

Corso di Metodi di Trattamento del Segnale

MODELLI STATICI, DINAMICI E DI RUMORE DEGLI AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

1. ANALISI STATICA

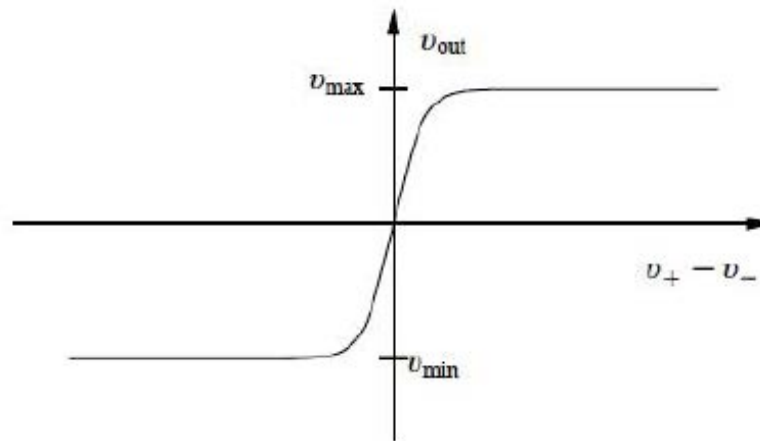


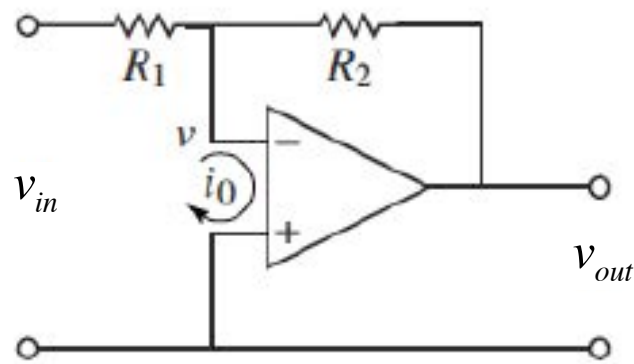
Figure 3.8: Input/output characteristics of an operational amplifier. The differential input is given by $v_+ - v_-$. The output voltage is a linear function of the input in a small range around 0, with saturation at $v_{\min}$ and $v_{\max}$. In the linear regime the op amp has high gain.

$$\text{sat}(x; a, b) = \begin{cases} a & x < a \\ x & a \leq x \leq b \\ b & x > b \end{cases}$$

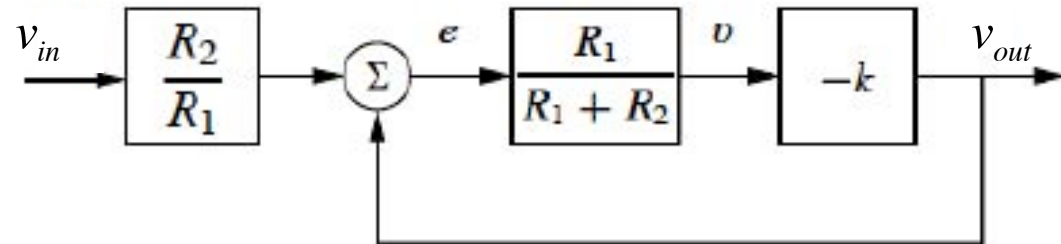


approssimazione spline della
caratteristica di ingresso-
uscita dell'OpAmp

GUADAGNO INFINITO



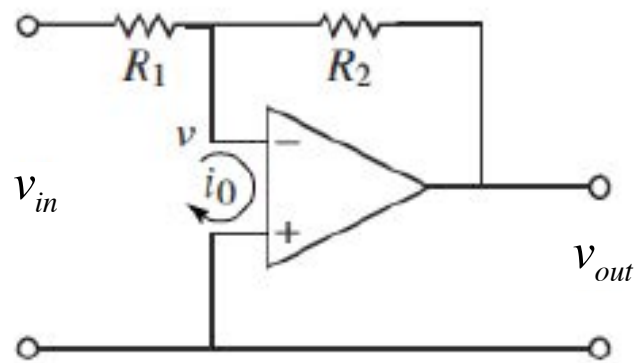
(a) Amplifier circuit



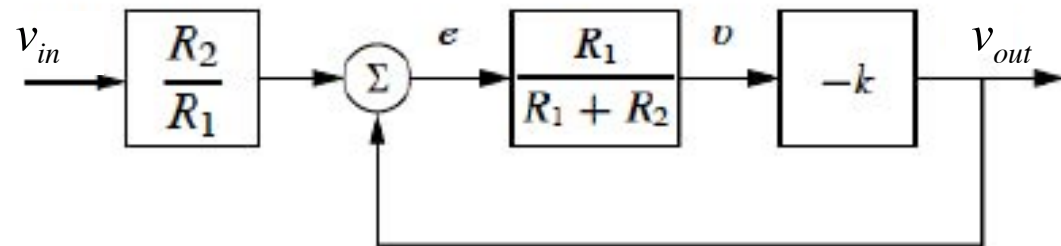
(b) Block diagram

$$v \approx 0; \quad I_1 = \frac{v_{in}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{v_{out}}{R_2}; \quad I_1 + I_2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_{in}$$

GUADAGNO FINITO



(a) Amplifier circuit

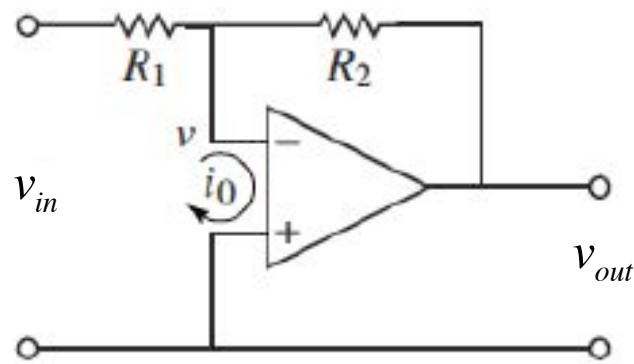


(b) Block diagram

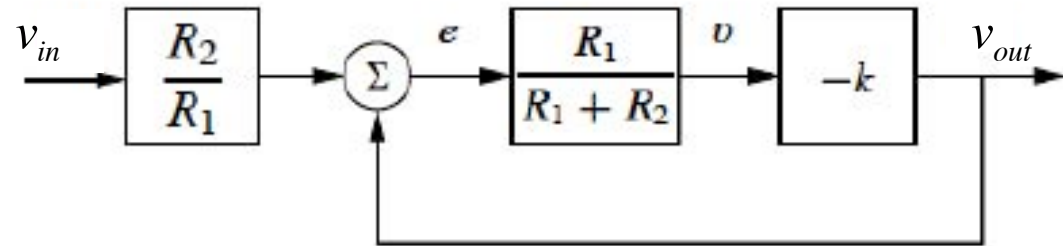
$$I_1 = \frac{v_{in} - v}{R_1}; \quad I_2 = \frac{v_{out} - v}{R_2}; \quad I_1 + I_2 \approx 0; \quad v_{out} = -Gv$$

$$\Rightarrow \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v \Rightarrow v = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{R_2}{R_1} v_{in} + v_{out} \right)$$

GUADAGNO FINITO



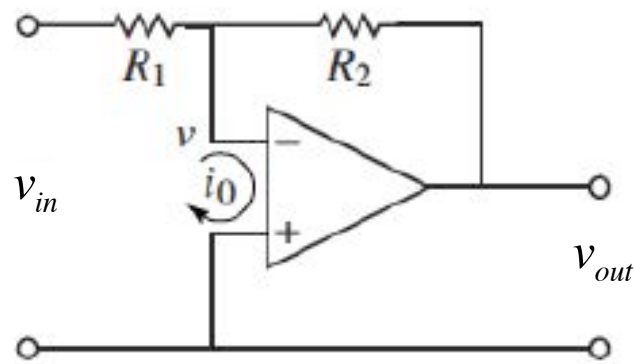
(a) Amplifier circuit



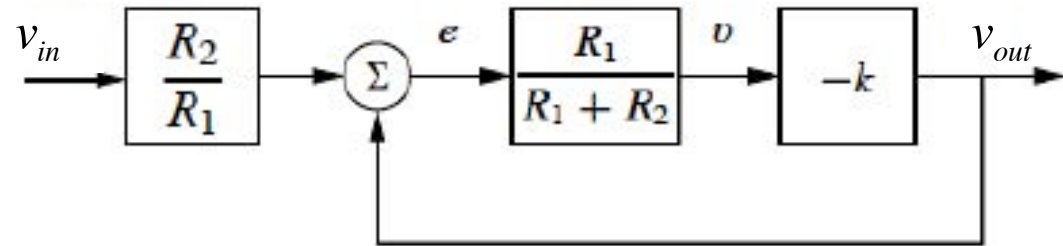
(b) Block diagram

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_1 G}{R_1 G + R_1 + R_2} \right) v_{in}$$

2. DINAMICA DEGLI OP-AMP



(a) Amplifier circuit



(b) Block diagram

Espansione in serie

$$v_{out}(t + \Delta t) \approx v_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \Delta t$$

$$= \alpha v_{out}(t) - \beta v(t)$$

Descrizione del feedback

$$\begin{aligned} \frac{dv_{out}}{dt} &= -\frac{1-\alpha}{\Delta t} v_{out}(t) - \frac{\beta}{\Delta t} v(t) \\ &= -\frac{1}{\tau} v_{out}(t) - bv(t) \\ &= -Bv_{out}(t) - bv(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_{out}}{dt} &= -\frac{1-\alpha}{\Delta t} v_{out}(t) - \frac{\beta}{\Delta t} v(t) \\
 &= -\frac{1}{\tau} v_{out}(t) - bv(t) \\
 &= -Bv_{out}(t) - bv(t)
 \end{aligned}$$

nel caso statico $v_{out} = -b\tau v = -\frac{b}{B}v = -Gv$

B è l'inverso di un tempo caratteristico e corrisponde quindi ad una frequenza caratteristica e inoltre $b = BG = \text{gain-bandwidth product (GBP)}$

Inoltre, da

$$\frac{dv_{out}}{dt} = -Bv_{out}(t) - bv(t) = -Bv_{out}(t) - BGv(t)$$

si trova anche

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{1}{G} \left(v_{out}(t) + \tau \frac{dv_{out}}{dt} \right) \\ &= -\frac{\tau}{G} \left(Bv_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \right) = -\frac{1}{BG} e^{-Bt} \frac{d}{dt} \left(e^{Bt} v_{out}(t) \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$v_{out}(t) = -BG e^{-Bt} \int_0^t e^{Bt'} v(t') dt' = -BG \int_0^t e^{-B(t-t')} v(t') dt'$$

Rianalisi dell'amplificatore invertente con il modello dinamico appena trovato

$$I_1 = \frac{v_{in} - v}{R_1}; \quad I_2 = \frac{v_{out} - v}{R_2}; \quad I_1 + I_2 \approx 0;$$

$$v(t) = -\frac{1}{BG} \left(Bv_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v = -\frac{1}{BG} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \left(Bv_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow v_{in} = - \left[\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1 + R_2}{GR_2} \right] v_{out} - \frac{R_1 + R_2}{BGR_2} \frac{dv_{out}}{dt}$$

Ponendo

$$\gamma\delta = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1 + R_2}{GR_2}; \quad \delta = \frac{R_1 + R_2}{BGR_2}$$

si trova

$$v_{in} = -\gamma\delta v_{out} - \delta \frac{dv_{out}}{dt} = -\delta \left(\gamma v_{out} + \frac{dv_{out}}{dt} \right) = -\delta e^{-\gamma t} \frac{d}{dt} (e^{\gamma t} v_{out})$$

e quindi

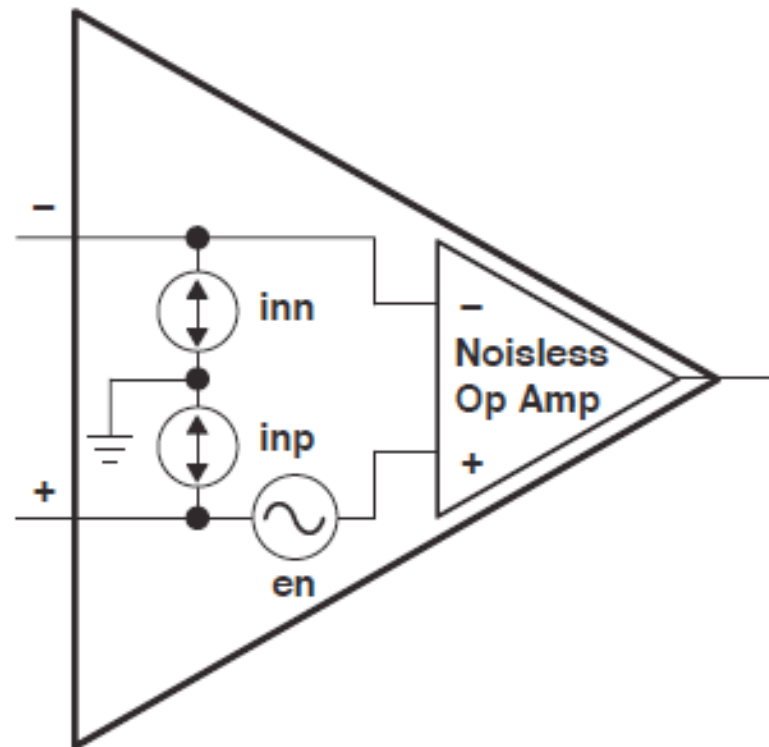
$$v_{out}(t) = v_{out}(0) - \frac{1}{\delta} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} v_{in}(t') dt'$$

quindi il circuito si comporta come un filtro RC passa basso con costante di tempo

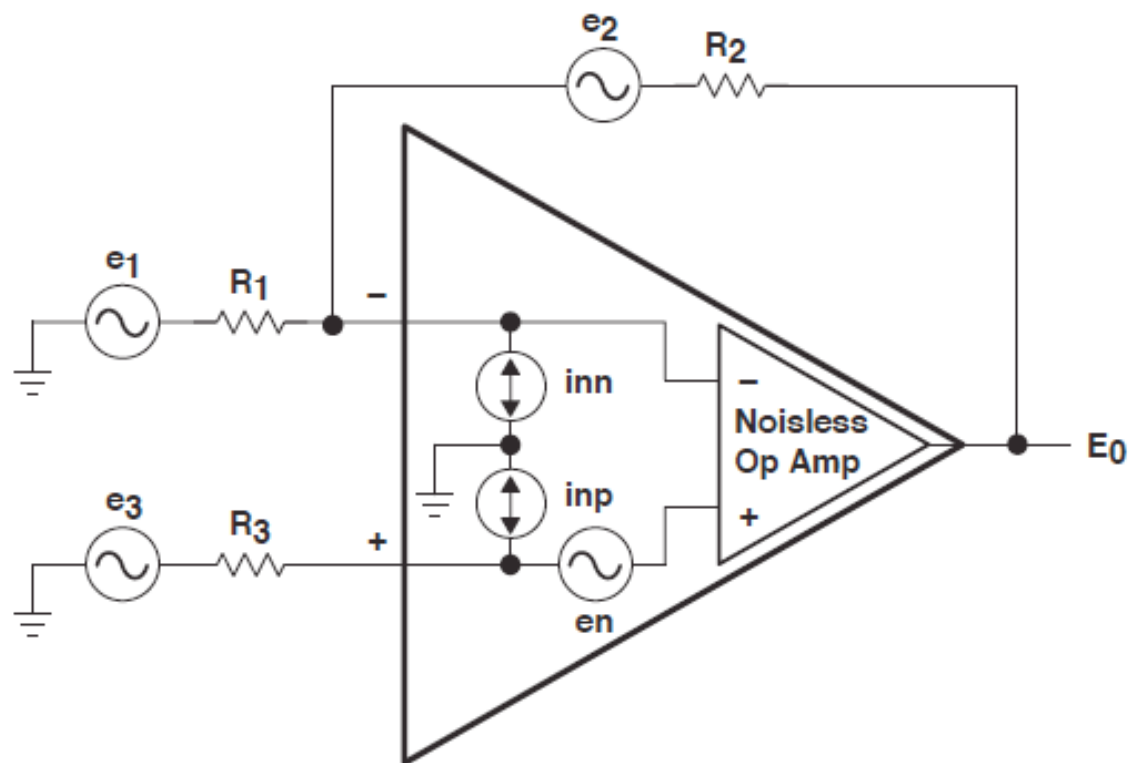
$$\frac{1}{\gamma} = \frac{R_1 + R_2}{B(GR_1 + R_1 + R_2)}$$

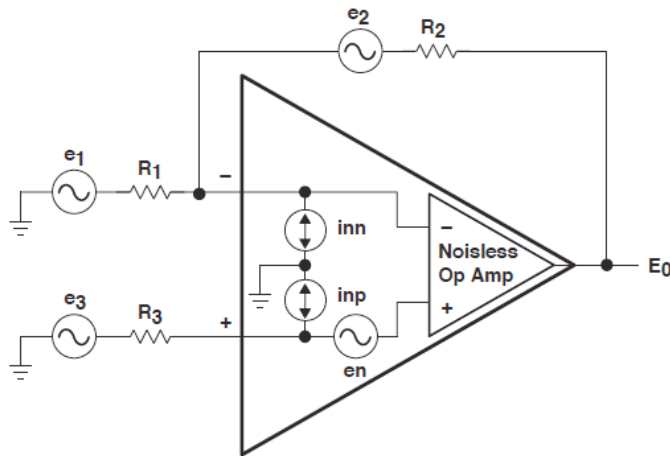
3. RUMORE NEGLI OP-AMP

sorgenti di rumore interne



sorgenti di rumore interne ed esterne





derivate dovute alle correnti di rumore che fluiscono nelle resistenze esterne:

la tensione al terminale positivo vale

$$V_+ = R_3 i_{np}$$

mentre al terminale negativo, la corrente di rumore deve compensare la corrente che viene dalle due resistenze

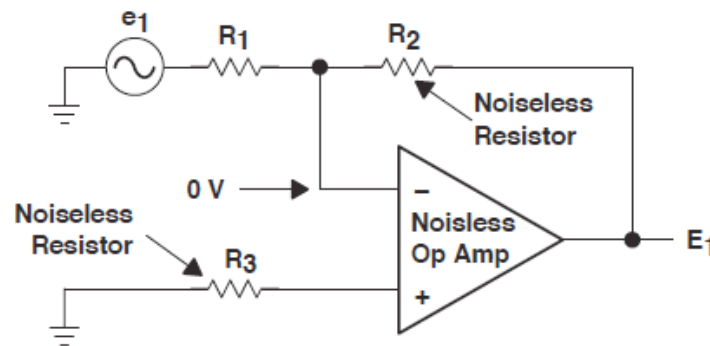
$$i_{nn} + \frac{V_{out} - V_+}{R_2} - \frac{V_+}{R_1} = 0 \Rightarrow i_{nn} + \frac{V_{out} - R_3 i_{np}}{R_2} - \frac{R_3 i_{np}}{R_1} = 0 \Rightarrow V_{out} = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) i_{np} - R_2 i_{nn}$$

Se si fa l'ipotesi – molto ragionevole – che le due correnti siano approssimativamente uguali, si vede che la deriva dovuta al rumore in corrente viene minimizzata prendendo

$$V_{out} = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) i_n - R_2 i_n = 0 \Rightarrow R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Per calcolare il rumore totale dovuto alle varie sorgenti di rumore si usa il principio di sovrapposizione e l'indipendenza delle sorgenti: si calcola il rumore dovuto a ciascuna singola sorgente e si trova la varianza di rumore totale come somma delle varianze dei singoli processi di rumore

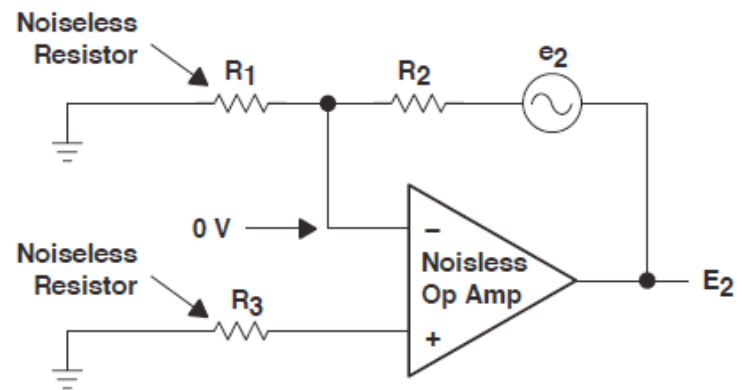
Rumore termico di R1



$$e_1^2 = 4kTR_1B \quad \Rightarrow \quad i_1^2 = e_1^2 / R_1^2 = 4kTB / R_1$$

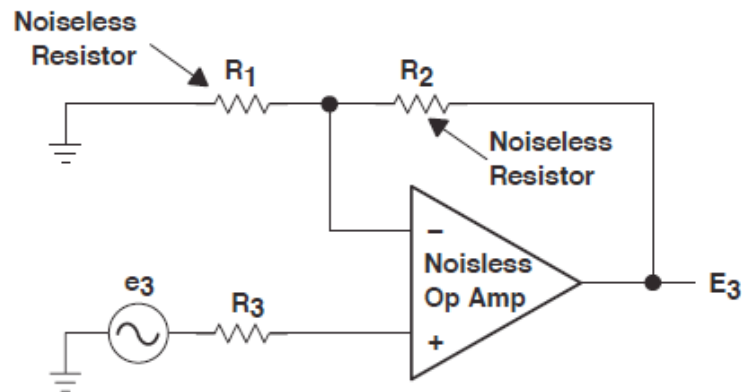
$$i_1 + i_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e_1}{R_1} = \sqrt{4kTB/R_1} = -\frac{E_1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad E_1^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 e_1^2 = 4kTB \frac{R_2^2}{R_1}$$

Rumore termico di R2



$$E_2^2 = e_2^2 = 4kTR_2B$$

Rumore termico di R3



$$V_+ = e_3 = \sqrt{4kTR_3B}$$



$$-\frac{V_+}{R_1} + \frac{E_3 - V_+}{R_2} = 0 \Rightarrow -\frac{e_3}{R_1} + \frac{E_3 - e_3}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow E_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \sqrt{4kTR_3B}$$

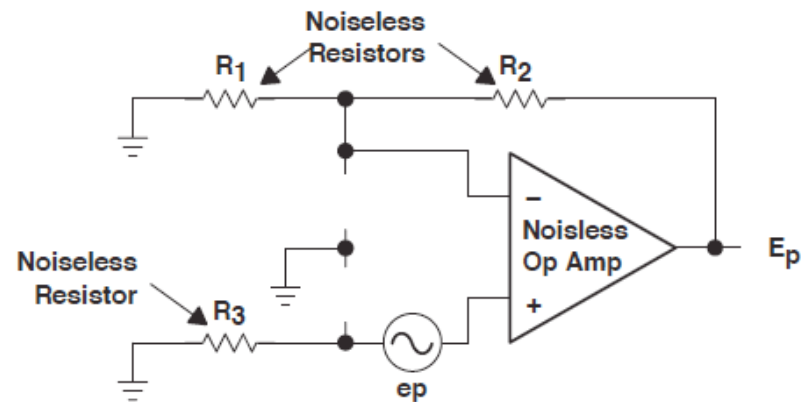


$$E_3^2 = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 4kTR_3B$$

La somma incoerente dei rumori termici dovuti alle sorgenti esterne produce dunque la seguente fluttuazione quadratica media totale sulla tensione di uscita

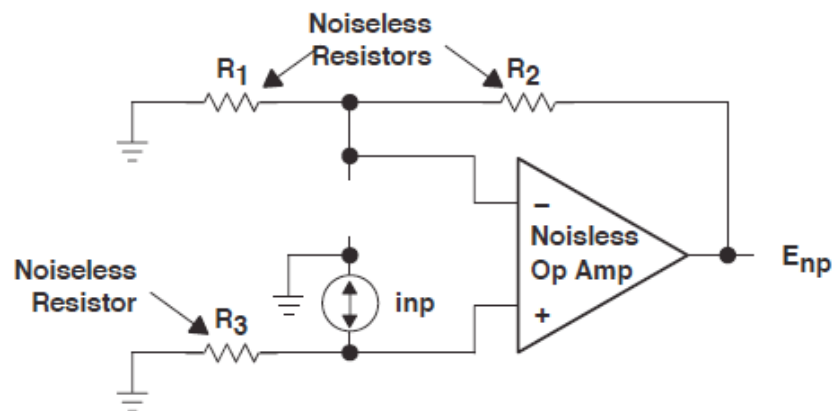
$$\begin{aligned} E_{ext}^2 &= E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 \\ &= 4kTB \left[\frac{R_2^2}{R_1} + R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3 \right] = 4kTB \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3 \right] \end{aligned}$$

Rumore in tensione dell'OpAmp (simile al caso di R3)



$$-\frac{V_+}{R_1} + \frac{E_p - V_+}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{e_p}{R_1} + \frac{E_p - e_p}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_p$$

Rumore in corrente sull'ingresso non-invertente (simile al caso precedente)

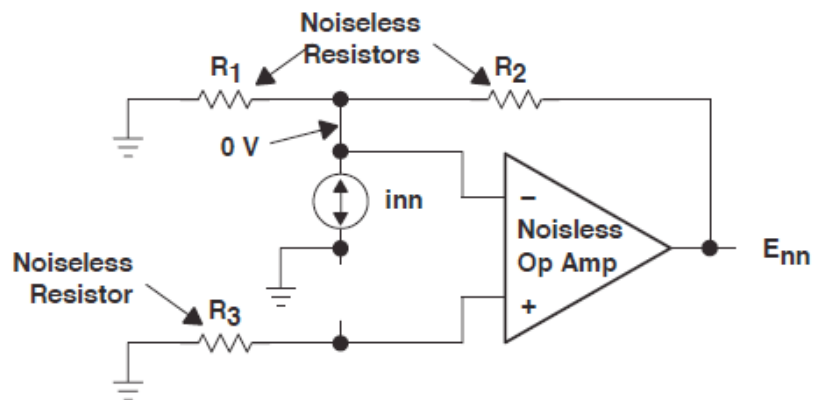


questo caso è simile al caso precedente, con una tensione applicata al terminale positivo uguale a

$$V_+ = i_{np} R_3$$

$$-\frac{V_+}{R_1} + \frac{E_{np} - V_+}{R_2} = 0 \Rightarrow -\frac{i_{np} R_3}{R_1} + \frac{E_{np} - i_{np} R_3}{R_2} = 0 \Rightarrow E_{np} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} R_3 i_{np}$$

Rumore in corrente sull'ingresso invertente



in questo caso si deve considerare l'equilibrio tra correnti:

$$i_{nn} + \frac{E_{nn}}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{nn} = -R_2 i_{nn}$$

La somma incoerente dei rumori termici dovuti alle sorgenti interne produce dunque la seguente fluttuazione quadratica media totale sulla tensione di uscita

$$E_{\text{int}}^2 = E_p^2 + E_{np}^2 + E_{nn}^2 = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 e_p^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3^2 i_{np}^2 + R_2^2 i_{nn}^2$$

Considerando insieme le sorgenti di rumore interne ed esterne si trova infine la fluttuazione quadratica media totale

$$E_{ext}^2 + E_{int}^2 = 4kTB \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3 \right] \\ + \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 e_p^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3^2 i_{np}^2 + R_2^2 i_{nn}^2 \right]$$