Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
22 maggio 2023

5 Oscillazioni e Onde

5.2 Lezione #21

5.2.1 Equazione Differenziale delle Onde

In tutti i casi analizzati precedentemente si osserva che le onde obbediscono alla stessa **Equazione Differenziale delle Onde**, che nel caso **unidimensionale** vale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \ ,$$

equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del II ordine. La grandezza v è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Le soluzioni dell'equazione delle onde hanno la forma $f(x \pm vt)$. Noi ci limiteremo a dimostrare che $f(x \pm vt)$ è una soluzione. Ponendo $s = x \pm vt$, la funzione $f = f(s)$ e possiamo scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \pm v\frac{\partial f}{\partial s}$$

da cui

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial(\partial f/\partial s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\pm v\frac{\partial f}{\partial s}) = \pm v\frac{\partial(\partial f/\partial s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

Si può anche dimostrare che tutte le soluzioni sono del tipo $f(x,t) = f(x \pm vt)$.

Nel caso **tridimensionale** l'equazione generale delle onde coinvolge le tre direzioni nello spazio e la sua soluzione è del tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \ .$$

L'equazione qui sopra viene scritta in modo più compatto utilizzando l'operatore ∇^2 (nabla quadro), un operatore differenziale (detto "Laplaciano")

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \ ,$$

che permette di scrivere l'equazione generale delle onde come

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \ .$$

Le onde **piane** e **sferiche** sono particolari tipi di onde tridimensionali. Le prime sono onde la cui soluzione è del tipo $f(\vec{r}\cdot\vec{u}_n \pm vt)$ in cui il versore $\vec{u}_n$ è perpendicolare alla *superficie d'onda*. Le seconde, nel caso uniforme, sono onde che dipendono solo dalla distanza dalla sorgente e dal tempo, e la cui soluzione è un'onda del tipo

$$f(r,t) = \frac{\phi(r \pm vt)}{r}$$

in cui $\phi(r \pm vt)$ è soluzione dell'equazione d'onda unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

Nel seguito degli appunti noi ci limiteremo a studiare il caso dell'onda unidimensionale.

Cerchiamo di capire il significato fisico di $f(x,t) = f(x - vt)$. Consideriamo dapprima la funzione $f(x,t)$, al tempo $t = 0$, che rappresenta la forma della perturbazione all'istante iniziale. Consideriamo un valore X tale che $X = x - vt_1$ per cui $f(X)$ rappresenta la forma della perturbazione all'istante $t = t_1$. Se ora facciamo un passaggio di coordinate da x a X, la funzione $f(X)$ ha esattamente la stessa forma della funzione $f(x,t_1)$ ovvero la funzione $f(x,t)$ dopo un tempo t_1. $f(x - vt)$ rappresenta quindi un'onda che si propaga lungo il verso positivo di x con velocità v, **senza subire deformazioni**. E' come una traslazione rigida [fig. 1]. Analogamente, $f(x + vt)$ rappresenta un'onda che si propaga lungo il verso negativo di x.

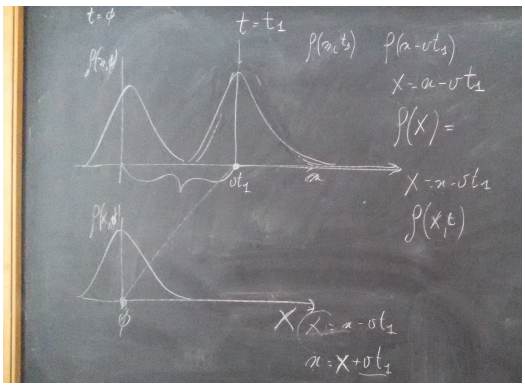

Figura 1: Rappresentazione grafica dello spostamento di un'onda

Quindi, l'Equazione Differenziale delle Onde ha in se un parametro v che rappresenta proprio la velocità di propagazione dell'onda nella direzione x (nel caso unidimensionale).

5.2.2 Oscillazioni Armoniche (monocromatiche)

Generiamo ora una perturbazione nel punto $x = 0$ che sia un'oscillazione armonica con pulsazione costante ω. In $x = 0$, la soluzione generale dell'equazione delle onde $f(x,t) = f(x \pm vt) = f(\pm vt)$ deve ricondursi all'equazione del moto armonico $f(t) = A\sin(\omega t+\phi)$. La funzione $f(x,t)$ può essere scritta in due modi:

$$f(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \pi/2 + \phi) \ ; \ f(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

con k una grandezza la cui dimensione è l'inverso di una lunghezza ed ω è la pulsazione. Parliamo in questo caso di un'onda **monocromatica** di **ampiezza** A, **fase** $(kx \pm \omega t(+\pi/2) + \phi)$ (detta anche *fase istantanea*), e le due funzioni sono identiche. Scegliamo per semplicità la seconda delle equazioni e poniamo $\phi = 0$. Derivando:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f(x,t) \ ; \frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f(x,t)$$

e quindi

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2 f}{dt^2} \text{ con } v = \frac{\omega}{k} \ .$$

v è la **velocità di fase** mentre k prende il nome di **numero d'onda**.

Definiamo $\lambda = 2\pi/k$ e $T = 2\pi/\omega$, avremo

$$f(x,t) = A\sin(2\pi(x/\lambda \pm t/T)) \ .$$

Fissato t, $f(x,t)$ ha lo stesso valore per ogni variazione $\Delta x = \pm n\lambda$; fissato x, $f(x,t)$ ha lo stesso valore per ogni variazione $\Delta t = \pm nT$. Quindi λ e T sono rispettivamente il periodo **spaziale** e **temporale** dell'onda. λ prende il nome di **lunghezza d'onda** e T quello di **periodo**. Siccome $v = \omega/k$, $v = (2\pi/T)/(2\pi/\lambda) = \lambda/T = \lambda\nu$, dove $\nu = \omega/2\pi$ è la frequenza.

Bisogna fare molta attenzione in questo punto. La frequenza con cui si propaga l'onda ν dipende dalla sorgente ($\nu = \omega/2\pi$), mentre v dipende dal mezzo. Pertanto k è funzione sia del mezzo in cui si propaga l'onda che della perturbazione. Matematicamente, siccome abbiamo dimostrato che $f(x-vt)$ rappresenta una traslazione rigida dell'onda verso l'asse positivo delle x, la frequenza a $x = 0$ è la stessa in x_0 dopo il corrispondente tempo $t_0 = x_0/v$. Pertanto questo significa che variano contemporaneamente sia la velocità v che la lunghezza d'onda λ. Se l'onda si propaga da un mezzo ad un altro, l'onda non cambia la propria frequenza, ma solo la sua velocità. Il suono si propaga in arie e nell'acqua con la stessa frequenza, ma il suono in acqua è molto più veloce (come già visto).

5.2.3 Intensità di un'onda (su una corda)

Una corda oscillante possiede una certa energia, quella che e' necessaria al punto $x = 0$ per dar luogo al movimento, che si propaga lungo la corda

trasportando quindi l'energia via dal punto in cui viene scaricata. Si definisce **intensità** dell'onda l'energia che attraversa una sezione della corda nell'unità di tempo e di superficie. Si misura in Watt/m^2 (e quindi ha la stessa dimensione di una *potenza per unità di superficie*). Immaginiamo un'onda generata da un'oscillazione armonica trasversale che si propaga nella direzione positiva delle x, la sua equazione è $y = y_0 \cos(kx - \omega t)$. Consideriamo un elemento di corda di lunghezza infinitesima dx, di massa infinitesima dm, nel punto $x = 0$ in cui viene esercitata la perturbazione che fa oscillare la corda verticalmente lungo l'asse y. L'energia del tratto oscillante sarà cinetica e potenziale. Quando l'energia cinetica è massima, l'energia potenziale è minima, cioè nulla (in quanto possiamo sempre scegliere l'energia potenziale a meno di una costante). L'energia totale quindi e' uguale all'energia cinetica massima, che corrisponde alla velocità massima della perturbazione lungo y (nel caso della corda, si trascura l'energia potenziale dovuta alla forza peso, e si considera solo l'energia potenziale dovuta alla forza di richiamo della corda che aumenta all'aumentare di $|y|$). Il punto dove la corda viene perturbata corrisponde a $x = 0$ e pertanto

$$y = y_0 \cos(kx - \omega t) = y_0 \cos(-\omega t)$$

da cui, derivando, si trova la velocità lungo y

$$v_y = \partial y / \partial t = y_0 \omega \sin(-\omega t)$$

per cui $v_{y_{max}} = y_0 \omega$. L'energia cinetica massima della quantità di massa dm nel tratto dx è

$$dE = \frac{1}{2} dm v_{y_{max}}^2 = \frac{1}{2} \mu dx v_{y_{max}}^2 = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 dx$$

con μ **densità lineare**. Per cui alla fine:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \mu y_0^2 \omega^2 v$$

dove v rappresenta la velocità dell'onda nella direzione x della corda, che sappiamo essere funzione del mezzo (in questo caso $v = \sqrt{T/\mu}$). Sappiamo che la densità di energia media (ovvero l'energia per unità di volume) dell'oscillatore armonico è nel nostro caso

$$\mathcal{E} = 1/2 \rho \omega^2 y_0^2$$

per cui essendo $\mu = S\rho$ (con S sezione della corda), si ottiene la potenza P:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho S y_0^2 \omega^2 v_x = \mathcal{E} S v \ .$$

Assumendo la superficie perpendicolare al vettore velocità, si ricava il flusso di energia, ovvero l'energia trasmessa per unità di tempo e di superficie:

$$I = \frac{d^2 E}{dt ds} = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt} = \mathcal{E} v$$

e prende il nome di **Intensità** dell'onda e, come già detto, si misura in Watt/m^2.

Nel caso appena visto, l'ampiezza dell'oscillazione y_0 rappresenta anche l'ampiezza dell'onda che si propaga lungo l'asse x, cioè lungo la corda. Se l'oscillatore armonico che genera la perturbazione ha una densità di energia $\mathcal{E}_0$ all'origine ($x = 0$) e la perturbazione si espande isotropicamente nello spazio tridimensionale, abbiamo visto che l'ampiezza varia inversamente con la distanza r e pertanto

$$y(r) = y_0/r$$

e quindi anche la densità d'energia diminuisce quadraticamente con la distanza r. Essendo $S = 4\pi r^2$ la superficie della sfera, si ottiene

$$\mathcal{E}S = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r^2}\right)\left(4\pi r^2\right) = cost$$

com'è giusto che sia visto che la potenza dell'oscillatore armonico nella sorgente non cambia. In questo caso l'intensità I (per unità di superficie) dell'onda diminuisce quadraticamente con r. Nel caso tridimensionale conviene pertanto utilizzare la nozione di **flusso di Energia** (Energia per unità di tempo e di angolo solido) ovvero al posto della superficie si considera l'angolo solido sotteso $d\Omega = dS/r^2$ [fig. 2]; con quest'ultima notazione si osserva che il flusso risulta indipendente dalla distanza dalla sorgente

$$\Phi(\Omega) = \frac{d^2E}{dtd\Omega} = \frac{d^2E}{dtdS}\frac{dS}{d\Omega} = (\mathcal{E}v)\left(r^2\right) = \mathcal{E}_0 v = costante$$

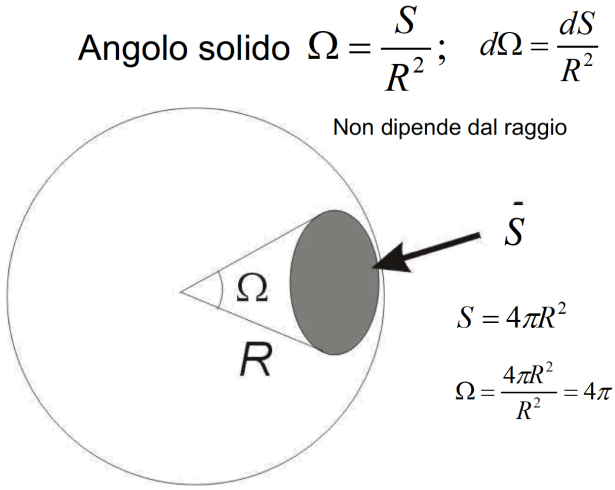

Figura 2: Rappresentazione grafica dell'angolo solido Ω