Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
14 gennaio 2025

4 Elementi di Meccanica dei Fluidi

4.4 Lezione #20

4.4.3 Resistenza del Mezzo

L'interazione tra il corpo ed il fluido si manifesta con una forza che si oppone al moto del fluido e che va sotto il nome di **resistenza del mezzo**. L'effetto è dato dal moto relativo del corpo rispetto al fluido in cui è immerso, quindi possiamo descrivere il moto del fluido nel sistema di riferimento del corpo o viceversa il moto del corpo nel sistema di riferimento del fluido. Dalla fig.1 si osserva che lungo l'asse x la sezione entro cui scorre il fluido

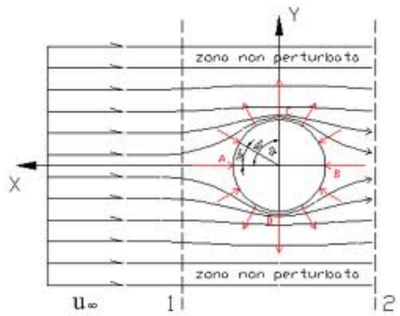

Figura 1: fluido ideale: paradosso di d'Alembert

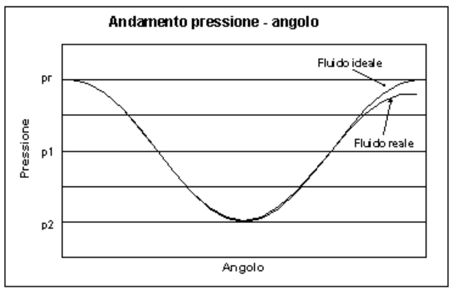

Figura 2: pressione in un fluido ideale e reale

diminuisce fino ad un valore minimo in corrispondenza del diametro della sfera per poi ritornare al valore di prima. In corrispondenza del valore minimo dell'area si ha la massima velocità del fluido e la pressione minima, mentre le pressioni sono uguali prima e dopo la sfera. Per questa ragione la sfera rimane ferma nel fluido ideale (paradosso di d'Alembert), ovvero, cambiando il sistema di riferimento, la sfera si muove con velocità costante nella direzione opposta al moto del fluido. Nel caso di un fluido reale, la pressione nella parte posteriore della sfera diminuisce (fig.2) a causa del fatto che alcune linee di flusso si chiudono su se stesse (vortici), e ciò, riportandoci nel sistema di riferimento del fluido, determina una risultante di forza diretta in senso opposto al movimento della sfera, che comincierà a rallentare la propria corsa fino a quando non ci sono più i vortici nella sua parte posteriore (in pratica fino a quando la sfera è ferma rispetto al sistema di riferimento del fluido reale).

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono: forma e dimensione del corpo, la viscosità η del fluido, e la velocità v relativa del corpo rispetto al fluido. La forza resistente al moto del corpo nel fluido è opposta al versore della velocità $\vec{u}$ del corpo ed ha la seguente forma

$$\vec{F}_{res} = -\frac{1}{2}\rho v^2 A \ c(Re) \ \vec{u} \tag{1}$$

dove ρ è la densità del fluido, A la superficie (sezione frontale) del corpo e $c(Re)$ è il *coefficiente di resistenza aerodinamica* che è in generale funzione del numero di Reynolds $Re = \rho l v/\eta$ (con l lunghezza caratteristica) ma che dipende anche dalla forma del corpo (soprattutto la sua parte posteriore, dove nascono i vortici). Tale coefficiente a basse velocità (regime laminare, $Re < 1000$) vale $c(Re) \sim 24/Re$ e quindi tende a diminuire con l'aumentare della velocità (ma comunque la forza resistente aumenta perché dipende dal quadrato della velocità), fino a diventare costante ("c_x") quando il regime da laminare diventa turbolento. Nel caso particolare di una sfera, $c_x \sim 0.5$ e l'eq. (1) diventa (in modulo)

$$F_{res} = \frac{1}{2}\rho A v^2 c_x = \frac{\pi}{4}\rho a^2 v^2$$

dove a è il raggio della sfera. In regime laminare invece, $Re = \rho 2av/\eta$ e si ottiene la Legge di Stokes:

$$F_{res} = \frac{1}{2}\rho v^2 \pi a^2 \frac{24}{Re} = 12\rho v^2 \pi a^2 \frac{\eta}{2\rho v a} = 6\pi a \eta v$$

in cui si osserva che la resistenza è lineare con la velocità.

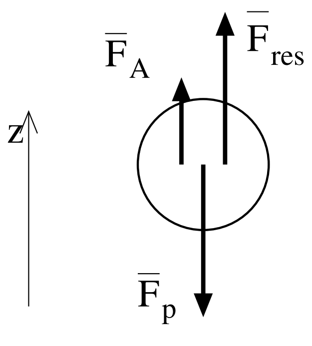

Figura 3: Forze agenti sulla sfera (moto verso il basso)

Possiamo calcolare il comportamento di una sfera di massa m e volume V che si muove in un fluido di densità ρ (fig. 3). Essa e' soggetta a forze di Volume (forza peso) e di Superficie (spinta di Archimede e resistenza del mezzo). Se ipotizziamo un regime laminare, la resistenza per la legge di Stokes è proporzionale alla velocità e l'equazione del moto diventa

$$\vec{F}_p + \vec{F}_A + \vec{F}_{res} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Tutte le forze sono parallele all'asse z, ed assumendo l'asse z positivo verso l'alto, il calcolo lungo quell'asse diventa

$$-mg + \rho V g - 6\pi a \eta v = mv'$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine del tipo

$$v' = av + b$$

la cui soluzione generale è

$$v(t) = ce^{at} - \frac{b}{a} \qquad \text{con} \quad a = -\frac{6\pi a\eta}{m} \quad \text{e} \quad b = \frac{\rho V - m}{m}$$

mentre la costante $c = b/a$ si ottiene dalle condizioni al contorno v(0) = 0. L'espressione finale diventa quindi

$$v(t) = \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)$$

Questa equazione ci dà anche il valore limite per la velocità di caduta (o di salita) del corpo in quanto per $t \to \infty$, ricordando che $a < 0$ si ottiene

$$v_\infty = -\frac{b}{a} = \frac{\rho V - m}{6\pi a\eta}$$

e quindi alla fine, ponendo $\tau = -1/a$ possiamo scrivere l'equazione della velocità come

$$v(t) = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Sostituendo $V = 4/3\pi a^3$ e ponendo la densità del corpo $\rho_0 = m/V$ si ottiene per la velocità limite il seguente risultato

$$v_\infty = \frac{2a^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_0)$$

La velocità è negativa (verso il basso) per un corpo più denso del fluido ($\rho_0 > \rho$) e viceversa. Questa relazione permette di determinare la viscosità del fluido in base alla misura della velocità limite.

Purtroppo l'utilizzo della Legge di Stokes è un buon esercizio accademico, ma nei casi normali i regimi sono quasi sempre turbolenti. Basti pensare al valore del numero di Reynolds... Facciamo alcuni esempi, in primis il paracadutista che si lancia, e prima di aprire il paracadute, in caduta libera raggiunge la velocità limite di circa 250 km/h (70 m/s), come tutti quelli che si lanciano con il paracadute sanno. Ebbene, con la densità e viscosità dell'aria rispettivamente $\rho = 1.2$ kg/m^3 ed $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa·s, supponendo una lunghezza caratteristica $l = 0.5$ m, otteniamo

$$Re = \frac{\rho l v}{\eta} = \frac{1.2 \times 0.5 \times 70}{1.8 \times 10^{-5}} = 2.3 \times 10^6 \quad !!!$$

Sempre ipotizzando il caso di una sfera di raggio a, possiamo calcolare la velocità limite in questo modo

$$-\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 g + \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g + \frac{\pi}{4}\rho a^2 v^2 = 0$$

facendo bene attenzione al segno della forza resistente nell'equazione, poiché, mentre nel caso della Legge di Stokes il valore positivo o negativo della velocità emerge automaticamente dall'equazione, ora la velocità è al quadrato e pertanto bisogna stabilire a priori il segno della forza. Nel caso della caduta della sfera, la forza resistente ha la stessa direzione della spinta di Archimede, ovvero è rivolta verso l'alto.

$$v_\infty^2 = \frac{16ag}{3}(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)$$

Una sfera piena d'acqua, di mezzo metro di diametro, raggiungerebbe la velocità limite di

$$v_\infty = \sqrt{\frac{16 \times 0.5 \times 9.8}{3} \times (\frac{1000}{1.2} - 1)} = 147.5m/s \sim 530km/h$$