

Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:

21 maggio 2025

5 Oscillazioni e Onde

5.2 Lezione #22

5.2.4 Flusso di Calore

Abbiamo già definito a suo tempo il **Flusso di Calore** come

$$\vec{h} = -\frac{dU}{dSdt}\vec{v}$$

con $\vec{v}$ versore parallelo ad $\vec{h}$. Il segno “-” a giustificare la convenzione per cui il calore è positivo quando entra e negativo quando esce da una superficie chiusa S , e quindi che l'integrale

$$\int_S \vec{h} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial U}{\partial t}$$

ci dà come risultato una diminuzione dell'Energia Interna quando il flusso di calore esce dalla superficie chiusa. Abbiamo utilizzato il simbolo di derivata parziale in questo caso per ricordare che U in generale dipende da altre grandezze (tipicamente T e V per un sistema idrostatico). Nel caso particolare in cui la superficie S del sistema non cambi, il volume V racchiuso dalla superficie resta costante, e quindi il sistema **non** compie lavoro, ed il calore che viene scambiato dal sistema con l'ambiente coincide con la variazione di Energia Interna:

$$\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

La quantità di energia interna del sistema delimitato dalla superficie S può essere scritta come

$$U = \int_V u dV \tag{1}$$

con u densità di energia interna, da cui

$$\int_S \vec{h} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV$$

dove abbiamo sostituito a U l'integrale della densità di energia interna.

Applicando ora il Teorema della Divergenza, otteniamo

$$\int_S \vec{h} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{h} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV$$

che in forma differenziale diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{h} \quad (2)$$

Questa equazione l'abbiamo già vista: è l'equazione di continuità per un fluido. Utilizziamo ora la definizione di **calore specifico** a volume costante c_V

$$c_V = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

e ricordando l'equazione (1), nell'ipotesi di una densità costante, si ottiene

$$c_V = \frac{1}{m} \frac{\partial \int_V u dV}{\partial T} = \frac{V}{m} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial T}$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{1}{\rho c_V}$$

e possiamo calcolare la variazione di temperatura nel tempo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{1}{\rho c_V} \right) (-\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) \quad (3)$$

Nel caso della conduzione sappiamo però che il flusso di calore è legato alla temperatura dalla legge di Fourier (già vista):

$$\vec{h} = -k \vec{\nabla} T$$

e quindi sostituendo $\vec{h}$ nella (3) si ottiene ¹

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

che rappresenta l'**equazione di diffusione del calore** (per conduzione). La grandezza $\alpha = k/\rho c_V$ (diffusività termica) ha le dimensioni di m^2/s e quindi non si può propriamente parlare di velocità del calore. Prendiamo ora in considerazione una sbarra di sezione trascurabile rispetto alla sua lunghezza

¹ $\vec{\nabla} \cdot \vec{h} = \vec{\nabla} \cdot (-k \vec{\nabla} T) = -k \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = -k \nabla^2 T$

L (coincidente con l'asse x). L'equazione di diffusione del calore si riduce ad una dimensione spaziale e diventa

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Questa equazione ha una soluzione molto complicata. Qui sotto quella proposta da Fourier:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}\right)$$

con

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L T(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad .$$

Si tratta di un andamento sinusoidale smorzato. $T(0, t) = T(L, t) = T_0$ rappresenta in questo caso la temperatura della sbarra agli estremi, che per continuità deve essere la stessa dell'ambiente circostante (nei calcoli si assume $T_0 = 0$ per semplicità). In un materiale con $c_V \rightarrow \infty$ c'è bassa diffusività, la temperatura tende a rimanere la stessa nel tempo (l'esponenziale è uguale ad 1), ed il materiale si comporta quindi come un serbatoio. Viceversa nel caso in cui $c_V \rightarrow 0$ il materiale è un conduttore puro, il calore fluisce velocemente e la sua temperatura si abbassa. Valori tipici di diffusività sono $1.43 \cdot 10^{-7}$ e $1.27 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, rispettivamente per l'acqua e l'oro.