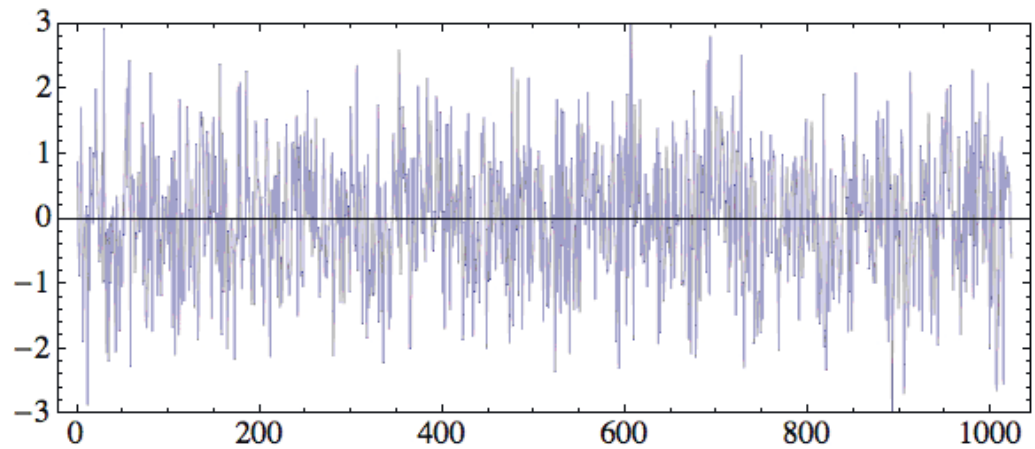
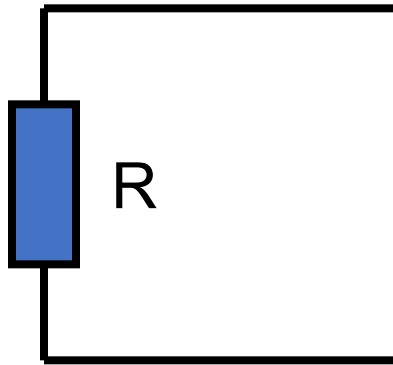


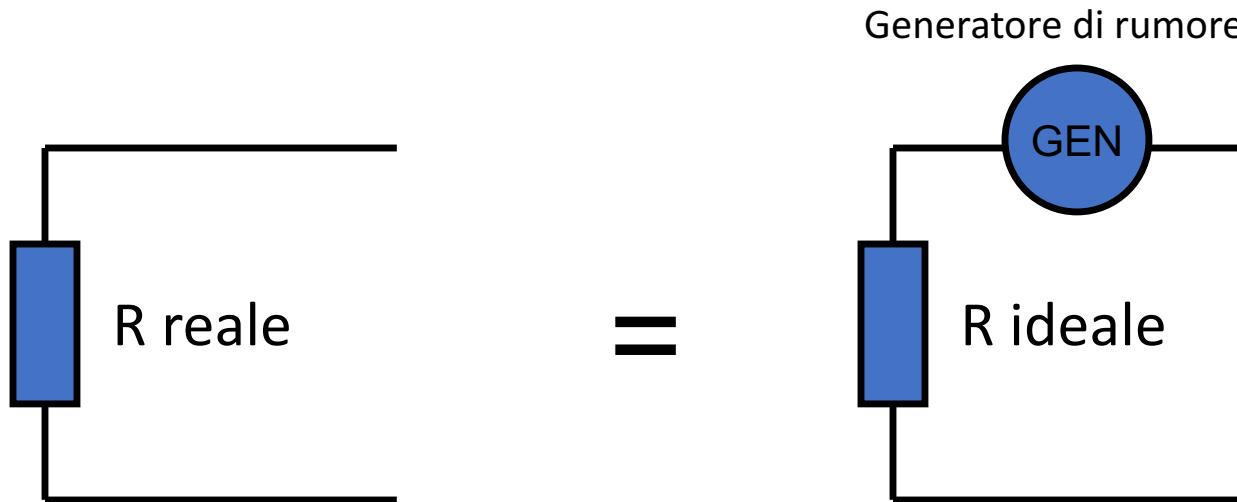
# Rumore Johnson e shot noise

Corso di Metodi di Trattamento del Segnale

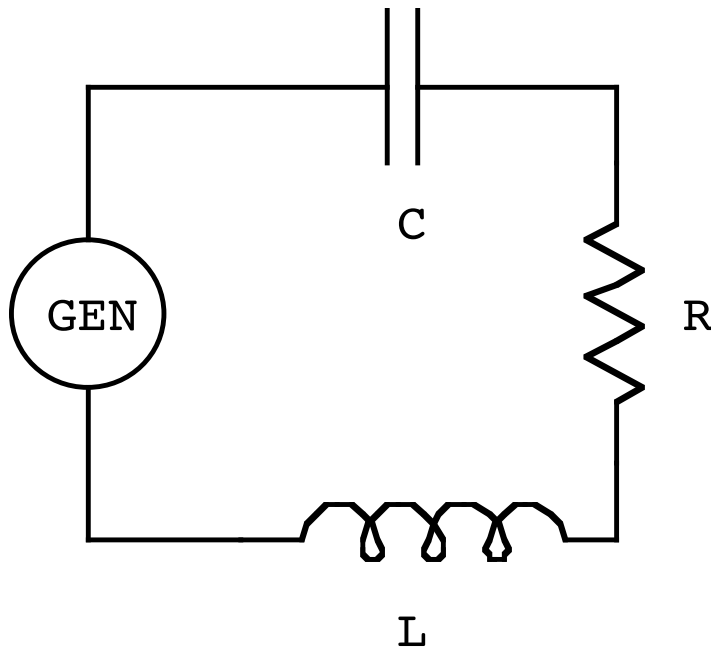
# Rumore termico (rumore Johnson)



# Dimostrazione di Pierce della formula per il rumore Johnson



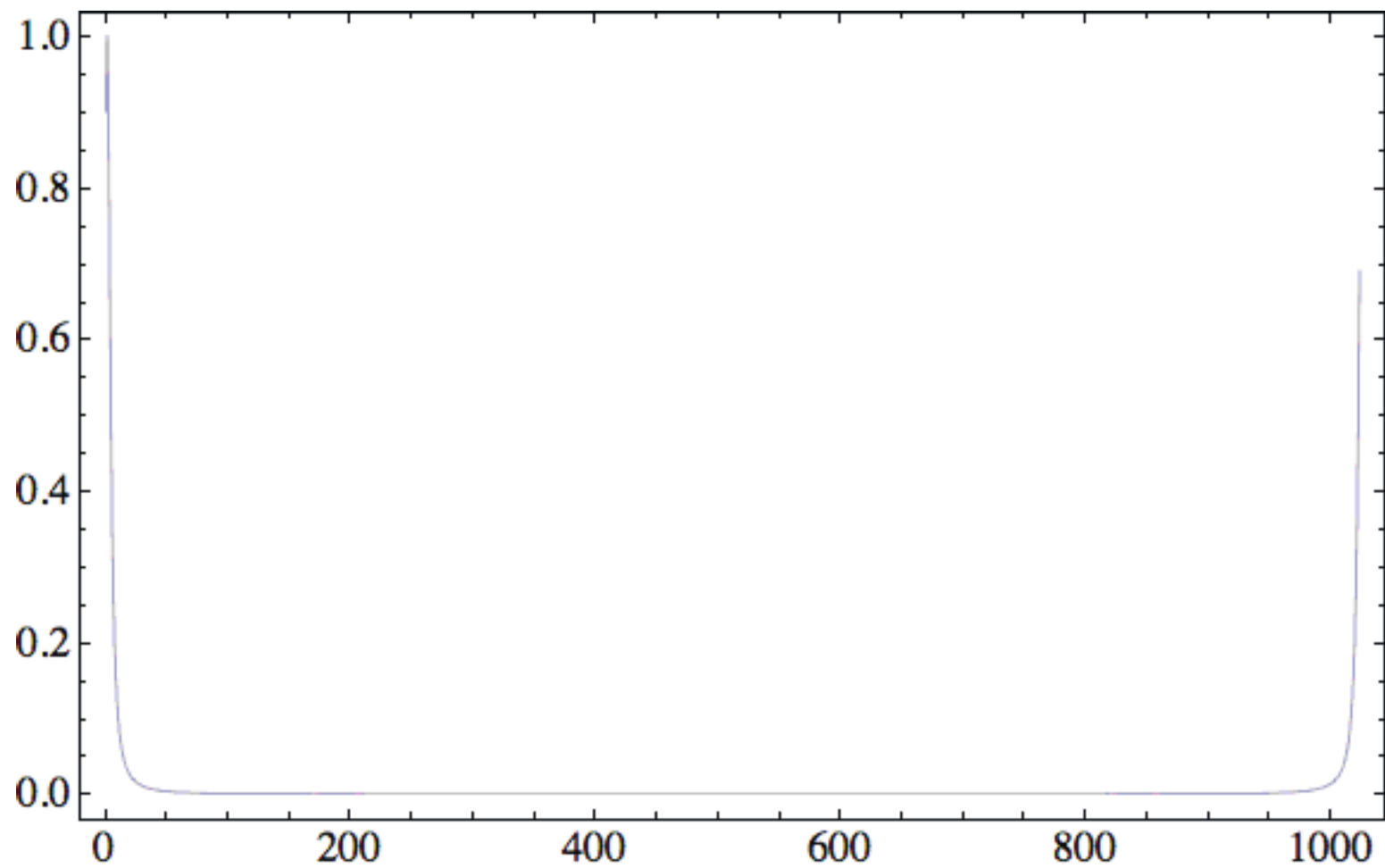
Analisi in frequenza fatta aggiungendo un circuito risonante in serie



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Gamma = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$



## Energia media nell'induttanza

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2} L I^2 \right\rangle &= \frac{L}{2} \int_0^{+\infty} \langle |I(f)|^2 \rangle df = \frac{L}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\langle |V(f)|^2 \rangle}{|Z(f)|^2} df \\ &= \frac{L}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\langle |V(f)|^2 \rangle}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2 \left( 1 - \frac{f_0^2}{f^2} \right)^2} df\end{aligned}$$

... allora prendendo un Q-valore molto alto ...

$$\left\langle \frac{1}{2} LI^2 \right\rangle = \frac{L}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\langle |V(f)|^2 \rangle}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2 \left(1 - \frac{f_0^2}{f^2}\right)^2} df$$
$$\approx \frac{L}{2} \langle |V(f_0)|^2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{R^2 + 16\pi^2 L^2 (f - f_0)^2}$$

$$\frac{(f^2 - f_0^2)^2}{f^2} = \frac{(f - f_0)^2 (f + f_0)^2}{f^2} = (\Delta f)^2 \frac{(2f_0 + \Delta f)^2}{(f_0 + \Delta f)^2} \approx 4(\Delta f)^2$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Delta f}{R^2 + 16\pi^2 L^2 (\Delta f)^2} = \frac{1}{4\pi LR} \arctan \frac{4\pi L \Delta f}{R} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{4LR}$$



$$\frac{1}{2}kT = \left\langle \frac{1}{2}LI^2 \right\rangle \approx \frac{L}{2} \left\langle |V(f_0)|^2 \right\rangle \frac{1}{4LR}$$

$$\left\langle |V(f_0)|^2 \right\rangle = 4kTR$$

teorema di Nyquist

Si noti che non c'è dipendenza dalla frequenza, si tratta di un rumore bianco.

## THERMAL AGITATION OF ELECTRICITY IN CONDUCTORS

BY J. B. JOHNSON

## ABSTRACT

*Statistical fluctuation of electric charge* exists in all conductors, producing random variation of potential between the ends of the conductor. The effect of these fluctuations has been measured by a vacuum tube amplifier and thermocouple, and can be expressed by the formula  $\bar{I}^2 = (2kT/\pi) \int_0^\infty R(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega$ .  $I$  is the observed current in the thermocouple,  $k$  is Boltzmann's gas constant,  $T$  is the absolute temperature of the conductor,  $R(\omega)$  is the *real* component of impedance of the conductor,  $Y(\omega)$  is the transfer impedance of the amplifier, and  $\omega/2\pi = f$  represents frequency. *The value of Boltzmann's constant* obtained from the measurements lie near the accepted value of this constant. *The technical aspects of the disturbance* are discussed. In an amplifier having a range of 5000 cycles and the input resistance  $R$  the power equivalent of the effect is  $\bar{V}^2/R = 0.8 \times 10^{-16}$  watt, with corresponding power for other ranges of frequency. The least contribution of *tube noise* is equivalent to that of a resistance  $R_s = 1.5 \times 10^3 i_p / \mu$ , where  $i_p$  is the space current in milliamperes and  $\mu$  is the effective amplification of the tube.

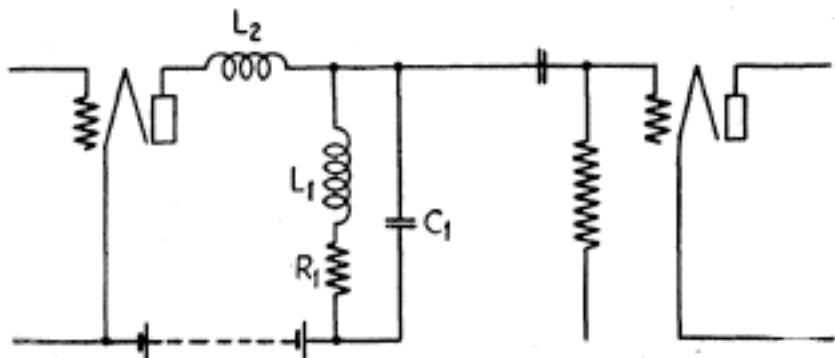


Fig. 2. Diagram of the resonant coupling.

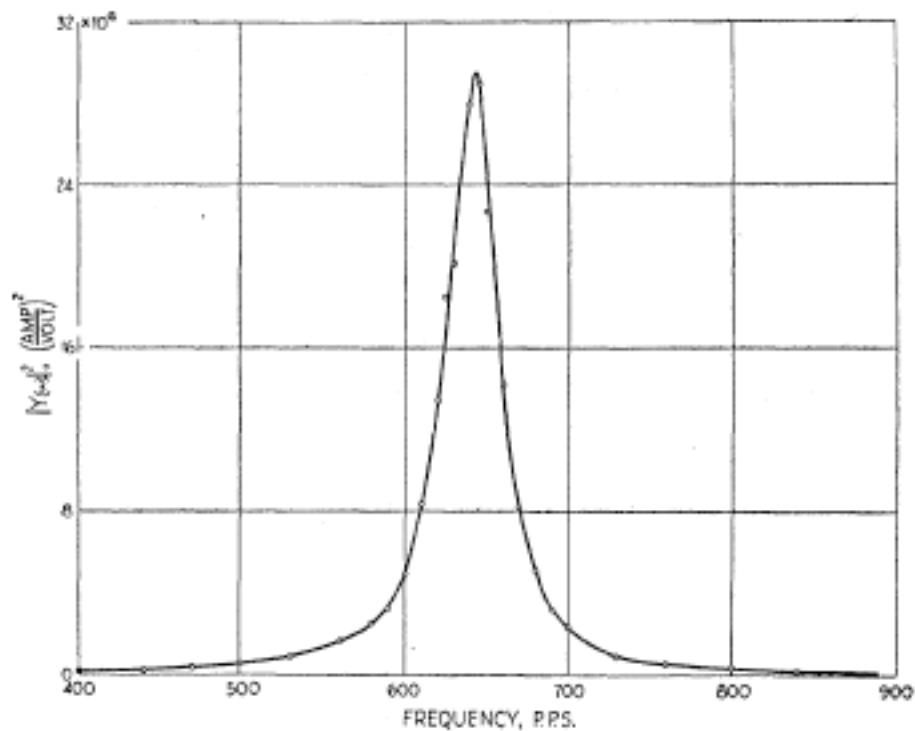


Fig. 3. Typical resonance curve.

# Determination of Boltzmann's constant

TABLE I. *Determination of Boltzmann's Constant.*

No.	$f$ p.p.s.	$T$ °K	$R(\omega) \int_0^\infty  Y(\omega) ^2 d\omega$ $\times 10^{-6}$	$\int_0^\infty  Y(\omega) ^2 R(\omega) d\omega$ $\times 10^{-10}$	$\int_0^\infty  Y(\omega) ^2 R(\omega) d\omega$ $\times 10^{-16}$	$\Delta S$ %	$\overline{I^2}$ $\times 10^6$	$k$ $\times 10^{16}$
1	1010	298	.526	.213		12.0	2.7	1.27
2	2023	"	.470	.272		26.2	2.8	1.15
3	1418	"	.508	.361		15.6	3.8	1.09
4	"	"	"	.188		42.3	1.8	.99
5	295	"	.548	.252		3.3	3.1	1.18
6	"	"	"	.202		15.8	2.0	.95
7	302	"	"	.221		12.4	2.7	1.18
8	"	"	"	.195		15.3	2.3	1.13
9	653	"	.541	.747		6.8	10.4	1.14
10	"	"	"	.645		12.9	8.6	1.30
11	1418	"	.508	.286		18.5	3.5	1.26
12	"	"	"	.161		41.3	1.7	1.09
13	1465	"	.505	1.93		18.7	21.2	1.14
14	"	"	"	1.75		20.3	19.1	1.14
15	635	"	.541	.594		8.8	8.9	1.46
16	"	"	"	.139		35.0	2.1	1.47
17	"	"	"	.597		10.9	7.8	1.28
18*	643	295	.44 ±		.439	0	11.0	1.38
19	645	297	"		.396	0	11.1	1.49
20	1830	301	"		.913	0	19.8	1.13
21	500-							
	1000	299	"		.831	0	25.9	1.64
22	"	300	"		.662	0	21.5	1.70
23	"	300	"		.832	0	26.0	1.63

\* The resonance curve for this determination is that reproduced in Fig. 3.

# Dimostrazione del teorema di Nyquist per mezzo del teorema di Campbell

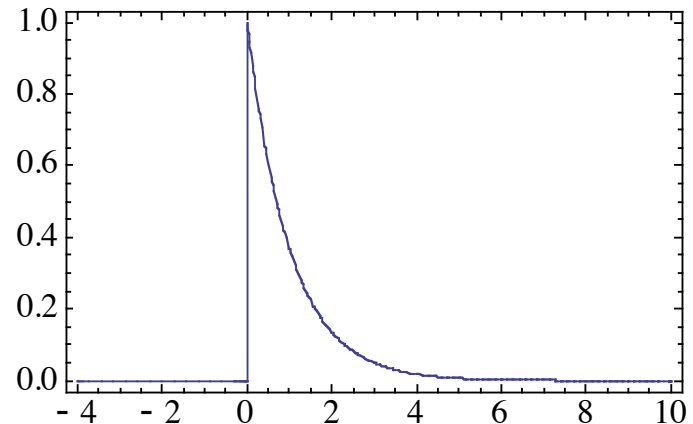
- Richiede la conoscenza della distribuzione di Poisson;
- Richiede conoscenze basilari sulla conduzione nei metalli

# Il teorema di Campbell

Consideriamo ora un sistema con una risposta impulsiva  $h(t)$

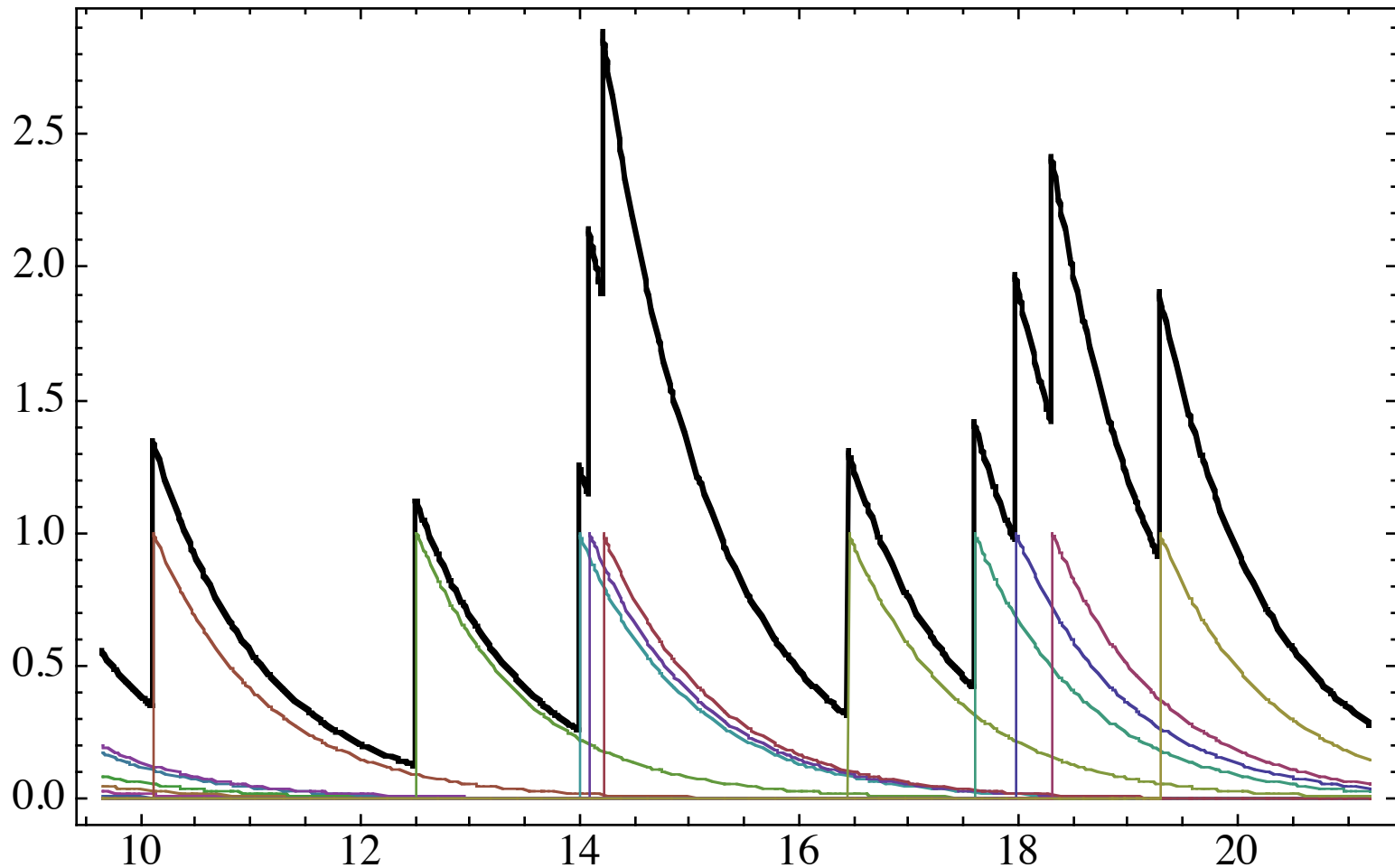
*Esempio:* nel caso del circuito RC abbiamo visto che

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{e^{-t/RC}}{RC} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

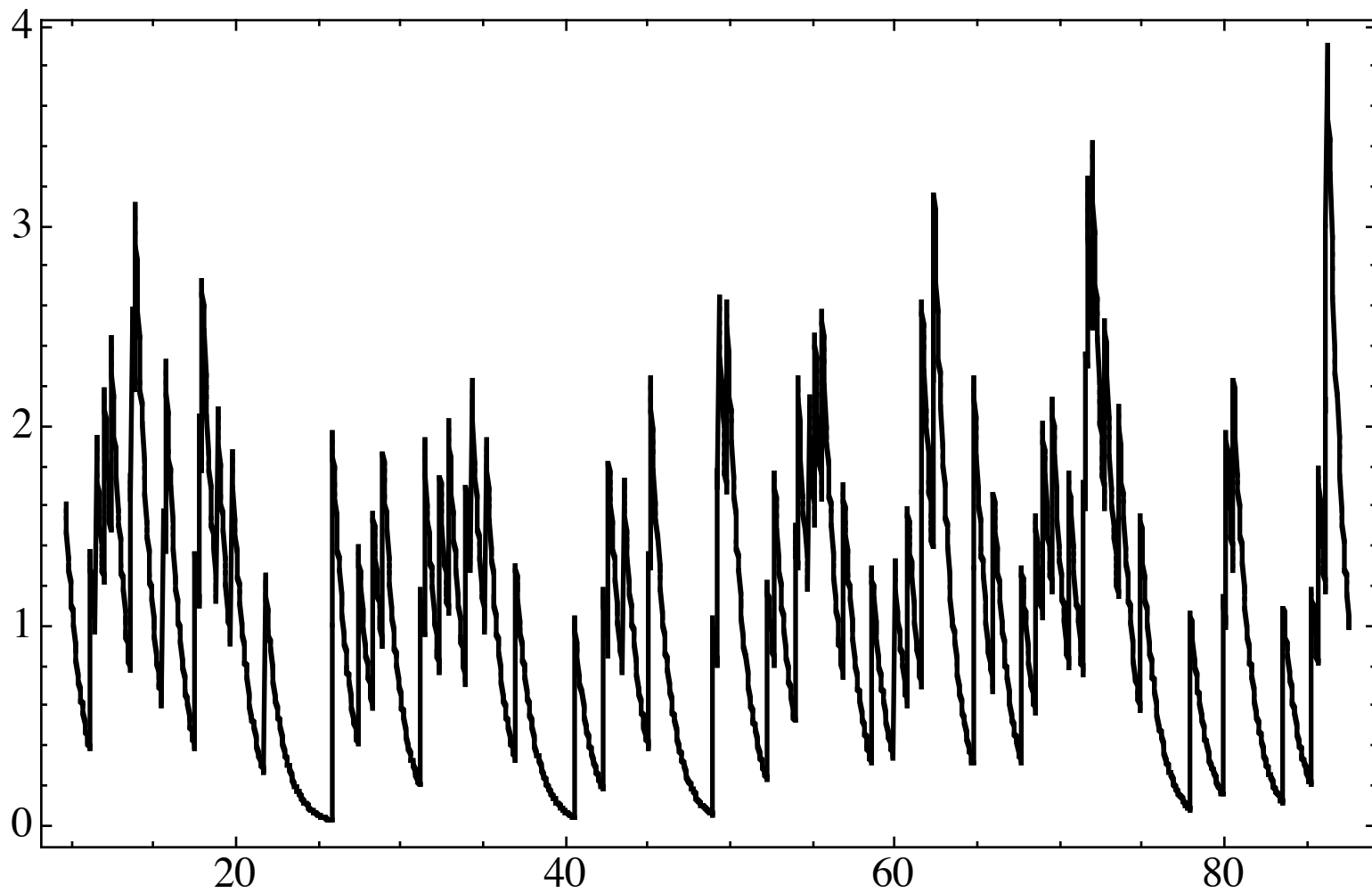


$$V_C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(s)h(t-s)ds$$

$$V_C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(s)h(t-s)ds \quad \text{limite di} \quad V_C(t) \approx \sum_k V(t_k)h(t-t_k)$$

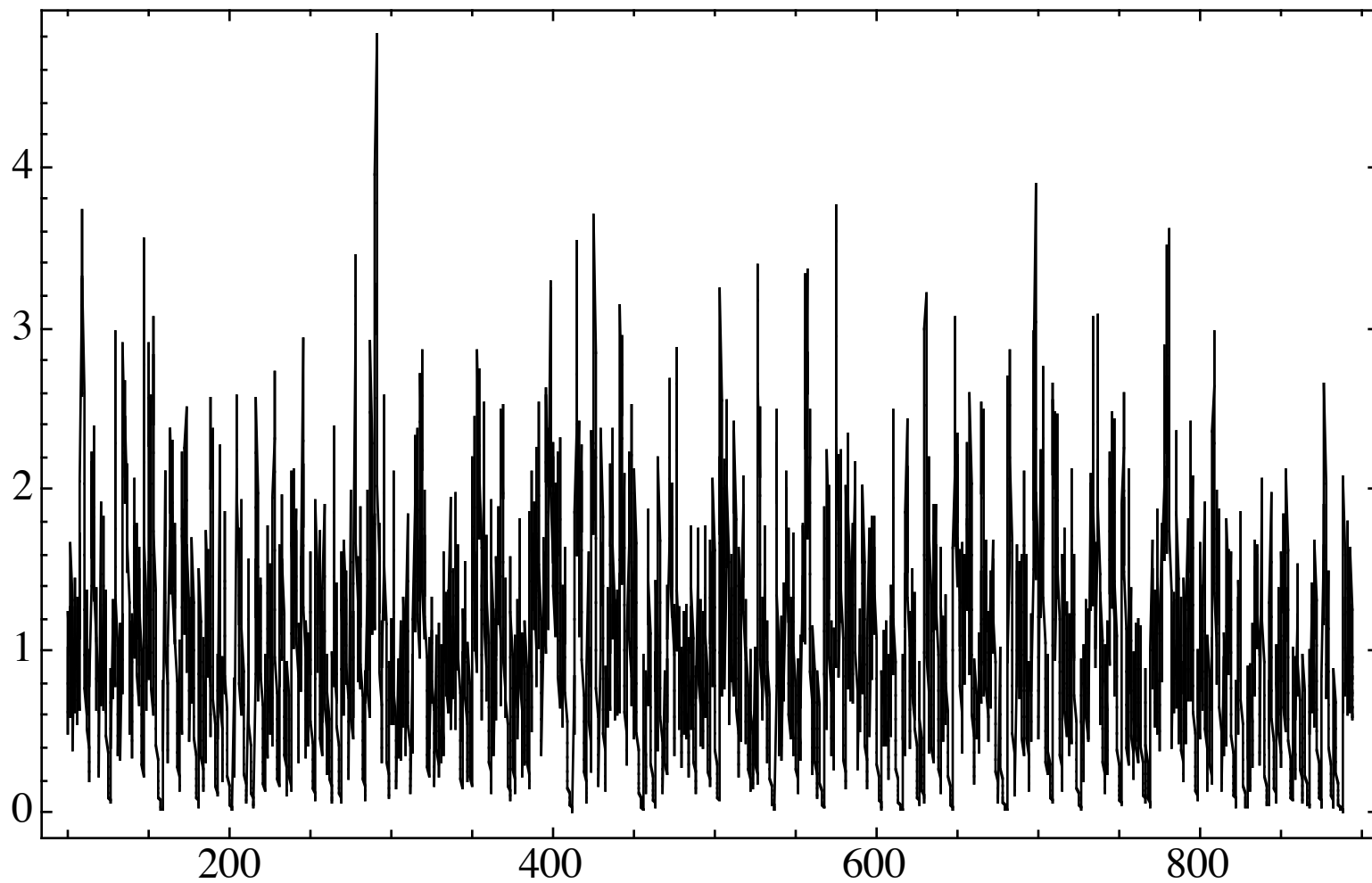


# Impulsi distribuiti Poissonianamente - I





## Impulsi distribuiti Poissonianamente - II



Valore medio e varianza della risposta del sistema ad treno di impulsi distribuiti Poissonianamente

$a$  numero di impulsi per unità di tempo

$S$  ampiezza di ciascun impulso

$adt'Sh(t'' - t')$  risposta media al tempo  $t''$  dovuta ad impulsi che arrivano al tempo  $t'$

Risposta media (es. tensione media ai capi del condensatore nel circuito RC) al tempo  $t''$ :

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{t''} adt'Sh(t'' - t') = aS \int_{-\infty}^{t''} h(t'' - t')dt'$$

ponendo  $t = t'' - t'$

$$\langle R \rangle = aS \int_0^{\infty} h(t) dt$$

Analogamente, notando che la varianza del numero di impulsi che arrivano nel tempo  $dt$  è  $adt'$

$$\begin{aligned} \text{var } R &= \int_{-\infty}^{t''} a dt' S^2 h^2(t'' - t') = aS^2 \int_{-\infty}^{t''} h^2(t'' - t') dt' \\ &= aS^2 \int_0^{\infty} h^2(t) dt \end{aligned}$$

Le formule

$$\langle R \rangle = aS \int_0^{\infty} h(t) dt$$

$$\text{var } R = aS^2 \int_0^{\infty} h^2(t) dt$$

costituiscono insieme il *teorema di Campbell*. Si dimostra inoltre facilmente che vale anche l'estensione

$$\langle R \rangle = a \langle S \rangle \int_0^{\infty} h(t) dt$$

$$\text{var } R = a \langle S^2 \rangle \int_0^{\infty} h^2(t) dt$$

Si noti ora che ...

$$\int_0^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$h(t) = 0$  se  $t < 0$

teor. di Parseval

parità di  $H(f)$  dovuta  
alla realtà di  $h(t)$

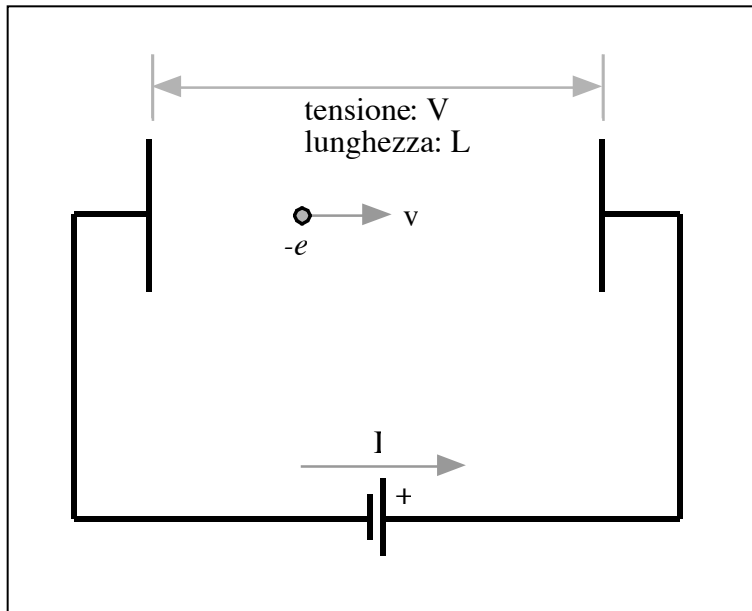
quindi

$$\begin{aligned}\text{var } R &= \int_0^{\infty} \langle |R(f)|^2 \rangle df \\ &= a \langle S^2 \rangle \int_0^{\infty} h^2(t) dt = 2a \langle S^2 \rangle \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df\end{aligned}$$

Se assumiamo che la risposta impulsiva sia approssimabile per mezzo di una funzione delta, allora  $H(f) = 1$ , e quindi la varianza della risposta per unità di frequenza del sistema è

$$\langle |R(f)|^2 \rangle = 2a \langle S^2 \rangle$$

# Ultimo preliminare: una versione semplificata del teorema di Shockley-Ramo



- Forza che agisce sull'elettrone
- Lavoro fatto per uno spostamento  $\Delta x$
- Lavoro fatto dal generatore di tensione

$$qV/L$$

$$\frac{qV}{L} \Delta x$$

$$I \cdot V \Delta t$$

$$\frac{qV}{L} \Delta x = I \cdot V \Delta t$$

poiché  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  allora

$$I = q \frac{v}{L}$$

# Applicazione del teorema di Campbell al rumore Johnson

Consideriamo gli impulsi di carica associati agli spostamenti degli elettroni tra una collisione e l'altra all'interno di una resistenza  $R$  che ha lunghezza  $L$  e sezione  $A$

$a$  = frequenza delle collisioni

$S$  = ampiezza di un singolo impulso di carica

In questo modo il prodotto  $aS$  è una corrente, e dal teor. di Campbell si trova

$$\langle |R(f)|^2 \rangle = 2aS^2 \quad \longrightarrow \quad \langle |\Delta I(f)|^2 \rangle = 2a \langle S^2 \rangle$$



Stima del numero di impulsi per unità di tempo  $a$

$n$  = densità media degli elettroni nel conduttore

$\tau$  = tempo medio tra due collisioni (per un singolo el.)

Allora numero di el. nella resistenza =  $nAL$

Numero di collisioni per unità di tempo  $a = nAL/\tau$

Stima dell'ampiezza quadratica media  $\langle S^2 \rangle$

Corrente dovuta al movimento  
di un elettrone

$$I = q \frac{v}{L}$$

Singolo impulso di carica per un  
movimento che dura  $\Delta t$  da una  
collisione all'altra


$$S = q \frac{v}{L} \Delta t$$

Allora

$v$  e  $\Delta t$  sono statisticamente indipendenti

$$\langle S^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{qv\Delta t}{L} \right)^2 \right\rangle = \frac{q^2}{L^2} \langle v^2 \rangle \langle (\Delta t)^2 \rangle$$

Però noi sappiamo che  $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{kT}{2}$

  $\langle v^2 \rangle = \frac{kT}{m}$

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle = \int_0^{\infty} (\Delta t)^2 \frac{1}{\tau} e^{-\Delta t/\tau} d\Delta t = \tau^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2\tau^2$$

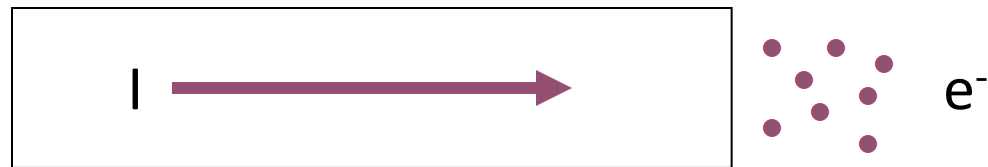
quindi

$$\langle S^2 \rangle = \frac{q^2}{L^2} \langle v^2 \rangle \langle (\Delta t)^2 \rangle = \frac{q^2}{L^2} \cdot \frac{kT}{m} \cdot 2\tau^2 = 2 \frac{q^2 \tau^2 kT}{mL^2}$$

Infine

$$\begin{aligned}\langle |I(f)|^2 \rangle &= 2a \langle S^2 \rangle = 2 \frac{nAL}{\tau} \cdot 2 \frac{q^2 \tau^2 kT}{mL^2} \\ &= 4 \frac{nq^2 \tau}{m} \cdot \frac{A}{L} kT = 4\sigma \cdot \frac{A}{L} kT \\ &= 4 \frac{kT}{R} \\ \langle |V(f)|^2 \rangle &= R^2 \langle |I(f)|^2 \rangle = 4kTR\end{aligned}$$

# Applicazione del teorema di Campbell allo shot noise



carattere “granulare” della corrente elettrica

$$a = \frac{I}{q}$$

$$S^2 = q^2$$

quindi  $\langle |I(f)|^2 \rangle = 2aS^2 = 2\frac{I}{q}q^2 = 2Iq$

# Esempi

1. Rumore Johnson totale di una resistenza  $R = 1 \text{ M}\Omega$  @  $300 \text{ K}$  con  $1 \text{ KHz}$  di larghezza di banda

$$\sigma_V^2 = \langle |V|^2 \rangle = 4kTRB$$

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &= \langle |V(f)|^2 \rangle \cdot (1 \text{ KHz}) \\ &= 4 \cdot (1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K}) \cdot (1 \text{ M}\Omega) \cdot (1 \text{ KHz}) \\ &\approx 1.7 \cdot 10^{-11} \text{ V}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_V \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ V} = 4 \mu\text{V}$$

2. Shot noise totale per una corrente  $I = 0.1$  A con 1 KHz di larghezza di banda

$$\sigma_I^2 = \langle |I|^2 \rangle = 2qIB$$

$$\begin{aligned}\sigma_I^2 &= \langle |I(f)|^2 \rangle \cdot (1 \text{ KHz}) \\ &\approx 2 \cdot (0.1 \text{ A}) \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1 \text{ KHz}) \\ &= 3.2 \cdot 10^{-17} \text{ A}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_I \approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ A} = 6 \text{ nA}; \quad \frac{\sigma_I}{I} \approx 6 \cdot 10^{-8}$$

# Harry Nyquist (7/2/1889 – 4/4/1978)

Scienziato che ha lavorato ai laboratori Bell, ha dato contributi fondamentali alla teoria dei sistemi e alla teoria delle telecomunicazioni.

Tra i suoi contributi, ricordiamo:

- è stato autore di 138 brevetti
- miglioramenti a telegrafia e fax
- ha contribuito alla tecnologia della TV analogica
- autore del "criterio di Nyquist" sulla stabilità dei circuiti con retroazione
- il suo nome è legato al teorema del campionamento (teorema di "Nyquist-Shannon")
- ha prodotto la prima spiegazione teorica del rumore Johnson





# A hard working problem solver

His daughter Phoebe: “I think one of the ways he succeeded in accomplishing so much is that he was very disciplined. The alarm always rang at 6:45 at our house. He always got right up. While mother fixed his breakfast he got dressed and was out the door punctually at 7:30. You could set your watch by it, but he never hurried. He walked a mile to the train station and rode in to NYC. His return home was just as regular, so we could plan on eating at 6:15 PM. Some days he took the ferry across the Hudson River instead of the tubes under the water because the air was fresher. He did like being outdoors. I have a picture of him of him stretched out on the lawn taking a nap. He always reserved Saturday for household chores and Sunday was church, a good dinner and time to read or think. He frequently had a legal size yellow notebook on his lap and started figuring those equations. I suppose he couldn't let go of a problem until he got it solved.”

(from K. J. Åström)

# Keys to Success

- **Talent and creativity**
- **Ability to find good stimulating environments**
- **Curiosity**
- **Energy**
- **Searched fundamental problems**
- **Catch the essence abstract away details**
- **Sound use of mathematics**

(from K. J. Åström)

# A Modest Person

- **My impressions and feelings as a stranger in the new country: I don't think it was any different from what it would have been if I had gone to Karlstad or Stockholm.**
- **Distinctions I have received: I have received honors for technical work.**
- **Literary works, books, etc: I have published a few technical papers.**
- **Inventions discoveries, other notable achievements: I have been granted a number of patents.**

(from K. J. Åström)

# La dimostrazione di Nyquist

## THERMAL AGITATION OF ELECTRIC CHARGE IN CONDUCTORS\*

BY H. NYQUIST

### ABSTRACT

The electromotive force due to thermal agitation in conductors is calculated by means of principles in thermodynamics and statistical mechanics. The results obtained agree with results obtained experimentally.

DR. J. B. JOHNSON<sup>1</sup> has reported the discovery and measurement of an electromotive force in conductors which is related in a simple manner to the temperature of the conductor and which is attributed by him to the thermal agitation of the carriers of electricity in the conductors. The work to be reported in the present paper was undertaken after Johnson's results were available to the writer and consists of a theoretical deduction of the electromotive force in question from thermodynamics and statistical mechanics.<sup>2</sup>

Consider two conductors each of resistance  $R$  and of the same uniform temperature  $T$  connected in the manner indicated in Fig. 1. The electromotive force due to thermal agitation in conductor I causes a current to be set up in the circuit whose value is obtained by dividing the electromotive force by  $2R$ . This current causes a heating or absorption of power in conductor II, the absorbed power being equal to the product of  $R$  and the square of the current. In other words power is transferred from conductor I to conductor II. In

precisely the same manner it can be deduced that power is transferred from conductor II to conductor I. Now since the two conductors are at the same temperature it follows directly from the second law of thermodynamics that the power flowing in one direction is exactly equal to that flowing in the other direction. It will be noted that no assumption has been made as to the nature of the two conductors. One may be made of silver and the other of lead, or one may be metallic and the other electrolytic, etc.

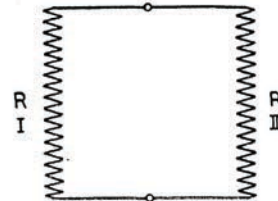


Fig. 1.

La formula di Nyquist è una forma di "teorema di fluttuazione-dissipazione"

Un altro semplice teorema di fluttuazione-dissipazione si può dimostrare facilmente per un oscillatore classico

Uguagliando l'energia termica media e l'energia potenziale media, si trova

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle$$



$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m\omega_0^2}$$

# Currents to Conductors Induced by a Moving Point Charge

W. SHOCKLEY

*Bell Telephone Laboratories, Inc., New York, N. Y.*

(Received May 14, 1938)

General expressions are derived for the currents which flow in the external circuit connecting a system of conductors when a point charge is moving among the conductors. The results are applied to obtain explicit expressions for several cases of practical interest.

636

VOLUME 9, OCTOBER, 1938

JOURNAL OF APPLIED PHYSICS

## Currents Induced by Electron Motion\*

SIMON RAMO†, ASSOCIATE MEMBER, I.R.E.

*Summary*—A method is given for computing the instantaneous current induced in neighboring conductors by a given specified motion of electrons. The method is based on the repeated use of a simple equation giving the current due to a single electron's movement and is believed to be simpler than methods previously described.

584

*Proceedings of the I.R.E.*

*September, 1939*

## La formula di reciprocità di Green

Supponiamo che le cariche  $q_1, q_2, \dots$  in posizioni indicate con 1, 2, ... producano i potenziali  $V_1, V_2 \dots$  nelle medesime posizioni. Analogamente, le cariche  $q'_1, q'_2, \dots$  producono i potenziali  $V'_1, V'_2 \dots$  Allora

$$V_n = \sum_{k \neq n} \frac{q_k}{r_{kn}}$$

e quindi troviamo

$$\sum_n q'_n V_n = \sum_{k, n (k \neq n)} \frac{q'_n q_k}{r_{kn}} = \sum_n q_n V'_n$$

Se ora consideriamo cariche estese  $Q_k$  e le decomponiamo nelle cariche elementari componenti, si vede subito che si può usare la formula

$$\sum_n q'_n V_n = \sum_n q_n V'_n$$

per ottenere

$$\sum_k Q'_k V_k = \sum_k Q_k V'_k$$



Ora consideriamo i casi speciali

$$Q_1 = 1; \quad Q_2 = Q_3 = Q_4 = \dots = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = p_{11}; \quad V_2 = p_{12}; \quad \dots$$

$$Q'_1 = 0; \quad Q'_2 = 1; \quad Q'_3 = Q'_4 = \dots = 0 \quad \Rightarrow \quad V'_1 = p_{21}; \quad V'_2 = p_{22}; \quad \dots$$

da cui si trova

$$\sum_k Q'_k V_k = p_{12}; \quad \sum_k Q_k V'_k = p_{21}$$

e quindi

$$p_{12} = p_{21}$$

vale a dire che il potenziale indotto sull'elettrodo 2 da una carica unitaria sull'elettrodo 1 è uguale al potenziale indotto sull'elettrodo 1 da una carica unitaria sull'elettrodo 2 (con tutti gli altri elettrodi scarichi).

Utilizzando il principio di sovrapposizione troviamo allora:

$$V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 + \dots$$

$$V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 + \dots$$

...

e in seguito, invertendo il sistema lineare troviamo

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 + \dots$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 + \dots$$

...

dove i coefficienti  $C_{ij}$  sono le capacità interelettrodiche, e vale la relazione

$$C_{ij} = C_{ji}$$

dal momento che l'inversa di una matrice simmetrica è ancora simmetrica.

# Il teorema di Shockley-Ramo

Ora consideriamo un'altra coppia di situazioni in cui si considera una carica elementare in posizione  $\mathbf{r}$  e uno specifico elettrodo (2)

Situazione 1:

$$Q_1 = 0; \quad V_1 = V_1(\mathbf{r}); \quad V_2 = V; \quad V_3 = V_4 = \dots = 0$$

Situazione 2:

$$Q'_1 = q(\mathbf{r}) = q; \quad Q'_2 = Q; \quad V'_2 = V'_3 = V'_4 = \dots = 0$$

Allora

$$\sum_k Q'_k V_k = \sum_k Q_k V'_k \quad \Rightarrow \quad qV_1(\mathbf{r}) = QV$$

## rappresentazione dei conduttori nell'articolo di Shockley

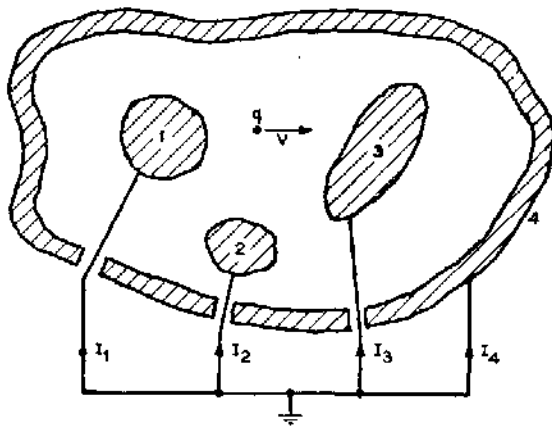


FIG. 1. Schematic representation of conductors and currents.

$$qV_1(\mathbf{r}) = QV$$



derivata  
rispetto al  
tempo

## rappresentazione dei conduttori nell'articolo di Ramo

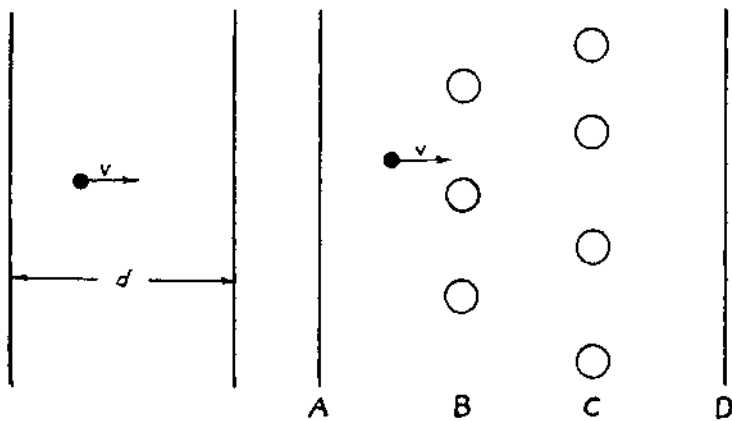


Fig. 1

Fig. 2

$$\begin{aligned} q \frac{d}{dt} V_1(\mathbf{r}) &= q \nabla V_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= q \nabla V_1 \cdot \mathbf{v} \\ &= V \frac{dQ}{dt} = VI \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = VI$$

e quindi, se trattiamo un caso quasi 1-dimensionale, campo e velocità sono paralleli, e inoltre

$$E = V/L$$

e perciò ritroviamo

$$I = \frac{qv}{L}$$

Il teorema di Shockley-Ramo ha molte applicazioni nello studio del trasporto di carica.

## **Nota sull'applicazione del teorema di Shockley-Ramo alle coppie elettrone-lacuna generate nei fotodiodi:**

nel caso di una coppia elettrone-lacuna, ciascuna delle cariche contribuisce al percorso che corrisponde ad una frazione della lunghezza totale.

La somma dei due contributi è equivalente allo spostamento di un'unica carica attraverso l'intera lunghezza  $L$ .

In un caso del genere la coppia contribuisce alla carica totale trasportata come se fosse un solo portatore di carica.