Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
11 febbraio 2022

1 Sistemi Termodinamici

1.2 Lezione #2

1.2.2 Dilatazione termica

Abbiamo osservato **sperimentalmente** che nel caso di un corpo che abbia una sola dimensione apprezzabile vale la seguente relazione

$$\Delta l = \lambda l \Delta T \ ,$$

da cui, differenziando, si giunge a determinare la quantità λ:

$$\lambda = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_p \ ,$$

con λ = coefficiente di dilatazione (termica) lineare a pressione costante.

Per sistemi tridimensionali si definisce, analogamente a quanto visto per il caso lineare, un coefficiente di dilatazione cubica (a pressione costante) α:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \ ,$$

da cui integrando si ottiene $\Delta V = \alpha V \Delta T$. Possiamo ora trovare una relazione che lega la variazione finita di volume ΔV alla corrispondente variazione di temperatura ΔT:

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= (l_x + \Delta l_x)(l_y + \Delta l_y)(l_z + \Delta l_z) \\ &= (l_x + \lambda l_x \Delta T)(l_y + \lambda l_y \Delta T)(l_z + \lambda l_z \Delta T) \\ &= l_x l_y l_z (1 + \lambda \Delta T)^3 \\ &= V(1 + \lambda \Delta T)^3 \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che le dilatazioni lineari siano piccole ($\lambda \Delta T << 1$) possiamo applicare l'approssimazione matematica $(1 + x)^\gamma \simeq 1 + \gamma x$, per cui

$$V + \Delta V \simeq V(1 + 3\lambda \Delta T \ )$$

e quindi

$$\alpha \simeq 3\lambda \ .$$

In generale per un sistema idrostatico possiamo descrivere il volume in funzione della pressione e della temperatura $V = V(p, T)$. Sviluppando in serie di Taylor ed arrestandosi al primo ordine[1], risulta

$$V \simeq V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p_0} (T - T_0) + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T_0} (p - p_0)$$

con $V_0 = V(p_0, T_0)$. Si tratta di un'equazione di stato empirica. Si definisce a questo punto il Coefficiente di comprimibilità a temperatura costante β_T

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Il segno negativo serve per mantenere positivo il coefficiente β_T in quanto per qualunque sistema idrostatico il volume diminuisce all'aumentare della pressione, mentre in generale (a parte alcuni casi tipo l'acqua a basse temperature) il volume aumenta all'aumentare della temperatura. L'equazione di stato può essere pertanto riscritta come

$$V \simeq V_0[1 + \alpha_0(T - T_0) - \beta_0(p - p_0)]$$

con α_0 e β_0 le grandezze calcolate in T_0 e p_0 (e quindi in V_0).

Per quanto visto sopra, possiamo anche definire il Coefficiente di comprimibilità a Entropia[2] costante β_S

$$\beta_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$$

Nel caso particolare dei gas perfetti ($pV = nRT$), possiamo calcolare immediatamente questi coefficienti

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial \frac{nrT}{p}}{\partial p}\right) = -\frac{1}{V}\left(-\frac{nrT}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Per una trasformazione adiabatica è $pV^\gamma = cost$ per cui

$$d(pV^\gamma) = pdV^\gamma + V^\gamma dp = \gamma p V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0$$

da cui

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{V}{\gamma p}$$

pertanto

$$\beta_S = -\frac{1}{V}\left(-\frac{V}{\gamma p}\right) = \frac{1}{\gamma p}$$

[1]questa approssimazione vale in particolar modo per i liquidi per i quali la variazione di volume in funzione della temperatura o della pressione è piccola

[2]Il concetto di entropia verrà introdotto in seguito

e quindi

$$\frac{\beta_S}{\beta_T} = \gamma$$

Conviene definire in questa fase anche il "Modulo di (in)compressibilità" (*Bulk modulus*) a temperatura costante K_T, e ad Entropia costante K_S:

$$K_T = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

$$K_S = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$$

e quindi $K_T = 1/\beta_T$, e $K_S = 1/\beta_S$ (per tale ragione andrebbe chiamato Modulo di *incompressibilità*).

Queste grandezze saranno utilizzate in seguito.