Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
21 maggio 2025

4 Elementi di Meccanica dei Fluidi

4.2 Lezione #18

4.2.4 Equazione di Continuitià

Abbiamo già visto a suo tempo che, data una grandezza scalare m, il **Flusso** di m viene definito come

$$\vec{j} = \frac{dm}{dAdt}\vec{u}$$

dove $\vec{u}$ è il versore parallelo a $\vec{j}$. Se m rappresenta la massa di un fluido, abbiamo definito la densità $\rho = dm/dV = dm/dAdr$ (in cui l'elemento infinitesimo di volume e' definito come il prodotto della superficie per un tratto infinitesimo dr parallelo a $\vec{u}$). Sostituendo,

$$\vec{j} = \frac{d^2m}{dA\ dt}\vec{u} = \frac{\rho dA\ dr}{dA\ dt}\vec{u} = \rho\frac{dr}{dt}\vec{u} = \rho\vec{v}$$

Il flusso $\vec{j}$ è quindi una densità di corrente. Integrando la (densità di) corrente su una superficie A qualsiasi, si ottiene la quantità di m che attraversa la superficie A nel tempo t, detta anche **portata**

$$\frac{dm}{dt} = \int_A \vec{j} \cdot \vec{n}\ dA = \int_A \rho\ \vec{v} \cdot \vec{n}\ dA$$

con $\vec{n}$ il versore perpendicolare alla superficie dA. Ma che cosa succede quando l'integrale viene fatto su una superfice chiusa? Analogamente a quanto visto per l'Energia Interna di un sistema idrostatico, l'integrale della corrente darà come risultato la quantità di massa m che esce dalla superficie chiusa, che dovrà essere uguale alla diminuzione di massa M all'interno della superficie stessa, pertanto:

$$\frac{dm}{dt} = \oint_A \rho\ \vec{v} \cdot \vec{n}\ dA = -\frac{dM}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \tag{1}$$

avendo calcolato M come l'integrale della densità su tutto il volume V racchiuso da A

$$M = \int_V \rho dV$$

La relazione appena trovata è un'eguaglianza tra un integrale di superficie ed un integrale di volume. Ci aiuta in questo il **Teorema della Divergenza** che dimostra che, dato un vettore $\vec{j}$:

$$\oint_A \vec{j} \cdot \vec{n}\; dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\; dV$$

Applicato all'eq. (1) il teorema ci permette di scrivere

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \rho\; \vec{v} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\; dV \tag{2}$$

Possiamo ora togliere l'integrale di volume da entrambe le parti e riscrivere l'eq. (2) in forma differenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \rho\vec{v} = -\frac{d\rho}{dt}$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \cdot \rho\vec{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{3}$$

che rappresenta **L'equazione di Continuità**. Nel caso di un liquido in regime stazionario, la densità è costante nel tempo ($\rho(t, \vec{r}) = \rho(\vec{r})$) e l'eq. (3) si riduce a

$$\vec{\nabla} \cdot \rho\vec{v} = 0 \tag{4}$$

e per un liquido incomprimibile ($\rho = \rho_0$) diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Facciamo ora l'ipotesi di avere un **tubo di flusso** in regime **stazionario**. In questo caso le funzioni che descrivono il comportamento del liquido NON dipendono dal tempo [eq. (4)], per cui

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{v}\; dV = \oint_A \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\; dA = 0\ .$$

Se indichiamo con A_1 la superficie di entrata del fluido e con A_2 la superficie di uscita del fluido ed A_{lat} la superficie laterale del tubo di flusso, risulta

$$\oint_A \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\; dA = \int_{A_1} \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\; dA + \int_{A_2} \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\; dA + \int_{A_{lat}} \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\; dA = 0$$

ma per la stessa definizione di tubo di flusso, non vi sono linee che escono dalla superficie laterale, pertanto alla fine risulta

$$\int_{A_1} \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\ dA = -\int_{A_2} \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\ dA$$

Quindi, per come è stato definito, il flusso è positivo quando esce e negativo quando entra. Se (vedi fig. 1) $\vec{v}$ e' ovunque parallelo a $\vec{n}$, ed ognuna delle

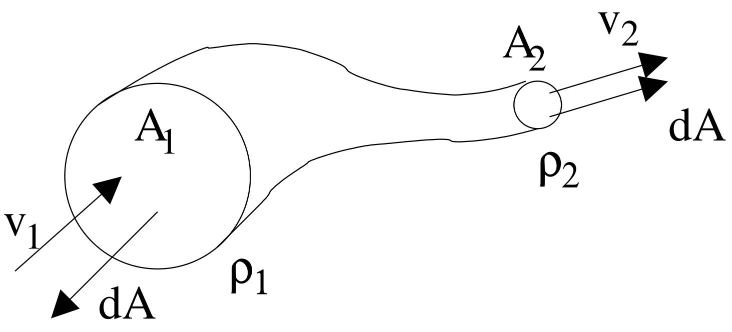

Figura 1: tubo di flusso

due superfici A_i è costruita in modo tale che in ogni suo punto la velocità v_i e la densità ρ_i siano costanti, si ottiene l'equazione di continuità per un tubo di flusso così come descritta nel testo (la velocità $\vec{v}$ in uno dei due integrali ha verso opposto al versore $\vec{n}$) :

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

e nel caso in cui il fluido sia incomprimibile, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = vA$$

Il prodotto vA prende il nome di **portata volumetrica** ed è lo stesso per una sezione qualsiasi del tubo di flusso.