Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
14 gennaio 2025

4 Elementi di Meccanica dei Fluidi

4.4 Lezione #20

4.4.1 Viscosità e Legge di Poiseuille

Per i fluidi reali abbiamo definito lo **Sforzo di Taglio**

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_T}{dA}$$

con $d\vec{F}_T$ la forza che agisce tangenzialmente alla superficie dA. È quindi un vettore con le dimensioni di una pressione. Per alcuni fluidi, detti *newtoniani*, e nel caso in cui la densità sia costante, esiste una semplice relazione tra lo sforzo di taglio, la variazione della velocità perpendicolarmente alla direzione della forza tangenziale ed una grandezza η detta **viscosità** del fluido

$$\vec{\tau} = \eta \frac{dv}{dr}\vec{u}$$

dove $\vec{u}$ rappresenta il versore della velocità. Se la velocità diminuisce all'aumentare di r significa che lo sforzo è nella direzione opposta al moto, e viceversa. L'unità di misura della viscosità è il Poiseuille (1 Pl = 1 Pa·s). Altre unità di misura il Poise[1] (1 P = 1 g cm^{-1} s^{-1} per cui 1 Pa·s = 10 P).

Consideriamo ora un elemento di volume di fluido reale, di raggio r e lunghezza dx, in moto stazionario lungo l'asse x [Fig.1], all'interno di un tubo di raggio a. Il fluido è incomprimibile, e pertanto la velocità sarà costante lungo l'asse x ma dobbiamo porre la condizione che il modulo della velocità diminuisca all'aumentare di r e si annulli a contatto con la parete del tubo (diversamente avremmo una derivata della velocità infinita in a). Possiamo calcolare la forza infinitesima agente sulla superficie laterale $dA = 2\pi r dx$ dell'elemento di volume come

$$d\vec{F}_T = \vec{\tau} dA = (\eta \frac{dv}{dr})(2\pi r dx)\vec{u} = 2\pi\eta r \frac{dv}{dr} dx\vec{u}$$

[1]entrambi, Pl e P, dal nome del fisico francese Jean Léonard Marie Poiseuille, cui si deve la legge della portata di un tubo di fluido reale, che vedremo

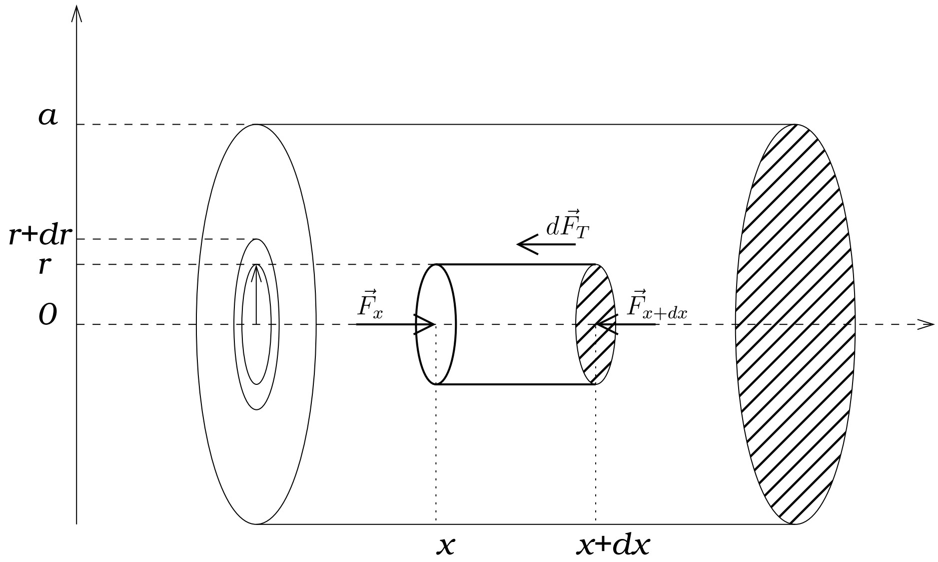

Figura 1: Elemento di volume di fluido reale in moto stazionario lungo l'asse x

Il regime stazionario del fluido implica che la risultante di tutte le forze che agiscono sull'elemento di volume sia nulla e quindi

$$\vec{F}_x + \vec{F}_{x+dx} + d\vec{F}_T = \vec{0}$$

e lungo l'asse x diventa

$$F_x - F_{x+dx} + dF_T = 0$$

il segno negativo di F_{x+dx} è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento, mentre il segno di dF_T dipende dalla derivata della velocità in funzione del raggio. Le forze F_x ed F_{x+dx} sono forze di superficie per cui alla fine risulta

$$\pi r^2[p(x) - p(x+dx)] + 2\pi\eta r\frac{dv}{dr}dx$$

Sviluppando $p(x+dx)$ in serie di Taylor e fermandosi al primo ordine

$$p(x+dx) = p(x) + \frac{dp(x)}{dx}dx$$

e sostituendo:

$$-\pi r^2\frac{dp}{dx}dx + 2\pi\eta r\frac{dv}{dr}dx = 0$$

da cui

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv}{dr}$$

Separando le variabili v ed r ed integrando si ricava

$$\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\int_0^r r dr = \int_{v(0)}^{v(r)} dv$$

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dx}r^2 + v(0)$$

La condizione $v(a) = 0$ permette di ricavare

$$v(0) = -\frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dx}a^2$$

e quindi

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dx}(r^2 - a^2)$$

poiché $r \leq a$ ed abbiamo assunto che il fluido scorra nel verso positivo dell'asse x, ne deriva immediatamente che la derivata della pressione rispetto alla direzione sia negativa. Il risultato fondamentale, confortato dal senso comune, è che per avere un moto stazionario di un fluido reale, la pressione all'inizio del tubo debba essere maggiore di quella alla fine, $dp/dx < 0$. A questo punto, poniamo la derivata in valore assoluto quindi possiamo scrivere

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|(a^2 - r^2)$$

Conoscendo la distribuzione della velocità del fluido reale in un tubo, si può a questo punto calcolarne la portata q, definita come la quantità di fluido che attraversa la sezione del tubo di flusso nell'unità di tempo. Dobbiamo valutare il contributo di una corona circolare di fluido in quanto la velocità dipende da r e quindi, per quanto visto

$$q = \frac{dm}{dt} = \int_S \rho\ \vec{v}\cdot\vec{n}\ dS = \int_S \rho v(r)\ dS = \int_0^a \rho\ v(r)\ 2\pi r dr$$

Sostituendo $v(r)$ con quanto sopra trovato si ottiene alla fine

$$q = 2\pi\rho\int_0^a r\frac{1}{4\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|(a^2 - r^2)dr = \frac{\pi\rho a^4}{8\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|$$

nota come **Legge di Poiseuille**.

Conoscendo la portata volumetrica $Q = q/\rho$, si può calcolare la velocità media del fluido

$$\langle v\rangle = \frac{Q}{S} = \frac{q}{\rho S} = \frac{\pi\rho a^4}{8\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|\frac{1}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{8\eta}\left|\frac{dp}{dx}\right|$$