

Analisi dinamica del comportamento degli amplificatori operazionali

Corso di Metodi di Trattamento del Segnale, A.A. 2011-12

Edoardo Milotti

1. Comportamento degli OP-AMP: analisi statica dettagliata

Modifichiamo il solito modello di OP-AMP, in cui supponiamo che il guadagno sia comunque molto alto, così che la risposta statica dell'OP-AMP a loop aperto sia descritta dalla funzione $\text{sat}(G(v_+ - v_-); v_{\min}, v_{\max})$ dove

$$\text{sat}(x; a, b) = \begin{cases} a & x < a \\ x & a \leq x \leq b \\ b & x > b \end{cases}$$

e G è il guadagno a loop aperto (la funzione definita sopra è un esempio di *spline*).

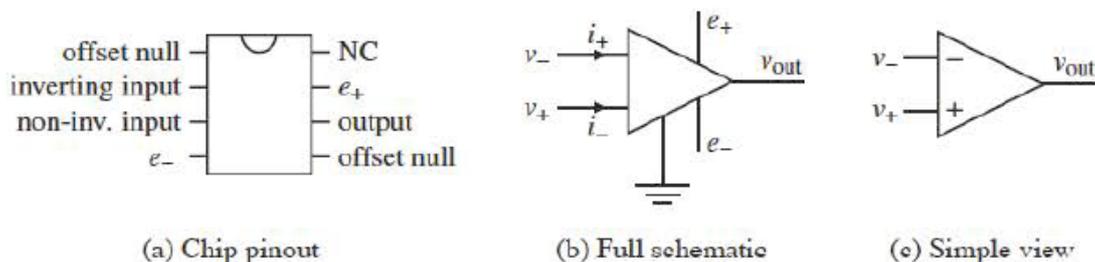


Figure 3.7: An operational amplifier and two schematic diagrams. (a) The amplifier pin connections on an integrated circuit chip. (b) A schematic with all connections. (c) Only the signal connections.

La figura seguente mostra una funzione di saturazione simmetrica e più realistica di $\text{sat}(G(v_+ - v_-); v_{\min}, v_{\max})$. Per piccoli segnali il modello è lineare, e l'output vale circa $G(v_+ - v_-)$.

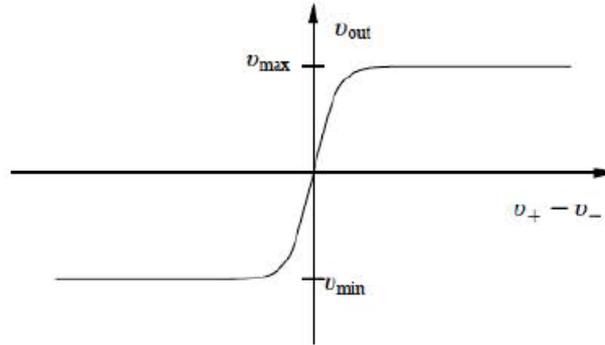
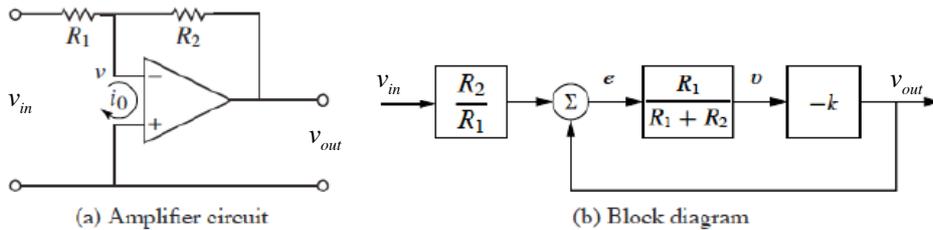


Figure 3.8: Input/output characteristics of an operational amplifier. The differential input is given by $v_+ - v_-$. The output voltage is a linear function of the input in a small range around 0, with saturation at v_{min} and v_{max} . In the linear regime the op amp has high gain.

Se facciamo la solita analisi statica approssimata dell'amplificatore invertente (v. figura qui sotto) otteniamo

$$v \approx 0; \quad I_1 = \frac{v_{in}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{v_{out}}{R_2}; \quad I_1 + I_2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_{in}$$



In questa analisi si assume $G \rightarrow \infty$ scompare completamente il segnale di errore v . Se ora assumiamo che il guadagno *non* sia infinito, e che il segnale di errore sia piccolo ma diverso da 0, otteniamo

$$I_1 = \frac{v_{in} - v}{R_1}; \quad I_2 = \frac{v_{out} - v}{R_2}; \quad I_1 + I_2 \approx 0; \quad v_{out} = -Gv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{R_2}{R_1} v_{in} + v_{out} \right)$$

e questo mostra che il segnale di input all'OP-AMP è il risultato di un'amplificazione e di una somma con feedback. Si ottiene infine il seguente risultato

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_1 G}{R_1 G + R_1 + R_2} \right) v_{in}$$

e questo mostra che il segnale di input all'OP-AMP è il risultato di un'amplificazione e di una somma con feedback.

2. Dinamica degli OP-AMP

Il comportamento dinamico continuo dell'OP-AMP si trova a partire da una semplice modellizzazione discreta: il segnale è dato da una frazione del segnale ad un tempo precedente + il segnale di errore con feedback negativo

$$\begin{aligned} v_{out}(t + \Delta t) &\approx v_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \Delta t \\ &= \alpha v_{out}(t) - \beta v(t) \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} \frac{dv_{out}}{dt} &= -\frac{1-\alpha}{\Delta t} v_{out}(t) - \frac{\beta}{\Delta t} v(t) \\ &= -\frac{1}{\tau} v_{out}(t) - b v(t) \\ &= -B v_{out}(t) - b v(t) \end{aligned}$$

Ovviamente questo porta nel caso statico a $v_{out} = -b\tau v = -\frac{b}{B} v = -Gv$. Si noti che B è l'inverso di un tempo caratteristico e corrisponde quindi ad una frequenza caratteristica, e che $b = BG$. Quest'ultima quantità viene detta gain-bandwidth product (GBP) ed è anche uguale al rapporto tra guadagno e tempo di risposta caratteristico dell'OP-AMP.

Inoltre, da

$$\frac{dv_{out}}{dt} = -B v_{out}(t) - b v(t) = -B v_{out}(t) - BG v(t)$$

si trova anche

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{1}{G} \left(v_{out}(t) + \tau \frac{dv_{out}}{dt} \right) \\ &= -\frac{\tau}{G} \left(B v_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \right) = -\frac{1}{BG} e^{-Bt} \frac{d}{dt} \left(e^{Bt} v_{out}(t) \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$v_{out}(t) = -BG e^{-Bt} \int_0^t e^{Bt'} v(t') dt' = -BG \int_0^t e^{-B(t-t')} v(t') dt'$$

Se si rianalizza il semplice amplificatore invertente con questo modello dinamico, si trova

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{v_{in} - v}{R_1}; \quad I_2 = \frac{v_{out} - v}{R_2}; \quad I_1 + I_2 \approx 0; \quad v(t) = -\frac{1}{BG} \left(Bv_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \right) \\
 \Rightarrow \quad \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v = -\frac{1}{BG} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \left(Bv_{out}(t) + \frac{dv_{out}}{dt} \right) \\
 \Rightarrow \quad v_{in} &= - \left[\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1 + R_2}{GR_2} \right] v_{out} - \frac{R_1 + R_2}{BGR_2} \frac{dv_{out}}{dt}
 \end{aligned}$$

quindi, ponendo

$$\gamma\delta = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1 + R_2}{GR_2}; \quad \delta = \frac{R_1 + R_2}{BGR_2}$$

si trova

$$v_{in} = -\gamma\delta v_{out} - \delta \frac{dv_{out}}{dt} = -\delta \left(\gamma v_{out} + \frac{dv_{out}}{dt} \right) = -\delta e^{-\gamma t} \frac{d}{dt} (e^{\gamma t} v_{out})$$

e quindi

$$v_{out}(t) = v_{out}(0) - \frac{1}{\delta} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} v_{in}(t') dt'$$

quindi il circuito si comporta come un filtro RC passa basso con costante di tempo

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\left(\frac{R_1 + R_2}{BGR_2} \right)}{\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1 + R_2}{GR_2} \right)} = \frac{R_1 + R_2}{B(GR_1 + R_1 + R_2)}$$

che è tanto più piccola quanto più grande è G. In particolare, se G è grande, allora il tempo caratteristico corrispondente è

$$\frac{1}{\gamma} \approx \frac{R_1 + R_2}{BGR_1}$$

e questa mostra che il significato del prodotto BG è proprio quello della frequenza di taglio del filtro passa-basso (trascurando il fattore dovuto alle resistenze).

Il problema si può trattare anche nel dominio della frequenza: ad esempio, prendendo la trasf. di Fourier dell'eq. dinamica si ottiene

$$i\omega v_{out}(\omega) = -Bv_{out}(\omega) - BGv(\omega) \Rightarrow v_{out}(\omega) = \frac{-BG}{B+i\omega}v(\omega) = -\frac{G}{1+i\omega/B}v(\omega)$$

che per alte frequenze si comporta come una power-law:

$$|v_{out}(\omega)| \approx \left| \frac{BG}{\omega} \right| |v(\omega)|$$

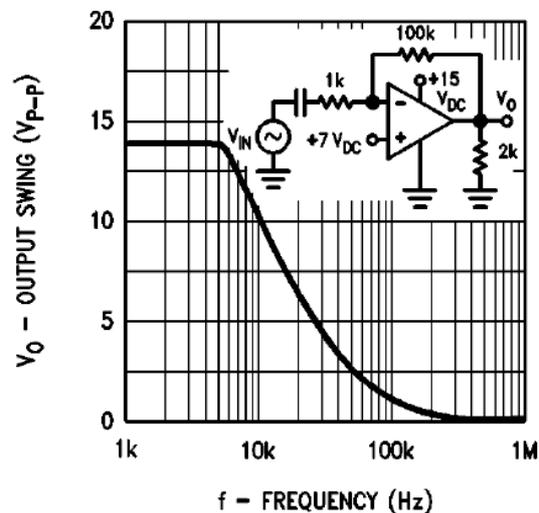
Si noti che il modello dinamico di OP-AMP senza feedback implica che

$$\frac{dv_{out}}{dt} = BG\Delta v$$

e se si prende un intervallo di tensione uguale alla differenza tra tensioni di saturazione, si trova un parametro importante dell'amplificatore, detto *slew rate*:

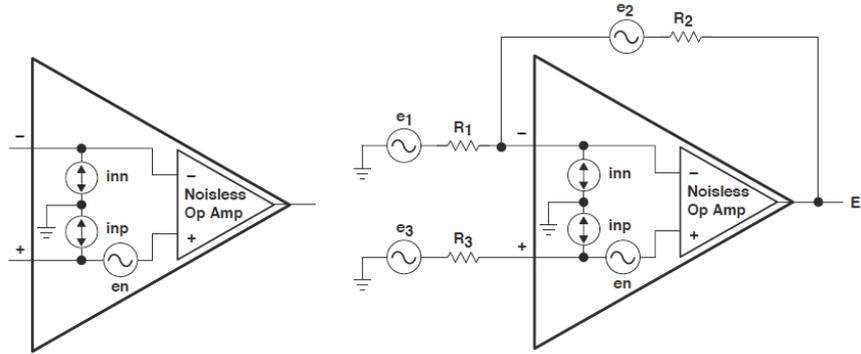
$$\text{slew rate} = BG\Delta v_{\max}$$

La figura che segue mostra il comportamento dell'OP-AMP LM124 per segnali grandi in funzione della frequenza: si vede che in prima approssimazione l'OP-AMP si comporta proprio come un filtro passa-basso.



3. Considerazioni sul rumore negli OP-AMP

Le sorgenti interne di rumore associate ad un op amp sono mostrate nella figura a sinistra, mentre la figura a destra mostra un op amp in configurazione invertente con tutte le sorgenti di rumore, comprese quelle del rumore termico Johnson in ciascuna resistenza della rete esterna.



Uno dei problemi che ci si può porre all'inizio è se si debbano considerare le sorgenti di rumore termico associate alle resistenze esterne. Ora noi consideriamo op amps che hanno sorgenti interne di rumore in tensione corrispondenti anche a $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, vale a dire a densità spettrali di tensione di $10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$. Poiché $\langle V^2 (v) \rangle = 4kTR = 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$ corrisponde al rumore prodotto a temperatura ambiente da una resistenza da 60 Ohm , allora si vede che nel progetto di un amplificatore a basso rumore dobbiamo tenere conto anche delle resistenze esterne, e che dovremmo tenere i valori di resistenza più bassi possibile, per minimizzare il rumore termico e per minimizzare anche il rumore in corrente. Si noti che utilizzando op amp con rumore in tensione di $20 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, la resistenza equivalente diventa di 24 kOhm .

Un'altra considerazione riguarda le derive dovute alle correnti di rumore che fluiscono nelle resistenze esterne: in questo caso (figura a destra) si vede che la tensione al terminale positivo vale $V_+ = R_3 i_{np}$, mentre al terminale negativo, la corrente di rumore deve compensare la corrente che viene dalle due resistenze, vale a dire

$$i_{nn} + \frac{V_{out} - V_+}{R_2} - \frac{V_+}{R_1} = 0 \Rightarrow i_{nn} + \frac{V_{out} - R_3 i_{np}}{R_2} - \frac{R_3 i_{np}}{R_1} = 0 \Rightarrow V_{out} = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) i_{np} - R_2 i_{nn}$$

Se si fa l'ipotesi – molto ragionevole – che le due correnti siano approssimativamente uguali, si vede che la deriva dovuta al rumore in corrente viene minimizzata prendendo

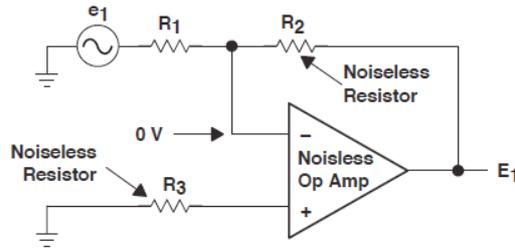
$$V_{out} = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) i_{np} - R_2 i_{nn} = 0 \Rightarrow R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Qui nel seguito si assume che il rumore associato ad ogni singola sorgente di rumore sia bianco, e questo permette di ottenere facilmente il rumore totale associato alla banda di frequenza B . Inoltre si assume che

ciascuna sorgente di rumore sia scorrelata, e quindi le fluttuazioni quadratiche medie si sommano per ottenere la fluttuazione quadratica media totale.

L'analisi viene fatta quindi sorgente per sorgente, assumendo che le altre parti siano ideali e sommando alla fine le fluttuazioni quadratiche medie. I passi seguenti analizzano una ad una le diverse sorgenti dell'amplificatore invertente e quindi ottengono il rumore totale dalla somma incoerente delle diverse sorgenti di rumore.

a. rumore termico di R_1



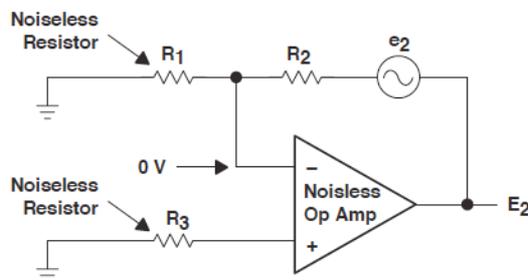
In questo caso $e_1^2 = 4kTR_1B$. D'altra parte questo corrisponde ad una corrente iniettata nel ramo di input uguale a $i_1^2 = e_1^2/R_1^2 = 4kTB/R_1$. Tenendo conto della relazioni tra correnti nell'input negativo (per l'op amp ideale) $i_1 + i_f = 0$, si ottiene

$$\frac{e_1}{R_1} = \sqrt{4kTB/R_1} = -\frac{E_1}{R_2} \Rightarrow E_1^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 e_1^2 = 4kTB \frac{R_2^2}{R_1}$$

Si noti che nel dominio del tempo $e_1(t)$ è un processo di rumore bianco con varianza $\langle e_1^2 \rangle_t = 4kTR_1B$ così che

$$\frac{e_1(t)}{R_1} = -\frac{E_1(t)}{R_2} \Rightarrow E_1(t) = -\frac{R_2}{R_1} e_1(t)$$

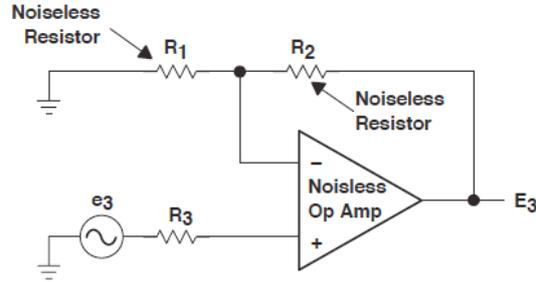
b. rumore termico di R_2



In questo caso il terminale negativo resta a massa, e la tensione di uscita viene direttamente dalla sorgente di tensione della resistenza di feedback, vale a dire

$$E_2^2 = e_2^2 = 4kTR_2B$$

c. rumore termico di R_3



In questo caso la tensione all'input positivo vale $V_+ = e_3 = \sqrt{4kTR_3B}$, e quindi l'equilibrio delle correnti all'input negativo implica

$$-\frac{V_+}{R_1} + \frac{E_3 - V_+}{R_2} = 0 \Rightarrow -\frac{e_3}{R_1} + \frac{E_3 - e_3}{R_2} = 0 \Rightarrow E_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \sqrt{4kTR_3B}$$

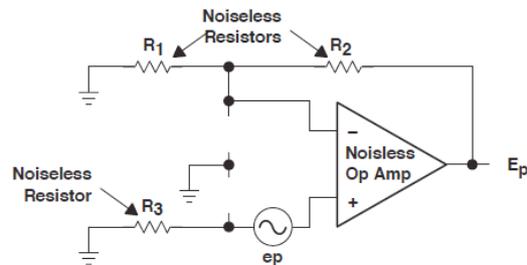
e la fluttuazione quadratica media è

$$E_3^2 = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 4kTR_3B$$

La somma incoerente dei rumori termici produce dunque in uscita una fluttuazione quadratica media totale

$$E_{ext}^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 4kTB \left[\frac{R_2^2}{R_1} + R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3 \right] = 4kTB \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3 \right]$$

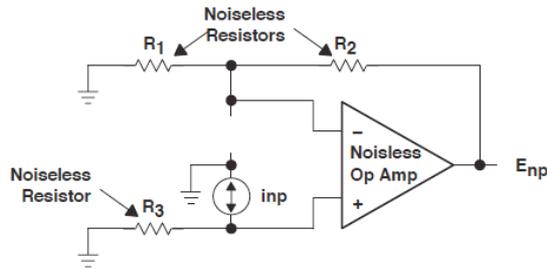
d. rumore in tensione dell'op amp



questo è simile al caso c, e si trova immediatamente

$$-\frac{V_+}{R_1} + \frac{E_p - V_+}{R_2} = 0 \Rightarrow -\frac{e_p}{R_1} + \frac{E_p - e_p}{R_2} = 0 \Rightarrow E_p = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_p$$

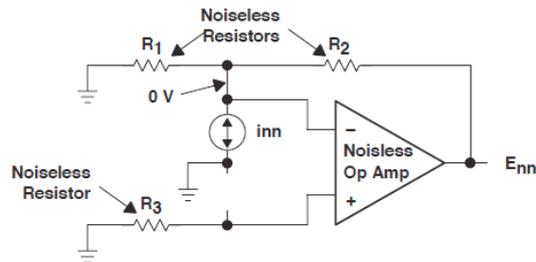
e. rumore in corrente dell'op amp (input non invertente)



questo caso è simile al caso precedente, con una tensione applicata al terminale positivo uguale a $V_+ = i_{np} R_3$, e quindi

$$-\frac{V_+}{R_1} + \frac{E_{np} - V_+}{R_2} = 0 \Rightarrow -\frac{i_{np} R_3}{R_1} + \frac{E_{np} - i_{np} R_3}{R_2} = 0 \Rightarrow E_{np} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} R_3 i_{np}$$

f. rumore in corrente dell'op amp (input invertente)



in quest'ultimo caso si deve considerare l'equilibrio tra correnti:

$$i_{in} + \frac{E_{in}}{R_2} = 0 \Rightarrow E_{in} = -R_2 i_{in}$$

e quindi la fluttuazione quadratica media totale dovuta alle sorgenti interne all'op amp vale

$$E_{int}^2 = E_p^2 + E_{np}^2 + E_{in}^2 = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)^2 e_p^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)^2 R_3^2 i_{np}^2 + R_2^2 i_{in}^2$$

Considerando insieme le sorgenti di rumore interne ed esterne si trova infine la fluttuazione quadratica media totale

$$E_{ext}^2 + E_{int}^2 = 4kTB \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) R_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3 \right] + \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 e_p^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right)^2 R_3^2 i_{np}^2 + R_2^2 i_{nm}^2 \right]$$