Corso di Laurea: Fisica
Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)
19 giugno 2019

Esercizio n.1

Una macchina contenente 3 moli di gas perfetto biatomico in 40 litri, inizialmente alla temperatura di 500 K, compie un ciclo composto dalle seguenti trasformazioni:
AB - Adiabatica irreversibile fino ad un volume di 100 litri;
BC - Isocora irreversibile[1] fino ad una temperatura di 200 K;
CA - Politropica fino a chiudere il ciclo.
Determinare il valore della temperatura nel punto B affinché il rendimento del ciclo sia nullo e calcolare la variazione di entropia dell'universo in quel caso.
Determinare infine il rendimento della macchina che compie lo stesso ciclo ABC nel caso in cui le trasformazioni siano tutte reversibili (fare attenzione alla trasformazione AB...).

Soluzione n.1

Affinché il rendimento del ciclo sia nullo deve essere $Q_{BC} = -Q_{CA}$ con Q_{BC} (Q_{CA}) il calore scambiato nella trasformazione BC (CA), essendo nullo il calore scambiato lungo AB.

$$Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B)$$

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = nc_V(T_A - T_C) + \frac{nR}{1-\alpha}(T_A - T_C)$$

ma dobbiamo determinare il coefficiente α della politropica

$$T_A V_A^{\alpha-1} = T_C V_C^{\alpha-1}$$

da cui

$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\alpha-1}$$

numericamente

$$\frac{500}{200} = \left(\frac{100}{40}\right)^{\alpha-1}$$

da cui si ricava immediatamente $\alpha = 2$. Pertanto

$$nc_V(T_C - T_B) = -nc_V(T_A - T_C) + nR(T_A - T_C)$$

da cui

$$T_B = T_A - \frac{R}{c_V}(T_A - T_C) = 380\ K$$

che mi permette di calcolare i calori scambiati

$$Q_{BC} = -11224.6 J \quad ; \quad Q_{CA} = 11224.6\ J$$

[1]per convenzione un'isocora irreversibile è una trasformazione a volume costante in cui il sistema viene messo a contatto con un serbatoio fino a raggiunge l'equilibrio termico

La variazione di Entropia dell'Universo si calcola sommando la variazione di entropia dell'ambiente per tutte le trasformazioni del ciclo:

$$(\Delta S_{AB})_{amb} = 0 \text{ J/K essendo } AB \text{ un'adiabatica}$$

$$(\Delta S_{BC})_{amb} = \frac{nc_V(T_B - T_C)}{T_C} = 56.1 \ J/K$$

$$(\Delta S_{CA})_{amb} = -\left(\Delta S_{CA}\right)_{sys} = -\left(nc_V \ln\frac{T_A}{T_C} + nR\ln\frac{V_A}{V_C}\right) = -34.3 \ J/K$$

e quindi

$$\Delta S_U = (\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA})_{amb} = 21.8 \ J/K$$

Qui ci sono due soluzioni diverse, entrambe prese per buone

1 caso (corretto) Se il ciclo è completamente reversibile, la trasformazione AB non può essere un'adiabatica, ma sarà una politropica:

$$T_A V_A^{\alpha'-1} = T_B V_B^{\alpha'-1}$$

da cui

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\alpha'-1}$$

numericamente

$$\frac{500}{380} = \left(\frac{100}{40}\right)^{\alpha'-1}$$

da cui si ottiene $\alpha' = 1.30$. Calcolo il calore scambiato in questa trasformazione ed ottengo

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = nc_V(T_B - T_A) + \frac{nR}{1-\alpha'}(T_B - T_A) = 2494.3 \ J$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB} + Q_{CA}} = 1 + \frac{-11224.6}{2494.3 + 11224.6} = 0.182$$

2 caso (accettato) Se il ciclo è completamente reversibile, allora anche la trasformazione adiabatica lo sarà e pertanto il punto B' sarà diverso dal punto B del ciclo precedente, in quanto la trasformazione adiabatica reversibile raggiunge la temperatura minima possibile data da:

$$T_{B'} V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

da cui si ricava $T_{B'} = 347$ K. Ed il rendimento del ciclo sarà dato da:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{B'C}}{Q_{CA}} = 1 + \frac{nc_V(T_C - T_{B'})}{Q_{CA}} = 1 + \frac{-9166.7}{11224.6} = 0.183$$

Esercizio n.2

Un recipiente cilindrico diatermico, chiuso ad un'altezza di 1 m da un pistone cilindrico di 25 cm di diametro e di massa m, scorrevole senza attrito, contiene 2 moli di gas perfetto monoatomico. Il sistema è in equilibrio termodinamico e la pressione dell'aria all'esterno è 1 atm, mentre quella del gas è 1.1 atm. Qual è la temperatura dell'ambiente? Agendo sul pistone con una forza F che compie un lavoro di 400 J, si abbassa il pistone di 20 cm, mentre la pressione del gas aumenta del 50%. Si calcolino la temperatura del gas, la quantità di calore scambiato e la variazione di Entropia dell'Universo. Qual è il lavoro della forza F necessario per arrivare allo stesso volume finale nel caso di una trasformazione reversibile?

Soluzione n.2

Conoscendo la pressione interna del gas p_i e la pressione atmosferica p_a, possiamo determinare la massa del pistone in quanto conosciamo la superficie $S = \pi R^2$:

$$m = (p_i - p_a)\pi R^2/g = (1.11 - 1.01) \times 10^5 \times 3.1415 \times 1.25^2/9.81 = 50.7\ kg$$

Ora calcoliamo il volume del cilindro di altezza h

$$V_i = Sh = 0.0491\ m^3$$

e troviamo la temperatura dell'ambiente

$$T_i = p_i V_i/nR = 329\ K$$

Abbassando il pistone ed aumentando la pressione del 50% si ottiene la temperatura finale della trasformazione

$$T_f = p_f V_f/nR = 1.5 p_i S(h - \Delta h)/nR = 395\ K$$

Il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro della pressione atmosferica, della massa del pistone e della forza F (tutti questi lavori sono negativi in quanto agiscono sul sistema diminuendone il volume)

$$L = p_a(V_f - V_i) - mg\Delta h - L_F = -994.73 - 99.47 - 400 = -1494\ J$$

Il calore scambiato è dato da

$$Q = \Delta U + L = nc_V(T_f - T_i) + L = 1641.30 - 1494.20 = 147\ J$$

La variazione di Entropia dell'Universo è data da

$$\Delta S_{sis} = nc_V \ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i} = 0.84\ J/K$$

$$\Delta S_{amb} = \frac{-Q}{T_i} = -0.45\ J/K$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{sis} + \Delta S_{amb} = 0.39\ J/K$$

Nel caso di una trasformazione reversibile, si tratta di un'isoterma. Il lavoro vale

$$L = nRT_i \ln(V_f/V_i) = -1221\ J$$

ed il calore scambiato, essendo $\Delta U = 0$ diventa semplicemente $Q = L$. Il lavoro della sola forza F risulta pertanto

$$L_F = L - p_a(V_f - V_i) + mg\Delta h = -126\ J$$

inferiore di quello della trasformazione irreversibile, come volevasi dimostrare.

Esercizio n.3

Un'auto di 1000 kg con superficie (sezione frontale) di 2 m^2 e $c(Re) = c_x = 1$, viene lanciata ad una velocità di 200 km/h su una strada pianeggiante, e all'istante $t = 0$ viene messa in folle. Assumendo che il regime rimanga sempre turbolento, che non vi sia attrito sull'asfalto, e sapendo che la densità dell'aria è di 1.2 kg/m^3, calcolare dopo quanto tempo l'auto avrà una velocità un decimo di quella iniziale e dopo quanto tempo si fermerà.
Facoltativo: quanta strada avrà percorso l'auto nei due casi?

Soluzione n.3

Dobbiamo applicare l'equazione della dinamica al moto dell'auto, su cui agisce la sola forza resistente dell'aria, essendo l'attrito delle gomme nullo.

$$m\vec{a} = \vec{F_{res}} = -\frac{1}{2}\rho A c(Re) v^2 \vec{u}$$

da cui

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho A c_x}{2} v^2$$

da cui

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\rho A c_x}{2m} dt$$

pongo

$$b = \frac{\rho A c_x}{2m} = 1.2 \times 10^{-3}\ m^{-1}$$

Integrando

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -b \int_0^t dt$$

si ottiene

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + b v_0 t}$$

per cui la velocità si annulla per $t \to \infty$. Il tempo trascorso in funzione della velocità è:

$$t(v) = \left(\frac{v_0}{v} - 1\right)\frac{1}{b v_0}$$

e pertanto $(200 km/h = 55.6 m/s)$:

$$t(0.1 v_0) = \frac{9}{b v_0} = \frac{9}{1.2 \times 10^{-3} \times 55.6} = 135 s$$

L'auto si ferma dopo un tempo infinito, essendo

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

Facoltativo: per calcolare il percorso dobbiamo trovare $s(t)$

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0 \int_0^t \frac{dt}{1 + bv_0 t} = v_0 \frac{\ln(1 + bv_0 t)}{bv_0} = \frac{1}{b} \ln(1 + bv_0 t)$$

Pertanto

$$s(134.9) = \frac{1}{1.2 \times 10^{-3}} \ln(1 + 1.2 \times 10^{-3} \times 55.6 \times 134.9) = 1920\ m$$

e

$$s(t \to \infty) \to \infty\ m$$