# Approfondimenti

Rinaldo Rui

ultima revisione:
14 gennaio 2025

# 5 Oscillazioni e Onde

## 5.3 Lezione #23

### 5.3.1 Sovrapposizione delle Onde

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: Consideriamo un'equazione differenziale quale quella appena vista (l'equazione delle onde)

$$\underline{L}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \ ,$$

con $f(x,t)$, e chiamiamo $\underline{L}$ "operatore". Si dimostra (abbastanza facilmente) che se $f_1$ ed $f_2$ sono entrambe soluzioni dell'equazione $\underline{L}$, allora la funzione $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ con $a_1$ ed $a_2$ costanti, è anch'essa soluzione dell'equazione $\underline{L}(f)$. Un operatore che soddisfa questa condizione è **lineare**. Per gli operatori lineari vale quindi il **Principio di sovrapposizione**: la risposta prodotta dalla combinazione lineare di diverse perturbazioni è uguale alla somma delle risposte di ciascuna perturbazione. Più in generale, se $\underline{L}(f_n)$ è l'equazione delle onde per la perturbazione n-esima (oscillazione, sforzo, pressione, ...) risulta

$$\underline{L}(f) = \underline{L}(a_1 f_1 + a_2 f_2 + ...) = a_1 \underline{L}(f_1) + a_2 \underline{L}(f_2) + ... = 0 \ .$$

L'unica condizione è che $v$ sia la stessa per tutte le $f_n$, ma questo noi lo sappiamo già avendo dimostrato che la velocità di propagazione della perturbazione dipende dal mezzo e non dalla perturbazione.

Il Teorema di Fourier dimostra che "qualunque funzione limitata, monotona a tratti e periodica può essere approssimata con un'opportuna somma di funzioni trigonometriche". Quanto visto, assieme al Principio di sovrapposizione ci permette di concludere che è possibile descrivere una perturbazione di periodo $T$ come sovrapposizione di più onde **monocromatiche**, ognuna con diversa frequenza $\nu_i$ (purché $v$ sia costante). Partiamo da una qualunque perturbazione $f(\tau)$ periodica (con periodo $T$). Per il Teorema di Fourier

$$f(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\frac{2\pi n\tau}{T} + b_n \sin\frac{2\pi n\tau}{T} \right)$$

che può essere riscritta come

$$f(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{2\pi n\tau}{T} + \phi_n\right)$$

con

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) .$$

Poniamo ora $\tau = (kxT/2\pi - t)$, l'equazione precedente diventa

$$f(kxT/2\pi - t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(nkx - \frac{2\pi n}{T}t + \phi_n\right)$$

e quindi la perturbazione iniziale con periodo $T$ può essere sostituita da una sovrapposizione di onde sinusoidali con pulsazione $\omega_n = 2\pi n/T$, oppure di frequenza $\nu_n = n/T$ ($\nu_1$ prende il nome di **armonica principale** dell'oscillazione).

**Intermezzo sui Numeri Complessi**

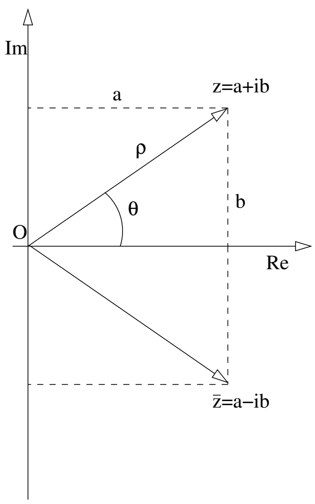


Figura 1: rappresentazione cartesiana di un numero immaginario

Il numero complesso $z = (a, b) = a + ib$ può essere visto come un vettore a due dimensioni, con una componente lungo l'asse reale ed una lungo l'asse immaginario [fig. 2]. Se $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, possiamo utilizzare la formula di Eulero e scrivere

$$z = (a, b) = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho e^{i\theta} .$$

Il numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$ ha la parte reale $\rho\cos\theta$, la parte immaginaria $\rho\sin\theta$, e modulo $\rho$. Pertanto le soluzioni dell'equazione dell'onda del tipo $f = A\cos(kx \pm \omega t)$ sono la parte reale del numero complesso $Ae^{i(kx\pm\omega t)}$.

### 5.3.2 Interferenza

Due onde della stessa natura che si sovrappongono nella stessa regione spaziale **con differenza di fase costante** danno luogo a particolari effetti di distribuzione spaziale dell'energia trasmessa dall'onda, detti **fenomeni di interferenza**. Consideriamo due onde monocromatiche con differenza di fase $\phi$ costante, che si propaghino nella direzione positiva dell'asse $x$:

$$f_1(x, t) = A_1\cos(kx - \omega t) \text{ , e } f_2(x, t) = A_2\cos(kx - \omega t + \phi)$$

con $\phi_1 = kx - \omega t$, $\phi_2 = kx - \omega t + \phi$ e $\phi = \phi_2 - \phi_1$. Le due funzioni sono entrambe soluzione dell'equazione delle onde con $v = \omega/k$, e quindi la loro

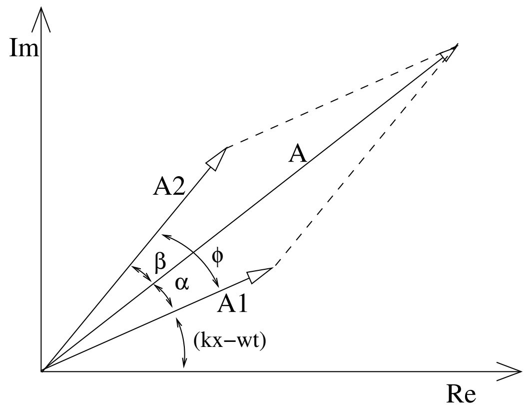


Figura 2: Interferenza tra due onde con differenza di fase costante

sovrapposizione dà origine a $f = f_1 + f_2$. Le due funzioni rappresentano la parte reale di due numeri complessi

$$z_1 = A_1 e^{i(kx-\omega t)} \text{ , e } z_2 = A_2 e^{i(kx-\omega t+\phi)}$$

e quindi possiamo ricavare $f$ come parte reale della somma $z$ dei due numeri complessi $z_1$ e $z_2$ [fig. 2]. Si osservi che al variare di $x$ e $t$ i due vettori ruotano, ma l'angolo $\phi$ resta fisso. Il numero complesso $z$ si trova applicando la somma vettoriale, ovvero sommando linearmente le loro componenti, ed il modulo $A$ del vettore $z$ risultante è

$$A^2 = z^2 = (z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 \cdot z_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi$$

Detti $\alpha$ e $\beta$ gli angoli tra il vettore $z$ e rispettivamente $z_1$ e $z_2$ si osserva che $A_1 \sin\alpha = A_2 \sin\beta$, con $\phi = \alpha + \beta$. Per trovare la parte reale della somma, moltiplico il modulo $A$ per il coseno della sua fase ed ottengo:

$$f = f_1 + f_2 = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi)}\ \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Per particolari valori di $\phi$ si ottiene:

$$A = A_1 + A_2 \text{ , se } \phi = 0, 2pi, 4\pi, ...2n\pi$$

$$A = |A1 - A2| \text{ , se } \phi = \pi, 3\pi, ...(2n+1)\pi$$

Mentre nel caso in cui le ampiezze $A_1 = A_2$ ne deriva che $\alpha = \beta = \phi/2$ e $A = 2A_1\cos(\phi/2)$ [1]. Ne consegue che

$$f = 2A_1 \cos\frac{\phi}{2}\ \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right),$$

che significa che l'ampiezza puo' variare da $A = 0$ a $A = 2A_1$ [2]

[1] utilizzare le formule di bisezione per ricavare questo risultato, in particolare

$$\cos\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}$$

[2] In base a questo risultato l'ampiezza di un'onda raddoppia o addirittura si annulla (e quindi l'onda sparisce). Ma noi abbiamo visto che l'intensità dell'onda (e quindi la sua

#### 5.3.3 Onde Stazionarie

Se due onde della stessa natura e frequenza si propagano nello stesso mezzo in versi opposti, la loro sovrapposizione dà origine a un fenomeno chiamato "onde stazionarie". Facciamo l'ulteriore ipotesi che le due onde

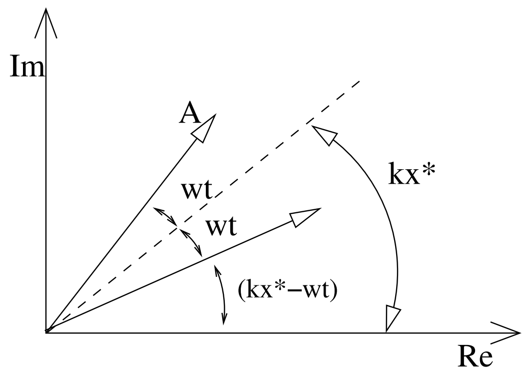


Figura 3: Onde stazionarie

abbiano la stessa ampiezza [fig. 3].

$$f_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \text{ , e } f_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t) \ .$$

Vogliamo trovare $f = f_1 + f_2$. Usiamo come già visto il metodo dei vettori. Consideriamo un punto $x^*$ qualsiasi sull'asse $x$. I due vettori ruotano in direzioni opposte. Il vettore somma [3] ha modulo $2A\cos(wt)$ e fase $kx^*$. Se lo proietto sull'asse reale ottengo

$$f(x,t) = 2A\cos(wt)\cos(kx*) \ .$$

L'ampiezza di $f$ dipende da $t$, mentre la fase è indipendente dal tempo. Esistono quindi dei valori di $x^*$ per cui l'onda si annulla (nodi) ed altri per cui l'onda ha ampiezza massima (ventri).
Nodi: $\cos kx^* = 0 \rightarrow x^* = \pm(2n+1)\pi/2k$
Ventri: $\cos kx^* = \pm 1 \rightarrow x^* = \pm n\pi/k$
Quindi variando $x^*$ di $\pi/2k$ passo da un nodo ad un ventre, variando $x^*$ di $\pi/k$ da un nodo a quello successivo, ed infine variando $x^*$ di $2\pi/k = \lambda$ si ha il ripetersi dell'onda.

Caso di onde stazionarie su corda vibrante. Si tratta di una corda di lunghezza $l$ fissata agli estremi che quando viene fatta vibrare dà luogo a onde stazionarie, in quanto, **a causa del vincolo**, agli estremi della corda

energia) varia con il quadrato dell'ampiezza e pertanto si prefigurerebbe una situazione in cui l'energia non si conserva! Questo paradosso nasce dall'approssimazione fatta all'inizio, e cioè che l'onda si propaghi in una sola dimensione, fenomeno che non avviene mai nei casi reali. Sperimentalmente si osserva invece che nel caso dell'interferenza vi sono regioni dello spazio in cui effettivamente l'intensità diminuisce (o aumenta), ma che sono compensate da altre regioni in cui l'intensità dell'onda aumenta (o diminuisce).

[3] utilizzare le formule di duplilcazione per ricavare questo risultato, in particolare $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$

si hanno sempre dei nodi. Per quanto appena visto, la distanza tra tra due nodi consecutivi si ha per

$$\Delta x = \frac{(2(n+1)+1)\pi}{2k} - \frac{(2(n)+1)\pi}{2k} = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \quad .$$

Quindi, nel caso in cui ci siano solo due nodi agli estremi, $\Delta x = l$ da cui $\lambda = 2l$, nel caso vi sia un nodo nel mezzo sarà $\Delta x = l/2$ da cui $\lambda = l$ e così di seguito. In generale, detta $l$ la lunghezza della corda, la distanza tra due nodi successivi sarà data da $\Delta x = l/m$ con $m$ numero di nodi. (Attenzione! NON si conta uno dei due nodi agli estremi). Pertanto, essendo $\Delta x = \lambda/2$ risulta $\lambda = 2l/m$ con $m = 1, 2, 3, ....$ Dalle relazioni $v = \lambda\nu$ e $v = \sqrt{T/\mu}$, risulta infine

$$\nu = v/\lambda = \frac{m}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad ,$$

ottenendo così precisi valori per le frequenze sulla corda. La frequenza fondamentale si ha per $m = 1$ (detta anche prima armonica), mentre le frequenze per $m > 1$ sono dette "armoniche". Dalla relazione si vede che una corda (più) grossa ha $\mu$ (più) grande e quindi frequenza minore (toni bassi); mentre aumentando la tensione $T$ della corda si aumenta la frequenza (chiunque accordi una chitarra lo sa).

### 5.3.4 Battimenti e Velocità di Gruppo

La sovrapposizione di due onde della stessa natura con frequenze leggermente diverse, che si propagano nello stesso mezzo, nella stessa direzione e nello stesso verso dà luogo al fenomeno dei "battimenti". Facciamo in questo caso la stessa ipotesi semplificativa di prima, ovvero che le due onde abbiano la stessa ampiezza.

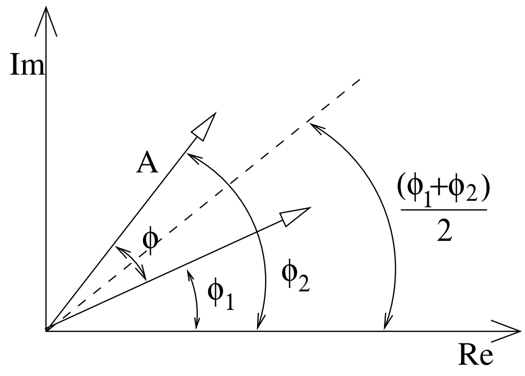


Figura 4: Battimenti

$$f_1(x,t) = A\cos(k_1x - \omega_1 t) \ ; \ f_2(x,t) = A\cos(k_2x - \omega_2 t)$$

Vogliamo trovare $f = f_1 + f_2$. Usiamo ancora il metodo dei vettori [fig. 4].

$$\phi_1 = k_1x - \omega_1 t \ , \ \ \phi_2 = k_2x - \omega_2 t \ , \ \ \phi = \phi_2 - \phi_1$$

Il vettore somma ha modulo $2A\cos(\phi/2) = 2A\cos((\phi_2-\phi_1)/2)$ e fase $\phi_1 + \phi/2 = \phi_1 + (\phi_2-\phi_1)/2 = (\phi_1+\phi_2)/2$. Quindi

$$\begin{aligned} f(x,t) &= 2A\cos\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2} \\ &= 2A\cos\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2+k_1}{2}x - \frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \end{aligned}$$

Il risultato è quindi un'onda che si propaga con una frequenza data dalla media aritmetica delle due frequenze iniziali, ma con un'ampiezza **modulata** nel tempo. Riscriviamo $f(x,t)$ in altro modo, utilizzando $\Delta k = k_2 - k_1$ e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ed i valori medi di numero d'onda $k_0 = (k_1+k_2)/2$ e di pulsazione $\omega_0 = (\omega_1+\omega_2)/2$:

$$f(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(k_0x - \omega_0 t)\ .$$

L'ampiezza così modulata

$$A' = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

è anch'essa un'onda, detta **battimento**. Pertanto l'onda che si propaga NON è un'onda sinusoidale, ma un'onda la cui ampiezza varia all'interno dell'altra "onda" che rappresenta invece l'effetto di battimento e che modulando l'ampiezza dà luogo al tipico suono, leggermente sgradevole (quello degli strumenti dell'orchestra prima del concerto). Dalla fig. 5 si osserva

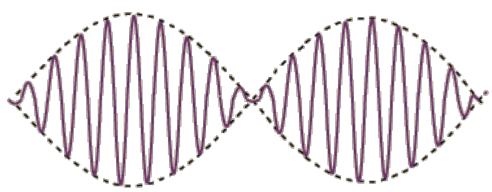

Figura 5: frequenza di battimento

che la lunghezza d'onda della modulazione in ampiezza in realtà contiene al suo interno due oscillazioni complete dell'ampiezza del suono, e pertanto la frequenza di battimento risulta essere $\nu_{beat} = \nu_2 - \nu_1$, e svanisce quando le due onde hanno la stessa frequenza.
Possiamo anche definire, analogamente a quanto fatto sinora, la velocità dell'onda $v_g = \Delta\omega/\Delta k$ che si chiama **velocità di gruppo**, ed è la velocità con cui si muove l'inviluppo che modula l'ampiezza dell'onda, mentre ricordiamo che la velocità di fase delle singole onde è $v_f = \omega/k$. Nell'ipotesi in cui la velocità di fase $v_f = v_1 = v_2$, ricordando che $v = \omega/k$, risulta

$$v_g = \frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1} = \frac{\omega_2 - \omega_2(k_1/k_2)}{k_2-k_1} = \omega_2\frac{(k_2-k_1)/k_2}{k_2-k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v_f\ .$$

Come ci si poteva aspettare, la velocità di gruppo è uguale alla velocità di fase delle onde. Ricordando che l'energia associata ad un'onda dipende dal quadrato dell'ampiezza, risulta che essa viene trasportata con la velocità di gruppo.

Quanto visto per la sovrapposizione di due onde risulta particolarmente importante nel caso di un **pacchetto d'onda**, definito come la sovrapposizione di molte onde monocromatiche con $k$ diversi, distribuiti in modo continuo attorno ad un particolare valore $k_0$. In questo caso si dimostra che la velocità di gruppo

$$v_g = \left( \frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k_0} \quad .$$

In generale quindi, essendo $\omega = kv_f$, si ottiene

$$v_g = \frac{d}{dk} kv_f = k \frac{dv_f}{dk} + v_f \ .$$

Nel caso di un'onda monocromatica è evidentemente $v_g = v_f$ in quanto $v_f = cost$. Quando $v_g \neq v_f$ si dice che il pacchetto si propaga in un mezzo dispersivo.