Background



Source: Bloomfield 2000



Time plot of Wolf Sunspot Number, 1700-2007. This time series is known to have an irregular cycle with period near 11 years. The long-term mean is 49.9. Data source: <http://sidc.oma.be/sunspot-data/>

Densità spettrale nel caso della DFT

nel caso continuo la densità spettrale

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

rappresenta la potenza media del segnale ad una certa frequenza (angolare), o anche la fluttuazione quadratica media a questa stessa frequenza

nel caso della DFT possiamo ragionare in modo analogo

fluttuazione quadratica
media del segnale
campionato

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2 \Delta t$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \right|^2$$

$$T = N \Delta t$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k,m=0}^{N-1} F_k^* e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} F_m e^{\frac{2\pi i m n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{k,m=0}^{N-1} F_k^* F_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (m-k)n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{k,m=0}^{N-1} F_k^* F_m N \delta_{m,k}$$

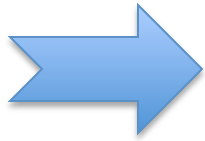
$$= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2$$

Periodogramma

$$S_k = \frac{|F_k|^2}{N^2}$$

Simmetrie di DFT e periodogramma nel caso di segnali reali

$$F_k^* = \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}} e^{-\frac{2\pi i N n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i n(N-k)}{N}} = F_{N-k}$$



$$S_k = S_{N-k}$$

inoltre (se N è pari):

$$F_0 \in \mathbb{R}$$

$$F_{N/2}^* = F_{N/2} \quad \Rightarrow \quad F_{N/2} \in \mathbb{R}$$

Esempio: spettro di un segnale sinusoidale

$$F_k = \frac{A}{2} N (\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0})$$

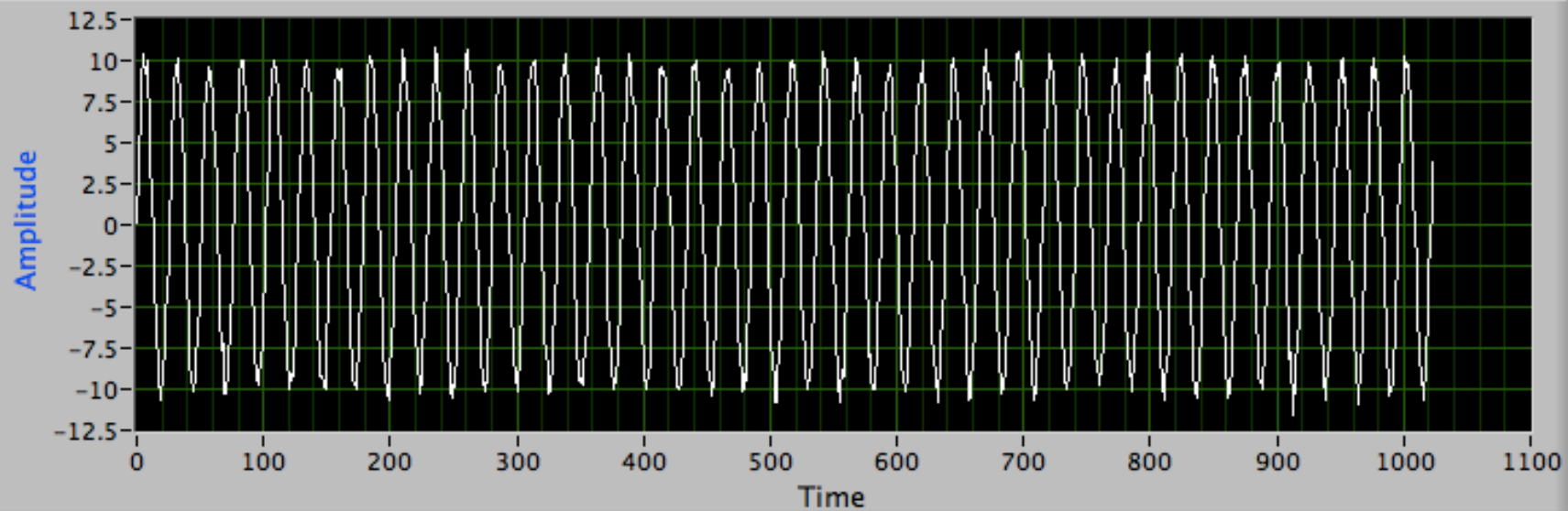
$$S_k = \frac{|F_k|^2}{N^2} = \frac{A^2}{4} (\delta_{k,k_0} + \delta_{k,N-k_0})$$

Definizione di spettro unilatero

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = \frac{|F_0|^2}{N^2} \\ S_k = \frac{1}{N^2} (|F_k|^2 + |F_{N-k}|^2) \quad (k \neq 0 \text{ e } k \neq N/2) \\ S_{N/2} = \frac{|F_{N/2}|^2}{N^2} \end{array} \right.$$

Signal

Signal

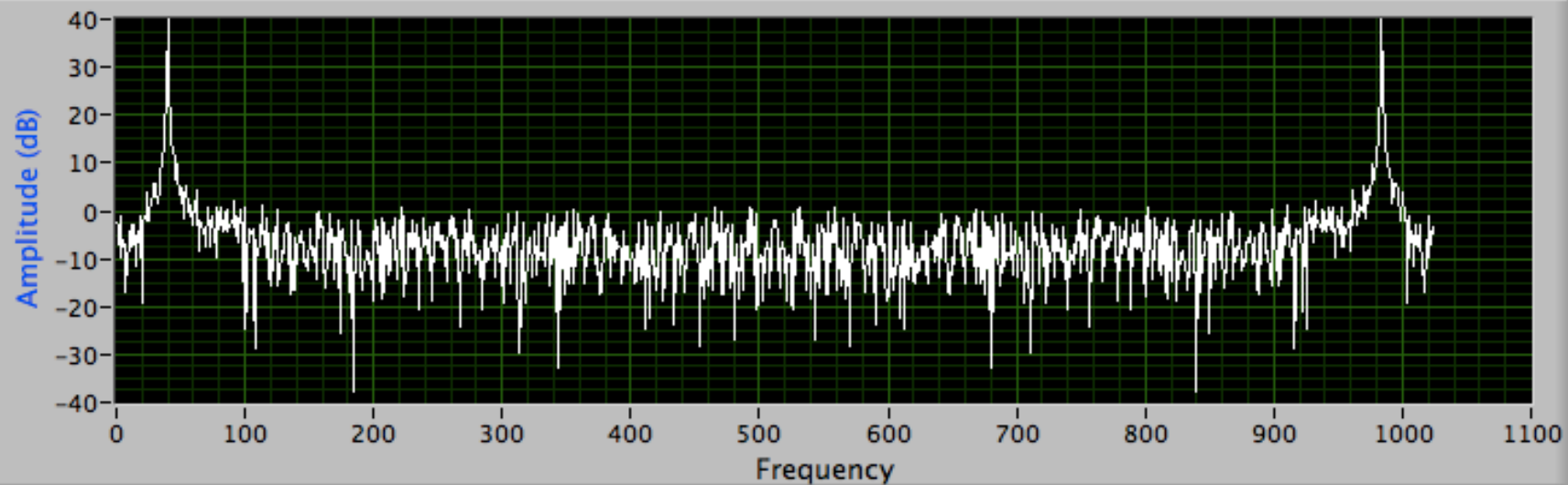


Double-sided spectral density 2

Single-sided spectral density 3

Double-sided power spectral density

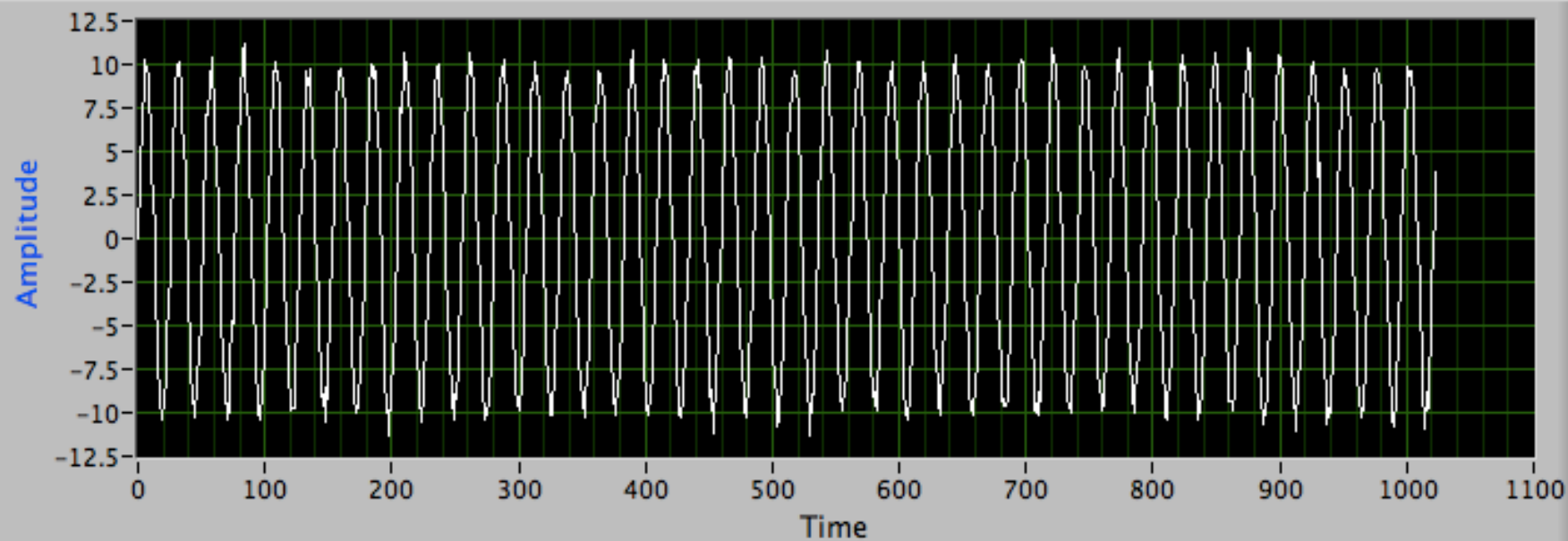
PSD



Tab Control

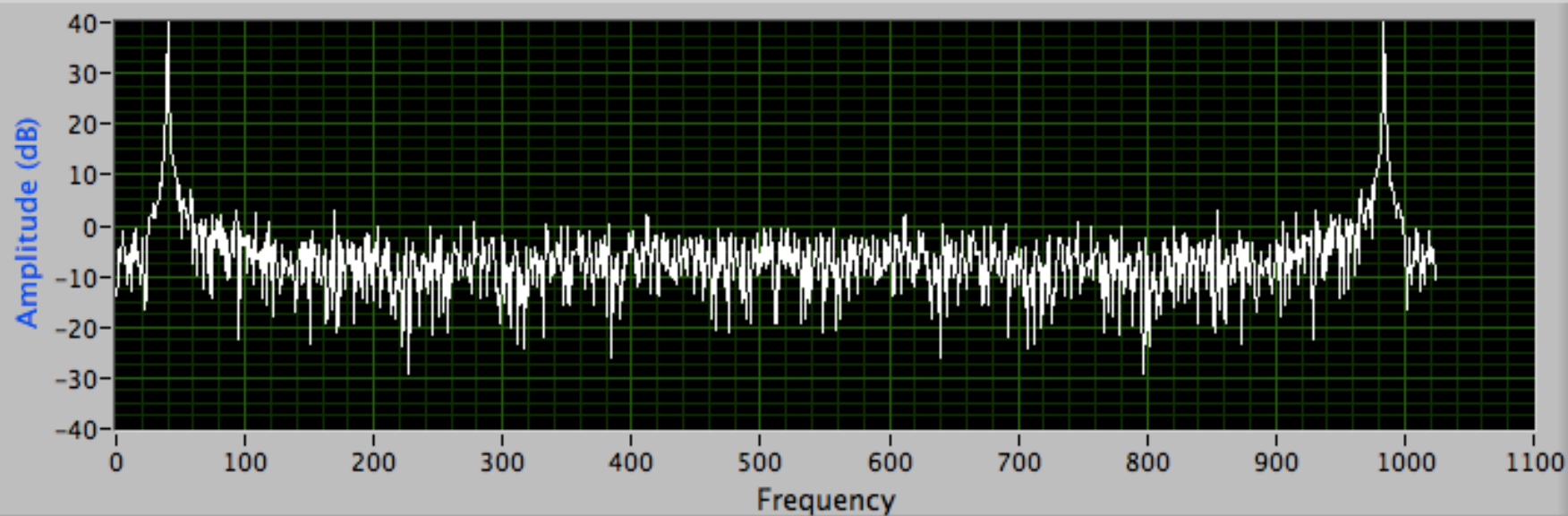
Signal

Signal



Power Spectrum

PSD



Teorema di Wiener-Kintchine nel caso della DFT

$$R_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* f_{n+m}$$

funzione di autocorrelazione nel caso di segnali campionati

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} R_m e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* f_{n+m} \right) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} f_n^* e^{\frac{2\pi i}{N}nk} f_{n+m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(n+m)k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^* e^{\frac{2\pi i}{N}nk} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} \\ &= \frac{|F_k|^2}{N} = NS_k \end{aligned}$$

la DFT della funzione di autocorrelazione è uguale a N volte la densità spettrale

$$X_k = DFT \{x_n\}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi ink}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} x_n &= IDFT \{X_k\}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} DFT \{X_k\}_{-n} \end{aligned}$$

Calcolo IDFT:

- DFT
- inversione della sequenza
- divisione per N

operazione di scambio

$$x_n = a_n + ib_n$$

$$ix_n^* = i(a_n - ib_n) = b_n + ia_n$$

$$\begin{aligned} ix_n^* &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (iX_k^*) \exp\left(-\frac{2\pi ink}{N}\right) = \\ &= \frac{1}{N} DFT \{iX_k^*\}_n \end{aligned}$$

Calcolo IDFT:

- scambio Re-Im
- DFT
- scambio Re-Im
- divisione per N