

Corso di Laurea: Fisica
Esame: Termodinamica e Fluidodinamica (scritto e soluzioni)
16 luglio 2019

Esercizio n.1

Un frigorifero che funziona in modo reversibile contiene una bacinella con 5 litri d'acqua e del ghiaccio, e viene messo in funzione fino a congelare tutta l'acqua, scambiando calore con l'ambiente esterno, dove la temperatura è di 30°C . La potenza assorbita dal frigorifero è $P = 100\text{ W}$. Determinare la quantità di calore ceduta all'esterno, il tempo impiegato per congelare l'acqua, la variazione di entropia dell'ambiente ed il coefficiente di prestazione ω_{CC} della macchina. Se il frigorifero avesse $\omega_{CC} = 2$, calcolare, a parità di potenza assorbita, il tempo impiegato per congelare l'acqua e la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione

L'acqua nella bacinella ha una massa $m = 5\text{ kg}$ ed una temperatura $T_L = 0^\circ\text{C}$, essendo in equilibrio con il ghiaccio; il frigorifero lavora in modo reversibile e vi sono solo due temperature, quella dell'acqua della bacinella (che rimane a 0°C fino a quando non viene tutta congelata) e quella dell'ambiente esterno. Pertanto il frigorifero ha il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra due soli serbatoi. Possiamo calcolare il calore Q_L assorbito dal frigorifero alla temperatura T_L :

$$Q_L = \lambda_f m = 3.34 \cdot 10^5 \times 5 = 1.67 \cdot 10^6\text{ J}$$

Per il teorema di Carnot, il calore Q_H scambiato con l'esterno risulta

$$Q_H = -\frac{T_H}{T_L} Q_L = -\frac{303}{273} \times 1.67 = -1.85 \cdot 10^6\text{ J}$$

Il tempo necessario per congelare l'acqua è dato dal lavoro fatto sul frigorifero diviso per la potenza dichiarata ($P = 100\text{ W}$). Il lavoro si ottiene dal I Principio della Termodinamica, in quanto per una macchina frigorifera, ovvero per qualunque ciclo, la variazione di energia interna è nulla e pertanto

$$L = Q = Q_L + Q_H = -0.18 \cdot 10^6\text{ J}$$

da cui

$$\Delta t = -L/P = 0.18 \cdot 10^6/100 = 1800\text{ s} = 30'$$

La variazione di entropia dell'ambiente è data da

$$\Delta S_a = -Q_H/T_H = 1.85 \cdot 10^6/303 = 6100\text{ J/K}$$

ed il coefficiente di prestazione del frigorifero è

$$\omega_{CC} = \frac{Q_L}{-L} = \frac{Q_L}{-Q_L - Q_H} = \frac{Q_L}{-Q_L + \frac{T_H}{T_L} Q_L} = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{273}{303 - 273} = 9.1$$

Se il frigorifero ha invece $\omega_{CC} = 2$ significa che sta operando in modo NON reversibile:

$$\omega_{CC} = \frac{Q_L}{-L'} \rightarrow L' = -\frac{Q_L}{\omega_{CC}} = -\frac{1.67 \cdot 10^6}{2} = -0.84 \cdot 10^6 \text{ J}$$

e pertanto il tempo necessario per congelare l'acqua nella bacinella è

$$\Delta t = -L/P = 0.84 \cdot 10^6 / 100 = 8400 \text{ s} = 2\text{h}:20'$$

Dobbiamo calcolare il calore Q'_H ceduto all'esterno

$$Q'_H = L' - Q_L = -2.51 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Infine la variazione di Entropia dell'Universo risulta essere:

$$\Delta S_U = \Delta S_a + \Delta S_s = \frac{-Q'_H}{T_H} + \frac{-Q_L}{T_L} = \frac{2.51 \cdot 10^6}{303} - \frac{1.67 \cdot 10^6}{273} = 2167 \text{ J/K}$$

Esercizio n.2

Un gas perfetto monoatomico inizialmente a pressione $p_A = 2 \text{ atm}$, volume $V_A = 50 \text{ l}$ e $T_A = 250 \text{ K}$, esegue il seguente ciclo termodinamico:

- AB: Espansione isoterma reversibile fino al punto B (durante questa trasformazione il gas assorbe 2500 cal);
- BC: Isocora irreversibile¹ fino al punto C, dato dall'intersezione con l'adiabatica reversibile passante per A;
- CD: Isobara reversibile fino a V_A ;
- DA: Isocora irreversibile a chiudere il ciclo.

Calcolare il rendimento del ciclo, il rendimento dell'equivalente ciclo di Carnot che operi tra le temperature minima e massima raggiunte dal ciclo, e la variazione di Entropia dell'Universo

Soluzione

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava immediatamente il numero di moli

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 4.87$$

Dal I PTD sappiamo che il calore assorbito in una trasformazione isoterma è uguale al lavoro compiuto e pertanto

$$Q = L = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} \rightarrow V_B = V_A e^{\frac{Q}{nRT_A}} = 141 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Per trovare il punto C nel grafico dobbiamo trovare il valore della temperatura T_C in corrispondenza del volume $V_C = V_B$, raggiunto da una trasformazione adiabatica reversibile passante per A fino al volume V_C :

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \rightarrow T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = 125 \text{ K}$$

¹per convenzione un'isocora irreversibile è una trasformazione a volume costante in cui il sistema viene messo a contatto con un serbatoio fino a raggiungere l'equilibrio termico.

Nella trasformazione isobara reversibile fino al punto V_A la pressione è costante e pertanto vale la relazione

$$\frac{T_D}{T_C} = \frac{V_D}{V_C} \rightarrow T_D = T_C \frac{V_A}{V_B} = 44.3 \text{ K}$$

I calori scambiati lungo le quattro trasformazioni sono pertanto:

$$Q_{AB} = 2500 \times 4.184 = 10460 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = n c_V (T_C - T_B) = -7592 \text{ J}$$

$$Q_{CD} = n c_p (T_D - T_C) = -8169 \text{ J}$$

$$Q_{DA} = n c_V (T_A - T_D) = 12417 \text{ J}$$

da cui il rendimento del ciclo:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 + \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 1 - \frac{7592 + 8169}{10460 + 12417} = 0.311$$

Il rendimento dell'equivalente ciclo di Carnot risulta

$$\eta_C = 1 - \frac{T_D}{T_A} = 0.823$$

La variazione di entropia dell'universo la calcoliamo valutando la variazione di entropia dell'ambiente per tutto il ciclo.

$$\Delta S_{AB}^a = -nR \log \frac{V_B}{V_A} = \frac{-Q_{AB}}{T_A} = -41.8 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{BC}^a = \frac{-Q_{BC}}{T_C} = 60.7 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{CD}^a = n c_p \log \frac{T_C}{T_D} = 105 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{DA}^a = \frac{-Q_{DA}}{T_A} = -49.7 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_U = \sum_i \Delta S_i^a = 74.2 \text{ J/K}$$

Esercizio n.3

Su una corda elastica di densità lineare $\mu = 14 \text{ g/m}$ viaggiano due onde, di equazione

$$y_1(x, t) = A e^{-(\alpha x - \beta t)^2}$$

e

$$y_2(x, t) = \frac{A}{1 + (2\alpha x + \gamma t + \delta)^2}$$

con $A = 1.2 \cdot 10^{-2}$, $\alpha = 8$, $\beta = 700$ e $\delta = -480$ in unità del Sistema Internazionale. Si determinino la velocità delle onde sulla corda, la tensione a cui è sottoposta ed il valore del parametro γ .

Facoltativo: quale può essere il massimo spostamento y_{max} della corda dalla sua posizione di equilibrio, ed in quale punto dello spazio avviene?

Soluzione

Innanzitutto possiamo definire le unità dei parametri: $[A] = \text{m}$, $[\alpha] = \text{m}^{-1}$, $[\beta]$ e $[\gamma] = \text{s}^{-1}$, e $[\delta] = \text{adimensionale}$.

Da quanto visto, poiché ogni funzione $y(x, t) = y(x \pm vt)$ è soluzione dell'equazione generale delle onde, si ricava immediatamente che la funzione $y_1(x, t)$ descrive un'onda progressiva di velocità $v_1 = \beta/\alpha = 87.5 \text{ m/s}$. Dalla conoscenza di v_1 si ricava la tensione della corda in quanto:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow T = v_1^2 \mu = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \mu = 107.2 \text{ N}$$

Poiché le due onde si propagano sullo stesso mezzo (la stessa corda) si ricava immediatamente che la velocità dell'onda $y_2(x, t)$ è la stessa in modulo ma potrebbe essere diversa in direzione. Pertanto $v_2 = \pm v_1$. Se scelgo $v_2 = -v_1$ allora $v_2 = -\gamma/2\alpha$ e pertanto si ricava

$$\gamma = 2\alpha v_1 = 2\alpha \frac{\beta}{\alpha} = 2\beta = 1400 \text{ s}^{-1}$$

Facoltativo: Il massimo spostamento potrà essere nel momento in cui il massimo di un'onda e quello dell'altra onda sono sovrapposti e pertanto il massimo spostamento sarà $2A = 24 \text{ mm}$. Questo avverrà risolvendo il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \alpha x - \beta t & = 0 \\ 2\alpha x + 2\beta t + \delta & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x & = -\frac{\delta}{4\alpha} = 15.0 \text{ m} \\ t & = -\frac{\delta}{4\beta} = 171 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

n.b. la soluzione $v_2 = v_1$ ovvero due onde che si propagano nella stessa direzione non ha una soluzione. Infatti in questo caso il sistema

$$\begin{cases} \alpha x - \beta t & = 0 \\ 2\alpha x - 2\beta t + \delta & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta t & = 0 \\ 0 + \delta & = 0 \end{cases}$$

ha come soluzione $\delta = 0$ diverso dal valore stabilito.